

# Domácí cvičení 1

Funkce dvou proměnných - Vrstevnice  
21. 2. 2024

Zakreslete a popište vrstevnici ke grafu funkce

- a)  $f(x, y) = x^2 + y^2 + 3x$  v řezu rovinou  $z = \frac{7}{4}$
- b)  $f(x, y) = 4x^2 + 9y^2$  v řezu rovinou  $z = 36$
- c)  $f(x, y) = \frac{2x-3}{yx-y}$  v řezu rovinou  $z = 1$
- d)  $f(x, y) = \frac{x^2-2y}{x-y}$  v řezu rovinou  $z = 3$
- e)  $f(x, y) = \frac{2x-4}{x^2+y^2-4}$  v řezu rovinou  $z = 1$ .
- f)  $f(x, y) = \frac{2x-5}{x^2+y^2-4}$  v řezu rovinou  $z = 1$ .
- g)  $f(x, y) = \frac{y}{\sqrt{y-x^2}}$  v řezu rovinou  $z = 1$
- h)  $f(x, y) = \frac{xy^2-2x^2y}{y-x-x^2}$  v řezu rovinou  $z = 0$
- i)  $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x + 6y$  v řezu rovinou  $z = c$ , kde  $c \in \mathbb{R}$  je parametr.
- j)  $f(x, y) = \frac{4x}{x^2+y^2+1}$  v řezu rovinou  $z = c$ , kde  $c \in \mathbb{R}$  je parametr.

Výsledky:

- a)  $(x + \frac{3}{2})^2 + y^2 = 4$  - kružnice se středem v bodě  $[-\frac{3}{2}, 0]$  a poloměrem 2.  
(graf funkce je rotační paraboloid)
- b)  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$  - elipsa se středem v bodě  $[0, 0]$  a poloosami délek 3 a 2.  
(graf funkce je eliptický paraboloid)
- c)  $y = \frac{2x-3}{x-1}$  - hyperbola s asymptotami  $y = 2$  a  $x = 1$  s vyloučením bodu  $[\frac{3}{2}, 0]$ .
- d)  $y = 3x - x^2$  - parabola s vyloučením bodů  $[0, 0]$  a  $[2, 2]$ .
- e)  $(x - 1)^2 + y^2 = 1$  - kružnice se středem v bodě  $[1, 0]$  a poloměrem 1 s vyloučením bodu  $[2, 0]$ .
- f) vrstevnicí je bod  $[1, 0]$ , rovina  $z = 1$  protíná graf funkce  $f$  pouze v jediném bodě (tj.  $f(1, 0) = 1$ )
- g)  $x^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$  - kružnice se středem v bodě  $[0, \frac{1}{2}]$  a poloměrem  $\frac{1}{2}$  s vyloučením bodu  $[0, 0]$ .
- h) přímky  $x = 0$ ,  $y = 0$  a  $y = 2x$  s vyloučením bodů  $[-1, 0]$ ,  $[0, 0]$  a  $[1, 2]$ .
- i) rovina  $z = c$  protíná graf funkce  $f$  pro  $c > -10$  v kružnicích  $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = c + 10$ , tj. v kružnici se středem v bodě  $[1, -3]$  a poloměrem  $\sqrt{c + 10}$ . Pro  $c = -10$  je vrstevnicí bod  $[1, -3]$ . Pro  $c < -10$  rovina neprotíná graf funkce  $f$ . (graf funkce je rotační paraboloid)
- j) rovina  $z = 0$  protíná graf funkce  $f$  v přímce  $x = 0$ , rovina  $z = c$  pro  $c \in (-2, 2) \setminus \{0\}$  v kružnicích  $(x - \frac{2}{c})^2 + y^2 = \frac{4}{c^2} - 1$ , tj. v kružnici se středem v bodě  $[\frac{2}{c}, 0]$  a poloměrem  $\sqrt{\frac{4}{c^2} - 1}$ . Pro  $c = 2$  je vrstevnicí bod  $[1, 0]$ , pro  $c = -2$  je vrstevnicí bod  $[-1, 0]$ . Pro  $c < -2$  nebo  $c > 2$  rovina neprotíná graf funkce  $f$ .