Příklad 6.1. Vypočtěte z definice derivaci funkce f v bodě x_0.

a) $f(x) = \sqrt{x},\ x_0 = 1$

b) $f(x) = x^2,\ x_0 = 3$

c) $f(x) = 3 - 2x,\ x_0 = 1$

Řešení 6.1.

a) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \frac{1}{2}$

b) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^2-3^2}{x-3} = 6$

c) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{3-2x-1}{x-1} = -2$

Příklad 6.3. Použití tabulky, derivace součinu a podílu: Zderivujte následující funkce, pokud je to možné, derivace zjednodušte.

a) $f(x) = x^5 - 4x^3 - 2x + 4\pi$

b) $f(x) = \sin x - 2^x$

c) $f(x) = \frac{3^x}{2^x}$

d) $f(x) = x\sqrt{x}$

e) $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$

f) $f(x) = x^3 \ln x$

g) $f(x) = x^2 \cos x$

h) $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x}}$

i) $f(x) = \frac{1+\mathrm{e}^x}{1-\mathrm{e}^x}$

j) $f(x) = x\mathrm{e}^x \ln x$

k) $f(x) = \frac{x2^x}{\sqrt{x}}$

l) $f(x) = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x \cos x}$

Řešení 6.3.

a) $f'(x) = 5x^4 - 12x^2 - 2$

b) $f'(x) = \cos x - 2^x \ln 2$

c) $f'(x) = \frac{3^x}{2^x}(\ln 3 - \ln 2)$

d) $f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}$

e) $f'(x) = \frac{4x}{(x^2+1)^2}$

f) $f'(x) = x^2(3\ln x + 1)$

g) $f'(x) = 2x\cos x - x^2 \sin x$

h) $f'(x) = \frac{x-1}{2x\sqrt{x}}$

i) $f'(x) = \frac{2\mathrm{e}^x}{(1-\mathrm{e}^x)^2}$

j) $f'(x) = \mathrm{e}^x((1+x)\ln x + 1)$

k) $f'(x) = \frac{2^x(1+x\ln 4)}{2\sqrt{x}}$

l) $f'(x) = \frac{\sin^3 x - \cos^3 x}{\sin^2 x \cos^2 x}$

Příklad 6.4. Derivace složené funkce: Zderivujte následující funkce, pokud je to možné, derivace zjednodušte.

a) $f(x) = \operatorname{arctg}\sqrt{x}$

b) $f(x) = \sqrt{\operatorname{arctg} x}$

c) $f(x) = \sqrt{x^2-1}$

d) $f(x) = 2\cos 4x$

e) $f(x) = \sin 2x$

f) $f(x) = \sin^2 x$

g) $f(x) = \operatorname{arccotg}(\ln x^3)$

h) $f(x) = \sin(3-x)^2$

i) $f(x) = \sin x^2$

j) $f(x) = \sin^2 x^2$

k) $f(x) = \sqrt{\cos(x^4-1)}$

l) $f(x) = \ln \frac{1}{x-2}$

Řešení 6.4.

a) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}$

b) $f'(x) = \frac{1}{2(1+x^2)\sqrt{\operatorname{arctg} x}}$

c) $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$

d) $f'(x) = -8\sin 4x$

e) $f'(x) = 2\cos 2x$

f) $f'(x) = \sin 2x$

g) $f'(x) = \frac{-3}{x(1+\ln^2 x^3)}$

h) $f'(x) = (2x-6)\cos(3-x)$

i) $f'(x) = 2x\cos x^2$

j) $f'(x) = 2x\sin 2x^2$

k) $f'(x) = \frac{-2x^3\sin(x^4-1)}{\sqrt{\cos(x^4-1)}}$

l) $f'(x) = \frac{1}{2-x}$

Příklad 6.5. Derivace složené funkce: Zderivujte následující funkce, pokud je to možné, derivace zjednodušte.

a) $f(x) = \operatorname{arctg}^2 \frac{1}{x}$

b) $f(x) = \frac{1}{\ln x}$

c) $f(x) = \ln \operatorname{tg} x$

d) $f(x) = \log_3(\arcsin(x^2))$

e) $f(x) = \ln \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$

f) $f(x) = \operatorname{arctg}(x^2 \ln x)$

g) $f(x) = \ln \frac{x+1}{x-1}$

h) $f(x) = e^{\frac{\sin x}{\cos x}}$

i) $f(x) = \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$

Řešení 6.5.

a) $f'(x) = \frac{-2}{x^2+1} \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$

b) $f'(x) = -\frac{1}{x \ln^2 x}$

c) $f'(x) = \frac{1}{\sin x \cos x}$

d) $f'(x) = \frac{2x}{\sqrt{1-x^4} \ln 3 \arcsin x^2}$

e) $f'(x) = \frac{4e^{2x}}{e^{4x} - 1}$

f) $f'(x) = \frac{x\,(2\ln x + 1)}{1 + x^4 \ln^2 x}$

g) $f'(x) = \frac{-2}{(x+1)(x-1)}$

h) $f'(x) = \frac{e^{\frac{\sin x}{\cos x}}}{\cos^2 x}$

i) $f'(x) = \frac{7}{8\sqrt[8]{x}}$

Příklad 6.6. Zderivujte následující funkce, pokud je to možné, derivace zjednodušte. Určete definiční obor funkce i definiční obor její derivace.

a) $f(x) = 2x\sqrt{x - 4x^2}$

b) $f(x) = e^{\sqrt{x+1}}$

c) $f(x) = \arcsin \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$

d) $f(x) = \ln|x|$

e) $f(x) = \operatorname{arccotg} \frac{2x}{x^2-1}$

f) $f(x) = \arccos \frac{x-3}{2} + \sqrt{x^2 - 5x + 20}$

Řešení 6.6.

a) $f'(x) = \frac{x(3-16x)}{\sqrt{x(1-4x)}}, \quad \mathcal{D}(f) = \langle 0, \frac{1}{4} \rangle, \quad \mathcal{D}(f') = (0, \frac{1}{4})$

b) $f'(x) = \frac{e^{\sqrt{x+1}}}{2\sqrt{x+1}}, \quad \mathcal{D}(f) = \langle -1, \infty), \quad \mathcal{D}(f') = (-1, \infty)$

c) $f'(x) = \frac{-1}{(1+x)\sqrt{2x(1-x)}}, \quad \mathcal{D}(f) = \langle 0, 1 \rangle, \quad \mathcal{D}(f') = (0, 1)$

d) $f'(x) = \frac{1}{x}, \quad \mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad \mathcal{D}(f') = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

e) $f'(x) = \frac{2}{1+x^2}, \quad \mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}, \quad \mathcal{D}(f') = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$

f) $f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{(5-x)(x-1)}} + \frac{2x-5}{2\sqrt{x^2-5x+20}}, \quad \mathcal{D}(f) = \langle 1, 5 \rangle, \quad \mathcal{D}(f') = (1, 5)$