1. Určete hodnosti matic:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -3 \end{pmatrix}$ (e) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 & 2 \\ 1 & -4 & 6 & 1 \\ 7 & 5 & 3 & 4 \\ 9 & -14 & 28 & 7 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 0 & -3 & 4 \\ 1 & -6 & 8 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & -\frac{3}{2} & 2 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 6 & 7 \end{pmatrix}$ (f) $\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & -1 & 5 \\ 3 & -7 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

2. V závislosti na parametru a určete hodnosti matic:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 4 & a & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & a & -5 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

3. Pokud je to možné, vypočítejte (libovolnou metodou) k následujícím maticím matice inverzní:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (g) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (e) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ (h) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ (f) $\begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ (i) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

4. Řešte maticovou rovnici $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ pro

(a)
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$$

(b)
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

(c)
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

Řešení:

1. (a) 3
   (b) 2
   (c) 2
   (d) 2
   (e) 2
   (f) 3

2. (a) 3 pro $a =\neq \frac{7}{3}$,
   2 pro $a = \frac{7}{3}$
   (b) 3 pro libovolné a
   (c) 3 pro $a =\neq 1$,
   2 pro $a = 1$.

3. (a) $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$
   (b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
   (c) $\begin{pmatrix} \frac{4}{19} & \frac{1}{19} \\ \frac{1}{19} & \frac{5}{19} \end{pmatrix}$
   (d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
   (e) $\begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{4}{7} \\ \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} \\ -\frac{4}{7} & \frac{2}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix}$
   (f) nelze, singulární matice
   (g) $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & -1 & \frac{5}{6} \end{pmatrix}$
   (h) $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & -1 \\ \frac{2}{3} & -1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$
   (i) nelze, singulární matice

4. (a) $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$
   (b) $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ -2 & -3 & -2 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$
   (c) nemá řešení