1. Najděte body, které jsou nejblíže, resp. nejdále od počátku a leží na elipse dané rovnicí $x^2 + xy + y^2 = 3$.

2. Najděte maximální a minimální vzdálenost bodů elipsy $x^2 + xy + y^2 = 3.3$ od počátku a) přesným výpočtem, b) odhadem pomocí Lagrangeova multiplikátoru.

3. Najděte bod na parabole $y = x^2$, který je nejblíže bodu $(2, 1)$.

4. Najděte bod, který je nejblíže k počátku $\mathbb{R}^3$ a zároveň leží na rovině $3x + y + z = 5$ i na rovině $x + y + z = 1$.

5. Najděte minimum a maximum funkce $f(x, y, z) = x + y + z^2$ s podmínkami $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ a $y = 0$.

6. Najděte maximum funkce $f(x, y, z) = x + y + z^2$ s podmínkami $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ a $y = 0$ a) přesným výpočtem, b) odhadem pomocí Lagrangeova multiplikátoru.

7. Najděte maximum funkce $f(x, y, z) = yz + xz$ s podmínkami $y^2 + z^2 = 1$ a $xz = 3$.

8. Ověřte podmínky druhého řádu pro řešení příkladů 1, 3, 4, 5 a 7.

9. Klasifikujte lokální extrémy funkce $f(x, y) = x + y$ s podmínkou $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{2}$.

10. Klasifikujte lokální extrémy funkce $f(x, y) = 8x^2 - 2y$ s podmínkou $x^2 + y^2 = 1$.

11. Klasifikujte lokální extrémy funkce $f(x, y, z) = x + y + z^2$ s podmínkami $z - x = 1$, $y - xz = 1$.

12. Najděte minimum a maximum funkce $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ na množině $\{0 \le x \le 2, -1 \le y \le 2\}$.

13. Najděte minimum a maximum funkce $f(x, y) = 192x^3 + y^2 - 4xy$ na trojúhelníku s vrcholy v bodech $(0, 0)$, $(4, 2)$ a $(-2, 2)$.

14. Najděte minimum a maximum funkce $f(x, y) = x + y - xy$ s podmínkou $x^2 + y^2 \le 8$.

Řešení:

1. $(1,1)$ a $(-1,-1)$ jsou nejblíže, $(\sqrt{3},-\sqrt{3})$ a $(-\sqrt{3},\sqrt{3})$ jsou nejdále
2. a) $\sqrt{6.6}$ a $\sqrt{2.2}$, b)$\sqrt{6.45}$ a $\sqrt{2.15}$
3. přibližně $(1.165, 1.357)$
4. $\left(2,-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$
5. maximum v $\left(\frac{1}{2},0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ a $\left(\frac{1}{2},0,-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, minimum v $(-1,0,0)$
6. 1.05
7. maximum v $\left(3\sqrt{2},\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ a $-\left(3\sqrt{2},-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$
8. Podmínky druhého řádu odpovídají uvedeným výsledkům.
9. mimimum v $(-2,-2)$, maximum v $(2,2)$
10. maxima v $(-\frac{3\sqrt{7}}{8},-\frac{1}{8}$ a $(\frac{3\sqrt{7}}{8},-\frac{1}{8}$, minimum v $(0,1)$
11. minimum v $(-1,1,0)$
12. $f_{min}=-1$ v $(1,1)$, $f_{max}=13$ v $(2,-1)$
13. $f_{min}=-1500$ v $(-2,2)$, $f_{max}=12.228$ v $(4,2)$