3. minitest - varianta A

Lokální extrémy funkce dvou proměnných

13. 10. 2023

Najděte lokální extrémy a sedlové body funkce

$$f(x, y) = x^3 + y^2 + 15x^2 - 6xy + 12x - 4y$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 30x - 6y + 12 = 0 \quad |:3$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y - 6x - 4 = 0 \quad |:2$$

$$x^2 + 10x - 2y + 4 = 0$$

$$y - 3x - 2 = 0$$

dosazení

$$\Rightarrow \boxed{y = 3x + 2}$$

$$x^2 + 10x - 2(3x+2) + 4 = 0$$

$$x^2 + 4x = 0$$

$$x(x+4) = 0$$

$$x = 0 \quad \vee \quad x = -4$$

$$y = 2 \qquad y = -10$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x + 30$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -6$$

Hessova matice $H(x,y) = \begin{pmatrix} 6x+30 & -6 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$

$$H(0,2) = \begin{pmatrix} 30 & -6 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$$

pozitivně definitní matice

$\Rightarrow [0,2]$ je lok. min.

$$H(-4,-10) = \begin{pmatrix} 6 & -6 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} \quad \det() < 0$$

indefinitní matice

$\Rightarrow [-4,-10]$ je sedlo

3. minitest - varianta B

Lokální extrémy funkce dvou proměnných

13. 10. 2023

Najděte lokální extrémy a sedlové body funkce

$$f(x, y) = x^3 + y^2 + 15x^2 - 6xy + 18x - 6y + 5$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 30x - 6y + 18 = 0 \quad |:3$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y - 6x - 6 = 0 \quad |:2$$

$$x^2 + 10x - 2y + 6 = 0$$ dosadíme

$$y - 3x - 3 = 0 \Rightarrow \boxed{y = 3x + 3}$$

$$x^2 + 10x - 2(3x+3) + 6 = 0$$

$$x^2 + 4x = 0$$

$$x(x+4) = 0$$

$$x = 0 \quad \vee \quad x = -4$$

$$y = 3 \qquad y = -9$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x + 30$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -6$$

Hessova matice $H(x,y) = \begin{pmatrix} 6x+30 & -6 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$

$$H(0,3) = \begin{pmatrix} 30 & -6 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$$

pozitivně definitní matice

$\Rightarrow$ [0,3] je lok. min.

$$H(-4,-9) = \begin{pmatrix} 6 & -6 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} \quad \det() < 0$$

indefinitní matice

$\Rightarrow$ [-4,-9] je sedlo