1. Definice derivace.

3.101. Užitím definice derivace vypočtěte $f'(a)$, je-li
a) $f(x) = \sqrt{x+1}$, $a = 3$,
b) $f(x) = 3x^2 + 2$, $a = 0$,
c) $f(x) = \operatorname{tg} x$, $a = \frac{1}{4}\pi$,
d) $f(x) = \ln x$, $a = 2$,
e) $f(x) = 2^x$, $a = 0$.

Řešení.
a) $\frac{1}{4}$, b) 0, c) 2, d) $\frac{1}{2}$, e) $\ln 2$.

3.102. Užitím definice derivace vypočtěte $f'_+(a)$ a $f'_-(a)$, je-li
a) $f(x) = \sqrt{|x|}$, $a = 0$,
b) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$, $a = 0$,
c) $f(x) = |x-2|$, $a = 2$,
d $f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{pro } x > 0 \\ x & \text{pro } x \le 0 \end{cases}$.

Řešení.
a) $f'_+(0) = +\infty$, $f'_-(0) = -\infty$, b) $f'_+(0) = +\infty$, $f'_-(0) = -\infty$, c) $f'_+(2) = 1$, $f'_-(2) = -1$, d) $f'_+(0) = f'_-(0) = 1$.

3.103. Podle definice určete $f'(x)$, jestliže
a) $f(x) = x^3$, b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$,
c) $f(x) = \operatorname{tg} x$, d) $f(x) = \sqrt{x+1}$.

Řešení. $f'(x)$ je dána vztahem
a) $3x^2$ pro $x \in R$, b) $-2/x^3$ pro $x \ne 0$, c) $1/\cos^2 x$ pro $x \ne \frac{1}{2}(2k+1)\pi$, $k \in Z$, d) $1/(2\sqrt{x+1})$ pro $x \in (-1, +\infty)$.

3.104. Dokažte, že funkce definovaná na celé reálné ose, která je
a) derivací liché (resp. sudé) funkce je sudá (resp. lichá);
b) derivací funkce periodické je periodická se stejnou periodou.

2. Výpočet derivací.

3.201. Vypočtěte $f'(c)$, jestliže
a) $f(x) = x^4 + 1$, $c = 2$,
b) $f(x) = x\sqrt{x}$, $c = 1$,
c) $f(x) = \sin^2 x$, $c = \frac{1}{4}\pi$,
d) $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $c = 1$,
e) $f(x) = 3x^3 - x^2 + \dfrac{1}{x} - \dfrac{3}{x^2}$
v bodě $c = -1$.

Řešení.
a) 2^5, b) $\frac{3}{2}$, c) 1, d) $\frac{1}{2}$, e) 4.

3.202. Najděte derivaci dané funkce (a určete její definiční obor i definiční obor derivace). V bodech z $D(f) - D(f')$ se pokuste zjistit, zda existuje derivace nevlastní, případně, zda existují jednostranné derivace (vlastní nebo nevlastní). V těchto bodech lze k výpočtu derivace kromě definice použít tvrzení 3.509.a,b.
a) $f(x) = x^{11}$,
b) $f(x) = \sqrt[3]{x^8}$,
c) $f(x) = \sqrt{x\sqrt{x}}$,

d) $f(x) = \sqrt[4]{\frac{1}{x^3}}$,
e) $f(x) = x + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$,
f) $f(x) = (x^2+1)^4$,
g) $f(x) = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{x}}}$.

Řešení.
a) $11\,x^{10}$ na R, **b)** $\frac{8}{3}\sqrt[3]{x^5}$ na R, **c)** $\frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}}$ na $(0,+\infty)$, $f'_+(0) = +\infty$, **d)** $-\frac{3}{4}x^{-\frac{7}{4}}$ na $(0,+\infty)$, **e)** $1 + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$ na $(0,+\infty)$, $f'_+(0) = +\infty$, **f)** $8x(x^2+1)^3$ na R, **g)** $\frac{1}{8}\frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1+\sqrt{x}}\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{x}}}}$ na $(0,+\infty)$, $f'_+(0) = +\infty$.

3.203. Stejně jako v 3.202:

a) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$,
b) $f(x) = \dfrac{8x}{4-x^2}$,
c) $f(x) = \dfrac{1+x-x^2}{1-x+x^2}$,
d) $f(x) = \dfrac{x-1}{(x^2+2)^2}$,
e) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$,
f) $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{1}{1+x^2}}$,
g) $f(x) = \dfrac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt{2x}}$,
h) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$,
i) $f(x) = \dfrac{1+x}{\sqrt{1-x}}$.

Řešení. **a)** $4x/(x^2+1)^2$ na R, **b)** $8(4+x^2)/(4-x^2)^2$ na $R - \{\pm 2\}$, **c)** $2(1-2x)/(1-x+x^2)^2$ na R, **d)** $(-3x^2+4x+2)/(x^2+2)^3$ na R, **e)** $-\left(|x-1|\sqrt{x^2-1}\right)^{-1}$ na $(-\infty,-1)\cup(1+\infty)$, $f'_-(-1) = -\infty$, **f)** $-\frac{2}{3}x/\sqrt[3]{(1+x^2)^4}$ na R, **g)** $\frac{1}{2}(1-\sqrt{2})/\left(\sqrt{x}(1+\sqrt{2x})^2\right)$ na $(0,+\infty)$, $f'_+(0) = -\infty$, **h)** $-x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ na $(-1,1)$, $f'_+(-1) = +\infty$, $f'_-(1) = -\infty$, **i)** $\frac{1}{2}(3-x)/\sqrt{(1-x)^3}$ na $(-\infty,1)$, $f'_-(1) = +\infty$.

3.204 Stejně jako v 3.202:

a) $f(x) = \sin(4x+2)$,
b) $f(x) = \cos^2 x$,
c) $f(x) = \cos x^2$,
d) $f(x) = \dfrac{x}{1-\cos x}$,
e) $f(x) = \cos\sqrt{\dfrac{1}{1-x}}$,
f) $f(x) = \cos 2x - 2\sin x$,
g) $f(x) = \dfrac{1}{\sin x}$,
h) $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$,
i) $f(x) = \sin(\sin x)$,
j) $f(x) = \sin\sqrt{1+x^2}$,
k) $f(x) = (1+\sin^2 x)^4$,
l) $f(x) = \sqrt{\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}}$,
m) $f(x) = \sin\left(\sin(\sin x)\right)$,
n) $f(x) = \cos^2\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$,
o) $f(x) = \dfrac{x\sin x}{1+\operatorname{tg} x}$,
p) $f(x) = \sin^2(\cos 3x)$,
q) $f(x) = 3\sin^2 x - \sin^3 x$.

Řešení. **a)** $4\cos(4x+2)$ na R, **b)** $-\sin 2x$ na celé reálné ose, **c)**

$-2x\sin x^2$ na R, **d)** $(1-\cos x - x\sin x)/(1-\cos x)^2$ pro body, které splňují $x \neq 2k\pi$, $k \in Z$, **e)** $-\frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{3}{2}}\sin\sqrt{1/(1-x)}$ na $(-\infty,1)$, **f)** $-2\cos x(1+2\sin x)$ na R, **g)** $-\cos x/\sin^2 x$ pro všechny body, které splňují $x \neq k\pi$, $k \in Z$, **h)** $-x^{-2}\cos(x^{-1})$ na celé reálné ose kromě bodu 0, **i)** $\cos(\sin x)\cos x$ na R, **j)** $(x\cos\sqrt{1+x^2})/\sqrt{1+x^2}$ na R, **k)** $4(1+\sin^2 x)^3\sin 2x$ na R, **l)** $1/(4\sqrt{\operatorname{tg}\frac{1}{2}x}\cos^2\frac{1}{2}x)$ na každém intervalu $(2k\pi,(2k+1)\pi)$, $k \in Z$, **m)** $\cos(\sin(\sin x))\cos(\sin x)\cos x$ na reálné ose, **n)** $\sin\left(2\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)\frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}$ na intervalu $(0,+\infty)$, $f'_+(0)=+\infty$, **o)** $\left((1+\operatorname{tg}x)(\sin x + x\cos x) - x\sin x(\cos x)^{-2}\right)/(1+\operatorname{tg}x)^2$ pro hodnoty x, které se neobjevují mezi body $-\frac{1}{4}\pi + k\pi, \frac{1}{2}\pi + k\pi$, $k \in Z$, **p)** $-6\sin(\cos 3x)\cos(\cos 3x)\sin 3x \equiv -3\sin(2\cos 3x)\sin 3x$ na R, **q)** $\frac{3}{2}(2-\sin x)\sin 2x$ na R.

3.205 Stejně jako v 3.202:

a) $f(x) = x\arcsin x$

b) $f(x) = (\arcsin x)^2$

c) $f(x) = \dfrac{1}{\arcsin x}$,

d) $f(x) = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2}$,

e) $f(x) = \arcsin\sqrt{x}$,

f) $f(x) = \sqrt{x}\operatorname{arctg} x$,

g) $f(x) = \operatorname{arctg}\left(x - \sqrt{1+x^2}\right)$,

h) $f(x) = \arcsin\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$,

i) $f(x) = \arccos\dfrac{1}{x}$,

j) $f(x) = \operatorname{arctg}^2\dfrac{1}{x}$,

k) $f(x) = \arcsin\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$,

l) $f(x) = \arccos\dfrac{2x-1}{\sqrt{3}}$,

m) $f(x) = \operatorname{arctg} x^2$.

Řešení. **a)** $\arcsin x + x/\sqrt{1-x^2}$ na $(-1,1)$, $f'_+(-1) = -\infty$, $f'_-(1) = +\infty$, **b)** $2(\arcsin x)/\sqrt{1-x^2}$ na $(-1,1)$, $f'_+(-1) = -\infty$, $f'_-(1) = +\infty$, **c)** $-\left((\arcsin x)^2\sqrt{1-x^2}\right)^{-1}$ na $(-1,1)$, $f'_+(-1) = -\infty$, $f'_-(1) = -\infty$, **d)** $\arcsin x$ na intervalu $(-1,1)$, $f'_+(-1) = -\frac{1}{2}\pi$, $f'_-(1) = \frac{1}{2}\pi$, **e)** $\frac{1}{2}(x(1-x))^{-\frac{1}{2}}$ na $(0,1)$, $f'_+(0) = +\infty$, $f'_-(1) = +\infty$, **f)** $\frac{1}{2}(\operatorname{arctg} x)/\sqrt{x} + \sqrt{x}/(1+x^2)$ na $(0,+\infty)$, $f'_+(0) = 0$, **g)** $\frac{1}{2}(1+x^2)^{-1}$ na R, **h)** $-2(\operatorname{sgn} x)/(1+x^2)$ pro $x \neq 0$, $f'_\pm(0) = \mp 2$, **i)** $\left(|x|\sqrt{x^2-1}\right)^{-1}$ pro $|x| > 1$, $f'_+(1) = f'_-(-1) = +\infty$, **j)** $-2\left(\operatorname{arctg}(1/x)\right)/(1+x^2)$ na celé reálné ose kromě bodu 0, **k)** $\frac{-1}{(x+1)\sqrt{2x(1-x)}}$ na $(0,1)$, $f'_+(0) = -\infty$, $f'_-(1) = -\infty$, **l)** $-\sqrt{2}/\sqrt{1+2x-2x^2}$ na $\left(\frac{1}{2}(1-\sqrt{3}), \frac{1}{2}(1+\sqrt{3})\right)$, $f'_+(\frac{1}{2}(1+\sqrt{3})) = f'_-(\frac{1}{2}(1+\sqrt{3})) = -\infty$, **m)** $2x/(1+x^4)$ na R.

3.206 Stejně jako v 3.202:

a) $f(x) = \ln^2 x$,

b) $f(x) = \sqrt{\ln x}$,

c) $f(x) = x\ln x$,

d) $f(x) = \dfrac{1 - \ln x}{1 + \ln x}$,

e) $f(x) = \ln \sin x$,

f) $f(x) = \sqrt{1 + \ln^2 x}$,

g) $f(x) = \ln(x^2 - 4x)$,

h) $f(x) = \ln \arccos 2x$,

i) $f(x) = \ln(\ln(\ln x))$,

j) $f(x) = \ln \operatorname{arctg} \sqrt{1 + x^2}$,

k) $f(x) = \log_x a$, $a \neq 1$.

Řešení. **a)** $\frac{2(\ln x)}{x}$ na $(0, +\infty)$, **b)** $\frac{1}{2}(x\sqrt{\ln x})^{-1}$ na $(1, +\infty)$, $f'_+(1) = +\infty$, **c)** $\ln x + 1$ na $(0, +\infty)$, **d)** $-2/(x(1 + \ln x)^2)$ na $(0, e^{-1}) \cup (e^{-1}, +\infty)$, **e)** $\operatorname{cotg} x$ na intervalech $(2k\pi, (2k+1)\pi))$, $k \in Z$, **f)** $\frac{\ln x}{x\sqrt{1+x^2}}$ na $(0, +\infty)$, **g)** $(2x - 4)/(x^2 - 4x)$ na $(-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$, **h)** $-2/(\sqrt{1 - 4x^2} \arccos 2x)$ na intervalu $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $f'_+(-\frac{1}{2}) = -\infty$, **i)** $(x \ln x \ln(\ln x))^{-1}$ na $(e, +\infty)$, **j)** $\frac{1}{\operatorname{arctg}\sqrt{1+x^2}} \frac{x}{(2+x^2)\sqrt{1+x^2}}$ na celé reálné ose **k)** $-(\log_x a)^2/(x \ln a)$ na $(0,1) \cup (1, +\infty)$.

3.207 Stejně jako v 3.202:

a) $f(x) = e^x \sin x$,

b) $f(x) = \dfrac{e^x}{\cos x}$,

c) $f(x) = 2^x$,

d) $f(x) = x^3 - 3^x$,

e) $f(x) = e^{-x^2}$,

f) $f(x) = e^{\sqrt{1+x}}$,

g) $f(x) = \sqrt{1 + e^x}$,

h) $f(x) = \dfrac{1 + e^x}{1 - e^x}$,

i) $f(x) = 3^{\sin x}$,

j) $f(x) = a^x x^a$, $a > 0$,

k) $f(x) = (x^2 + 1)^{\sin x}$,

l) $f(x) = x^{x^2}$,

m) $f(x) = (\ln x)^x$,

n) $f(x) = \left(\dfrac{x}{1 + x}\right)^x$.

Řešení. **a)** $e^x(\sin x + \cos x)$ na R, **b)** $e^x(\cos x + \sin x)/\cos^2 x$ pro $x \neq \frac{1}{2}(2k + 1)\pi$, k libovolné celé číslo, **c)** $2^x \ln 2$ na $(0, +\infty)$, **d)** $3x^2 - 3^x \ln 3$ na $(0, +\infty)$, **e)** $-2xe^{-x^2}$ na R, **f)** $\frac{1}{2}\exp(\sqrt{1+x})(1 + x)^{-\frac{1}{2}}$ na $(-1, +\infty)$, $f'_+(-1) = +\infty$ **g)** $\frac{1}{2}e^x(1 + e^x)^{-\frac{1}{2}}$ na R, **h)** $2e^x(1 - e^x)^{-2}$ pro $x \neq 0$, **i)** $(\ln 3)\, 3^{\sin x} \cos x$ na R, **j)** $a^x x^a(ax^{-1} + \ln a)$ na $(0, +\infty)$, **k)** $(x^2 + 1)^{\sin x}(2x(x^2 + 1)^{-1} \sin x + \cos x \ln(x^2 + 1))$ na R, **l)** $x^{x^2+1}(2 \ln x + 1)$ na $(0, +\infty)$, **m)** $(\ln x)^x(\frac{1}{\ln x} + \ln \ln x)$ na $(0, +\infty)$, **n)** $\left(\frac{x}{x+1}\right)^x \left(\frac{1}{x+1} + \ln \frac{x}{x+1}\right)$ na sjednocení intervalů $(-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$.

3.208 Stejně jako v 3.202:

a) $f(x) = \dfrac{x - \sqrt{1 + x^2}}{x + \sqrt{1 + x^2}}$,

b) $f(x) = \ln \dfrac{x^2}{x^2 - 2x + 2} + \operatorname{arctg}(x - 1)$,

c) $f(x) = 2\left(\sqrt{e^x - 1} - \operatorname{arctg} \sqrt{e^x - 1}\right)$,

d) $f(x) = \sqrt{1 + 2x - x^2} - \arcsin \dfrac{x - 1}{\sqrt{2}}$,

e) $f(x) =$

$\ln\left(\sin x + \sqrt{1+\sin^2 x}\right)$,

f) $f(x) = x \arcsin\sqrt{\dfrac{x}{1+x}}$
$+\operatorname{arctg}\sqrt{x} - \sqrt{x}$,

g) $f(x) = x \operatorname{arctg}\dfrac{x-1}{x+1}$
$-\dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)$.

Řešení. a) $2(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}(x+\sqrt{1+x^2})^{-2}$ na R, b) $(4-x)/\left(x(x^2-2x+2)\right)$ pro všechny body různé od nuly, c) $\sqrt{e^x-1}$ na $(0,+\infty)$, $f'_+(0) = 0$, d) $\frac{-x}{\sqrt{1+2x-x^2}}$ na $(1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2})$, $f'_+(1-\sqrt{2}) = +\infty$, $f'_-(1+\sqrt{2}) = -\infty$, e) $(\cos x)/\sqrt{1+\sin^2 x}$ na celé reálné ose f) $\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}$ na $(0,+\infty)$, $f'_+(0) = 0$, g) $\operatorname{arctg}\frac{x-1}{x+1}$ na $R - \{-1\}$.

3.209 Najděte funkci f'', jestliže

a) $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$,

b) $f(x) = \dfrac{1}{x}\exp\left(\dfrac{1}{x}\right)$,

c) $f(x) = x\sqrt{1+x^2}$,

d) $f(x) = (x^2+x+1)\ln x$.

Řešení. a) $4(1+x)^{-3}$ na $R - \{-1\}$, b) $(2x^2+4x+1)\exp(\frac{1}{x})\,x^{-5}$ pro body různé od nuly, c) $\frac{x(3+2x^2)}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$ na celé reálné ose, d) $3 + x^{-1} - x^{-2} + 2\ln x$ na $(0,+\infty)$.

3.210 Vypočtěte $f^{(n)}$, je-li

a) $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$,

b) $f(x) = xe^x$.

Řešení. a) $(-1)^n\, n!\,(1+x)^{-n-1}$ na $R - \{-1\}$, b) $(n+x)e^x$ na R.

3.211 Vypočtěte pátou a sedmou derivaci funkcí

$f(x) = \sin x$ a $g(x) = \cos x$.

Řešení. $f^{(5)}(x) = \cos x$, $f^{(7)}(x) = -\cos x$, $g^{(5)}(x) = -\sin x$, $g^{(7)}(x) = \sin x$.

3. Diferenciál funkce.

3.301. Nechť $f(x) = 2x^2 - x + 1$. Vypočítejte a navzájem porovnejte hodnotu přírůstku

$\Delta f(x_0, h) \equiv f(x_0+h) - f(x_0)$

a diferenciálu $df(x_0, h)$, jestliže

a) x_0, h jsou libovolné hodnoty,

b) $x_0 = 3$, $h = -0{,}1$.

Řešení. a) $\Delta f(x_0,h) = (4x_0-1)h + 2h^2$, $df(x_0,h) = (4x_0-1)h$, b) $\Delta f(3;-0{,}1) = -1{,}08$, $df(3;-0{,}1) = -1{,}1$.

3.302. Vypočítejte přírůstek a diferenciál funkce $f(x)$ v daném bodě x_0 pro daný přírůstek Δx:

a) $f(x) = 2x^3 - 4$, $x_0 = 2$, $\Delta x = 1$; $\Delta x = 0{,}1$; $\Delta x = 0{,}01$;

b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, $x_0 = -1$, $\Delta x = -0{,}02$;

c) $f(x) = e^x$ $x_0 = 0$, $\Delta x = -0{,}15$;

d) $f(x) = x^2$, $x_0 = 1$, $\Delta x = 0{,}1$; $\Delta x = 0{,}001$.

Řešení.
a) $\Delta f(2;1) = 38$; $df(2;1) = 24$; $\Delta f(2;0{,}1) = 2{,}522$; $df(2;0{,}1) = 2{,}4$; $\Delta f(2;0{,}01) = 0{,}241202$; $df(2;0{,}01) = 0{,}24$; **b)** $\Delta f \doteq -0{,}03883$; $df = -0{,}04$; **c)** $\Delta f \doteq -0{,}13929$; $df = -0{,}15$; **d)** $\Delta f = 0{,}21$; $df = 0{,}2$; $\Delta f = 0{,}002001$; $df = 0{,}002$.

3.303. Vypočítejte $df(x_0, h)$, je-li
a) $f(x) = 2x^3$, $x_0 = 1$, $h = 0{,}1$;
b) $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $x_0 = 1$, $h = -0{,}1$;
c) $f(x) = \sin x$, $x_0 = \frac{1}{4}\pi$, $h = \frac{1}{180}\pi$.

Řešení. a) $0{,}6$; **b)** $-0{,}05$; **c)** $\frac{\sqrt{2}}{360}\pi$.

3.304. Vypočítejte $df(x_0, h)$ v bodech x_0, které patří do $D(f')$, je-li
a) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$,
b) $f(x) = x^2 \cos 3x$,
c) $f(x) = \arcsin \dfrac{1}{x}$,
d) $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$.

Řešení.
a) $(1 + x_0)^{-\frac{1}{2}}(1 - x_0)^{-\frac{3}{2}}h$ pro $x_0 \in (-1, 1)$, **b)** $(2\cos 3x_0 - 3x_0 \sin 3x_0)x_0 h$ pro $x_0 \in R$, **c)** $\frac{-h}{x_0\sqrt{x_0^2-1}}$ pro $x_0 \in (1, +\infty)$, $\frac{h}{x_0\sqrt{x_0^2-1}}$ pro $x_0 \in (-\infty, -1)$, **d)** $\frac{h}{\sqrt{x_0^2+1}}$ pro $x_0 \in R$.

3.305. Vypočítejte přibližně užitím diferenciálu a porovnejte s hodnotou vypočtenou pomocí kalkulačky:
a) $\sqrt[10]{e}$, b) $(1{,}03)^4$,
c) $\arccos 0{,}2$, d) $\ln 1{,}1$,
e) $\sin 29°$, f) $\sqrt{80}$.

Řešení. Hodnota získaná pomocí diferenciálu v úloze **a)** $= 1{,}1$; **b)** $= 1{,}12$; **c)** $= \frac{1}{10}(5\pi - 2) \doteq 1{,}37$; **d)** $= 0{,}1$; **e)** $= \frac{1}{2} - \frac{1}{360}\pi\sqrt{3} \doteq 0{,}48$; **f)** $= 9 - \frac{1}{18} \doteq 8{,}94$.

3.406. a) Užitím diferenciálu odvoďte přibližný vztah $(a > 0)$
$$\sqrt{a^2 + x} \doteq a + \frac{x}{2a}$$
a vypočítejte s jeho pomocí $\sqrt{16{,}06}$.
b) Oč se přibližně změní tlak jednoho molu ideálního plynu při adiabatickém ději ($PV^\kappa = c$), změní-li se objem o ΔV?
c) Zjistěte s jakou procentuální chybou je určen stejnosměrný proud $I = E/R$, je-li odpor změřen s přesností 0,5 %?
d) Poloměr koule se z hodnoty R změní o ΔR. Zjistěte přesně a přibližně (užitím diferenciálu), oč se změní (i) objem koule, (ii) povrch koule.
e) Dokažte, že relativní chyba výpočtu objemu koule je přibližně třikrát větší než relativní chyba měření průměru koule.
f) S jakou relativní chybou je nutno měřit stranu čtverce, abychom jeho obsah mohli určit s přesností 1 %?

Řešení.
a) $\doteq 4{,}0075$, **b)** $-\kappa c V^{-\kappa-1}\Delta V$, **c)** 0,5 %, **d)** (i) přesně o $4\pi R^2(\Delta R) + 4\pi R(\Delta R)^2 + \frac{4}{3}\pi(\Delta R)^3$, přibližně o $4\pi R^2 \Delta R$, (ii) přesně o $8\pi R(\Delta R) +$

$4\pi(\Delta R)^2$, přibližně o $8\pi R\Delta R$. **f)** 0,5 %.

4. **Užití derivace.**

3.401. Zjistěte, zda daná funkce splňuje na zadaných intervalech předpoklady Lagrangeovy (případně Rolleovy) věty. Najděte příslušné body $\xi \in (a, b)$, pro které je

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)$$

(resp. $f'(\xi) = 0$):

a) $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$, $\langle a, b\rangle = \langle -2, 2\rangle$,

b) $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$, $\langle a, b\rangle = \langle \frac{1}{2}, 2\rangle$,

c) $f(x) = x^3 + 4x^2 - 7x - 10$, $\langle a, b\rangle = \langle -1, 2\rangle$,

d) $f(x) = x\sqrt{x}$, $\langle a, b\rangle = \langle 0, 9\rangle$,

e) $f(x) = 8 - |x|$, $\langle a, b\rangle = \langle -3, 3\rangle$,

f) $f(x) = \ln x$, $\langle a, b\rangle = \langle 1, e\rangle$.

Řešení. a) $\xi^2 = \frac{1}{2}(\sqrt{65}-7)$ **b)** $\xi = 1$, **c)** $\xi = \frac{1}{3}(-4 \pm \sqrt{37})$, **d)** $\xi = 4$, **e)** nesplňuje předpoklady, nemá v bodě $x = 0$ derivaci, **f)** $\xi = e - 1$.

3.402. a) Na grafu funkce $f(x) = x^3$ najděte body, kde je tečna rovnoběžná s přímkou spojující body $A(-1, -1)$ a $B(2, 8)$ křivky $y = f(x)$.

b) Na grafu funkce $f(x) = \ln(1 + x + x^2)$ pro $x \in \langle -1, 1\rangle$ najděte body, kde je tečna rovnoběžná s osou x.

Řešení. a) $x = \pm 1$, **b)** $x = -\frac{1}{2}$.

3.403. Dráha přímočarého pohybu je dána jako funkce času, tj. $s = f(t)$; nechť f splňuje na intervalu $\langle t_1, t_2\rangle$ předpoklady Lagrangeovy věty. Vysvětlete fyzikální smysl této věty.

Řešení. Existuje $t_0 \in (t_1, t_2)$, ve kterém okamžitá rychlost $f'(t_0)$ je rovna průměrné rychlosti

$$\frac{f(t_2)-f(t_1)}{t_2-t_1}.$$

3.404. Pomocí věty o střední hodnotě dokažte následující nerovnosti:

a) pro všechna $x > 0$ platí
$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x,$$

b) pro všechna $x, y \in R$ platí
$$|\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y| \leq |x - y|,$$

c) pro všechna $x, y \in R$ platí
$$|\sin x - \sin y| \leq |x - y|,$$

d) pro všechna $x \in R - \{0\}$ platí
$$e^x > 1 + x.$$

3.405. Užitím derivace dokažte, že

a) pro $x \in \langle -1, 1\rangle$ je
$$\arcsin x + \arccos x = \tfrac{1}{2}\pi,$$

b) pro $x > 0$ (resp. $x < 0$) je hodnota výrazu
$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \tfrac{1}{x}$$
rovna $\frac{1}{2}\pi$ (resp. $-\frac{1}{2}\pi$),

c) funkce, která bodům $x \in \langle 0, \frac{1}{4}\rangle$ přiřazuje hodnotu
$$\arcsin \sqrt{1-4x} + \frac{1}{2}\arcsin(8x - 1),$$
je na daném intervalu konstantní. Určete hodnotu této konstanty.

Řešení. c) $\frac{1}{4}\pi$.

3.406. a) Dokažte, že rovnice $x^3 - 3x + c = 0$ nemůže mít v intervalu $\langle 0,1\rangle$ dva různé kořeny.
b) Bez počítání derivace funkce
$f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$
vyšetřete, kolik reálných kořenů má rovnice $f'(x) = 0$ a ukažte intervaly, ve kterých leží.

Řešení. a) Užijte Rolleovu větu. b) Tři kořeny, které leží v intervalech $(1,2)$, $(2,3)$ a $(3,4)$.

5. L'Hospitalovo pravidlo.

3.501. Vypočítejte (typ „$\frac{0}{0}$"):

a) $(a > 0)$
$$\lim_{x\to a} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{a}}{\sqrt{x} - \sqrt{a}},$$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x - \operatorname{tg} x},$

c) $a \in R$, $m, n \in N$, $n < m$,
$$\lim_{x\to a} \frac{x^m - a^m}{x^n - a^n},$$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin 2x - 2\arcsin x}{x^3},$

e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\exp(x^2) - 1}{\cos x - 1},$

f) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x \cos x},$

g) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x + \ln(x+1)}{2x - \ln(x+1)}.$

Řešení. a) $2/(3\sqrt[6]{a})$, b) $-\frac{1}{2}$, c) $\frac{m}{n}a^{m-n}$, d) 1, e) -2, f) 2, g) 2.

3.502. Vypočítejte (typ „$\frac{\infty}{\infty}$"):

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0_+} \frac{\ln \sin 2x}{\ln \sin x},$

b) $\displaystyle\lim_{x\to \frac{1}{2}\pi} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} x},$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0_+} \frac{\ln x}{\ln \sin x},$

d) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(x^2 + x + 1)}{\ln(3x^2 - 2)},$

e) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(x^2 + 1)}{\ln(x^3 + 2)}.$

Řešení. a) 1, b) $\frac{1}{3}$, c) 1, d) 1, e) $\frac{2}{3}$.

3.503. Vypočítejte (typ „$0 \cdot \infty$"):

a) $(a \in R)$
$$\lim_{x\to +\infty} x \sin\frac{a}{x},$$

b) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x(e^{\frac{1}{x}} - 1),$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} x^2 \exp\left(\frac{1}{x^2}\right),$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 1_-} \ln x \ln(1-x),$

e) $\displaystyle\lim_{x\to 0_+} \sqrt[3]{x}\, \ln x,$

f) $(n \in N)$
$$\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x} \ln^n x.$$

Řešení. a) a, b) 1, c) $+\infty$, d) 0, e) 0, f) 0.

3.504. Spočítejte (typ „$f(x)^{g(x)}$"):

a) $\displaystyle\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}},$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0_+} \left(\ln\frac{1}{x}\right)^x,$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{\arcsin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}},$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}},$

e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} (e^x + x)^{\frac{1}{x}},$

f) $\lim\limits_{x\to 0_+} \left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x}$,

g) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(1+\frac{1}{x^2}\right)^x$.

Řešení. a) e^{-1}, b) 1, c) $e^{\frac{1}{3}}$, d) $e^{-\frac{1}{6}}$, e) e^2, f) 1, g) 1.

3.505. Spočítejte (typ „$\infty - \infty$"):

a) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right)$,

b) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right)$,

c) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{\arcsin x} - \frac{1}{\sin x}\right)$,

d) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\frac{1}{2\ln x} - \frac{1}{x^2-1}\right)$.

Řešení. a) $\frac{1}{2}$, b) $\frac{1}{2}$, c) 0, d) $\frac{1}{2}$.

3.506. Spočítejte:

a) $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln x\ (\pi - 2\operatorname{arctg} x)$,

b) $\lim\limits_{x\to 0_+} (\cos\sqrt{x})^{\frac{1}{x}}$,

c) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2}$,

d) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{4}\pi} \left(\operatorname{tg} x\right)^{\operatorname{tg} 2x}$,

e) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sin\frac{1}{x} + \cos\frac{1}{x}\right)^x$,

f) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$,

g) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln(x^2-x+1)}{\ln(x^{10}+x+1)}$.

Řešení. a) 0, b) $e^{-\frac{1}{2}}$, c) e^3, d) e^{-1}, e) e, f) $e^{\frac{3}{2}}$, g) $\frac{1}{5}$.

3.507. Zjistěte, zda je možné při výpočtu následujících limit použít l'Hospitalova pravidla:

a) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x+\sin x}{x}$,

b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$,

c) $\lim\limits_{x\to 1_-} \frac{1}{(x^2-1)^2} \exp\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)$,

d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{\sin x}$.

3.508. Ukažte, že ($n \in Z$)

$$\lim_{x\to 0_+} \frac{1}{x^n} \exp\left(-\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Řešení. Substitucí $x = 1/t$ limitu převedeme na výpočet limity

$$\lim_{t\to +\infty} \frac{t^n}{e^t}.$$

Pro $n \le 0$ je věc jasná. Pro $n > 0$ použijeme (třeba vícekrát) l'Hospitalovo pravidlo.

3.509. a) Buď funkce f spojitá v bodě a zprava. Nechť existuje

$$\lim_{x\to a_+} f'(x) = A \quad (A \in R, \pm\infty).$$

Potom derivace funkce f v bodě a zprava je rovna A. Dokažte.

b) Vyslovte a dokažte podobné tvrzení pro derivaci zleva.

c) Najděte pomocí a) derivaci funkce $x \to \sqrt[3]{x^2}$ v bodě $x = 0$ zprava a zleva .

d) Najděte pomocí a) derivaci funkce

$$x \to \sqrt{\frac{x^2+\ln(1+x^2)}{1+x^2}}$$

v bodě $x = 0$ zprava a zleva a načrtněte průběh této funkce. Spočítejte jednostranné derivace v bodě 0 také z definice. Co je jednodušší?

e) Definujme na R funkci předpisem

$$\varphi(x) = \begin{cases} \exp\Bigl(-\dfrac{1}{x}\Bigr) & \text{pro } x > 0 \\ 0 & \text{pro } x \le 0 \end{cases}.$$

Dokažte, že funkce φ má první derivaci na R. Dokažte, že funkce φ má na R derivace dokonce všech řádů.
f) Nepochybně se setkáte s Diracovou δ-funkcí (teorie distribucí a parciální diferenciální rovnice) a budete potřebovat funkci, kterou nazveme ψ a definujeme vztahem

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-x^2}} & \text{pro } |x| < 1 \\ 0 & \text{pro } |x| \ge 1 \end{cases}.$$

Je zřejmé, že $\psi(x) \neq 0$ pouze pro $x \in (-1, 1)$ a lze dokázat (analogicky jako v předchozím případě), že funkce ψ má derivace všech řádů na celé reálné ose.

Řešení. **a)** Derivace v bodě a zprava se rovná

$$\lim_{x \to a_+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Spojitost funkce f v bodě a zprava znamená, že lze použít l'Hospitalova pravidla. A tím se důkaz dokončí. **c)** Derivace v bodě $x = 0$ zprava (resp. zleva) je $+\infty$ (resp. $-\infty$). **d)** Derivace v bodě $x = 0$ zprava (resp. zleva) je $\sqrt{2}$ (resp. $-\sqrt{2}$). **e)** Existence derivace je nejasná pouze v bodě $x = 0$. Všechny derivace zleva jsou v tomto bodě rovny 0. Pro $x > 0$ je

$$\varphi'(x) = \frac{1}{x^2} \exp\Bigl(-\frac{1}{x}\Bigr)$$

a podle 3.508 je $\lim_{x \to 0_+} \varphi'(x) = 0$. Podle tvrzení uvedeného v části a) je derivace zprava funkce φ v bodě 0 rovna 0. Derivace tedy existuje ve všech bodech R. Při důkazu existence vyšších derivací postupujeme podobně. **f)** Důkaz probíhá stejně jako v předchozím případě.

6. Průběhy funkcí.

Úlohy v této sekci se zaměřují na studium funkcí. Vyšetřete průběh:

3.601.

$$f(x) = \frac{x^3}{(x-2)^2}.$$

Řešení.
1. $D(f) = R - \{2\}$ (neboť ve jmenoveteli nesmí být nula).
2. Funkce f je spojitá v $D(f)$ a má dokonce derivace všech řádů na $D(f)$, $f(x) = 0$ právě pro $x = 0$, $\operatorname{sgn} f(x) = \operatorname{sgn} x$.
3. Limity funkce v krajních bodech definičních intervalů jsou:
   $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$,
   $\lim_{x \to 2} f(x) = +\infty$.
4. Intervaly, na nichž je f monotonní a body, v nichž jsou extrémy:

Funkce f nemá absolutní extrémy (protože její limita v bodě $+\infty$ ($-\infty$) je $+\infty$ ($-\infty$)). Pro $x \in D(f)$ je

$$f'(x) = \frac{x^2(x-6)}{(x-2)^3}.$$

Proto $f'(x) = 0$ právě pro $x \in \{0, 6\}$. V $(-\infty, 0)$ je $f'(x) > 0$, tedy f je rostoucí v $(-\infty, 0\rangle$; v $(0, 2)$ je $f'(x) > 0$, tedy f je rostoucí v $\langle 0, 2)$;

funkce f je tedy rostoucí v $(-\infty, 2)$ a v bodě $x = 0$ není lokální extrém; v $(2, 6)$ je $f'(x) < 0$, tedy f je klesající v $(2, 6\rangle$; v $(6, +\infty)$ je $f'(x) > 0$, tedy f je rostoucí v $\langle 6, +\infty)$; v bodě $x = 6$ je ostré lokální minimum (f(6)=13,5);

5. Intervaly, na nichž je funkce konvexní nebo konkávní; inflexní body:

Pro $x \in D(f)$ je

$$f''(x) = \frac{24x}{(x-2)^4}.$$

V $(-\infty, 0)$ je $f''(x) < 0$, tedy f je konkávní v $(-\infty, 0\rangle$; v $(0, 2)$ je $f''(x) > 0$, tedy f je konvexní v $\langle 0, 2)$; bod $x = 0$, $y = 0$ je inflexní bod, tečna v tomto bodě je osa x; v $(2, +\infty)$ je $f''(x) > 0$, tedy f je konvexní v $(2, +\infty)$.

6. Asymptoty grafu funkce:

a) Přímka $x = 2$ je svislou asymptotou.

b) Asymptotou v $\pm\infty$ (2.301) je přímka $y = a_{\pm}x + b_{\pm}$, kde

$$a_{\pm} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1,$$

$$b_{\pm} = \lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - ax) = 4.$$

Přímka $y = x+4$ je šikmou asymptotou v obou nevlastních bodech.

3.602.

a) $f(x) = (x+1)(x-2)^2$,

b) $f(x) = (x^2-1)^2$,

c) $f(x) = x^4 - 6x^2 + 5$,

d) $f(x) = x^3(x-3)^2$.

Řešení.

a) $D(f) = R$, f je spojitá v $D(f)$, $f(x) = 0$ právě pro $x = -1, 2$,

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty,$$

f je klesající v $\langle 0, 2\rangle$, rostoucí v $(-\infty, 0\rangle$ a v $\langle 2, +\infty)$, v $x = 0$ je ostré lok. maximum ($f(0) = 4$), v $x = 2$ ostré lok. minimum ($f(2) = 0$), f je konvexní v $\langle 1, +\infty)$, konkávní v $(-\infty, 1\rangle$, inflexní bod s $x = 1$, $f'(1) = -3$.

b) $D(f) = R$, f je sudá a spojitá v $D(f)$, $f(x) \geq 0$ na R, $f(x) = 0$ právě pro $x = \pm 1$ (body abs. minima),

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty,$$

f je klesající v $(-\infty, -1\rangle$ a v $\langle 0, 1\rangle$, rostoucí v $\langle -1, 0\rangle$ a v $\langle 1, +\infty)$, v $x = 0$ je ostré lok. maximum ($f(0) = 1$), funkce f je konvexní v intervalech $(-\infty, -\frac{1}{3}\sqrt{3}\rangle$ a $\langle \frac{1}{3}\sqrt{3}, +\infty)$, konkávní v $\langle -\frac{1}{3}\sqrt{3}, \frac{1}{3}\sqrt{3}\rangle$, dva inflexní body s $x = \pm\frac{1}{3}\sqrt{3}$.

c) $D(f) = R$, f je sudá a spojitá v $D(f)$, $f(x) = 0$ právě pro $x = \pm 1, \pm\sqrt{5}$,

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty,$$

$f(0) = 5$, funkce f má na intervalu $\langle 0, +\infty)$ tyto vlastnosti: je klesající v $\langle 0, \sqrt{3}\rangle$, rostoucí v $\langle \sqrt{3}, +\infty)$, v $x = \sqrt{3}$ je ostré abs. minimum ($f(\sqrt{3}) = -4$), v $x = 0$ ostré lok. maximum, f je konvexní v $\langle 1, +\infty)$, konkávní v $\langle 0, 1\rangle$, inflexní bod s $x = 1$, $f'(1) = -8$.

d) $D(f) = R$, f je spojitá v $D(f)$, $f(x) = 0$ právě pro $x \in \{0, 3\}$,

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty,$$

f je rostoucí v $(-\infty, \frac{9}{5}\rangle$ a v $\langle 3, +\infty)$, klesající v $\langle \frac{9}{5}, 3\rangle$, v $x = \frac{9}{5}$ je ostré lok. maximum ($f(\frac{9}{5}) \doteq 8{,}4$), v $x = 3$ ostré lok. minimum ($f(3) = 0$), tři inflexní body s x-ovými souřadnicemi $x_0 = 0$ ($f(0) = 0$, $f'(0) = 0$),

$x_1 \doteq 1{,}065$ ($f(x_1) \doteq 4{,}5$, $f'(x_1) \doteq 8$), $x_2 \doteq 2{,}535$ ($f(x_2) \doteq 3{,}5$, $f'(x_2) \doteq -11$), funkce f je konvexní v $\langle 0, x_1\rangle$ a v $\langle x_2, +\infty)$, konkávní v $(-\infty, 0\rangle$ a v $\langle x_1, x_2\rangle$.

3.603.

a) $f(x) = x - \dfrac{1}{x}$,

b) $f(x) = x + \dfrac{1}{x^2}$,

c) $f(x) = \dfrac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$,

d) $f(x) = \dfrac{x^3}{3 - x^2}$.

Řešení.

a) $D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, f je lichá a spojitá v $D(f)$, $f(x) = 0$ právě pro $x = \pm 1$,

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$,
$\lim_{x\to 0_+} f(x) = -\infty$,
$\lim_{x\to 0_-} f(x) = +\infty$,

funkce f je rostoucí v $(-\infty, 0)$ i v $(0, +\infty)$, konvexní v $(-\infty, 0)$, konkávní v $(0, +\infty)$, asymptota v $\pm\infty$ je $y = x$.

b) $D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, f je spojitá v $D(f)$, $f(x) = 0$ právě pro $x = -1$,

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$,
$\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$,

f je klesající v $(0, \sqrt[3]{2}\rangle$, rostoucí v $(-\infty, 0)$ a v $\langle\sqrt[3]{2}, +\infty)$, v $x = \sqrt[3]{2}$ je ostré lok. minimum ($f(\sqrt[3]{2}) \doteq 1{,}89$), funkce f je konvexní v $(-\infty, 0)$ i v $(0, +\infty)$, asymptota v $\pm\infty$ je $y = x$.

c) $D(f) = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$, f je spojitá v $D(f)$, $f(x) = 0$ právě pro $x = 1$,

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$,
$\lim_{x\to -1} f(x) = -\infty$,

$f'(x) = 0$ právě pro $x \in \{1, -5\}$, f je rostoucí v $(-\infty, -5\rangle$ a v $(-1, +\infty)$, klesající v $\langle -5, -1)$, v $x = -5$ je ostré lok. maximum ($f(-5) = -\frac{27}{2}$), f je konkávní v $(-\infty, -1)$ a v $(-1, 1\rangle$, konvexní v $\langle 1, +\infty)$, jeden inflexní bod s $x = 1$, $f'(1) = 0$, asymptota v $\pm\infty$ je $y = x - 5$.

d) $D(f) = R - \{\pm\sqrt{3}\}$, f je lichá a spojitá v $D(f)$, $f(x) = 0$ právě pro $x = 0$,

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \mp\infty$,
$\lim_{x\to\sqrt{3}\pm} f(x) = \mp\infty$,
$\lim_{x\to-\sqrt{3}\pm} f(x) = \mp\infty$,

$f'(x) = 0$ právě pro $x \in \{0, \pm 3\}$, funkce f je klesající v $(-\infty, -3\rangle$ a v $\langle 3, +\infty)$, rostoucí v $\langle -3, -\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ a v $(\sqrt{3}, 3\rangle$, v $x = -3$ je ostré lok. minimum ($f(-3) = 4{,}5$), v $x = 3$ je ostré lok. maximum ($f(3) = -4{,}5$), inflexní bod s $x = 0$, f je konvexní v $(-\infty, -\sqrt{3})$ a v $\langle 0, \sqrt{3})$, konkávní v $(-\sqrt{3}, 0\rangle$ a v $(\sqrt{3}, +\infty)$, asymptota v $\pm\infty$ je $y = -x$.

3.604.

a) $f(x) = \sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{(x-1)^2}$,

b) $f(x) = x\sqrt{3 - x}$,

c) $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x^2}{x+1}}$.

Řešení.

a) $D(f) = R$, f je lichá a spojitá v $D(f)$, $f(x) = 0$ právě pro $x = 0$,

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$,

na intervalu $\langle 0, +\infty)$ má funkce f tyto vlastnosti: je rostoucí v $\langle 0, 1\rangle$, klesající v $\langle 1, +\infty)$, v $x = 1$ má ostré abs. maximum ($f(1) = \sqrt[3]{4}$), v $x = 1$ neexistuje derivace ($f'_-(1) = +\infty$, $f'_+(1) = -\infty$); f je konvexní v $\langle 0, 1\rangle$ a v $\langle 1, +\infty)$; inflexní bod s $x = 0$, $f'(0) = \frac{3}{4}$ (v $x = -1$ ostré abs. minimum, $f(-1) = -f(1)$).

b) $D(f) = (-\infty, 3\rangle$, f je spojitá v $D(f)$, $f(x) = 0$ právě pro $x \in \{0, 3\}$,

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$,

$f'(x) = 0$ právě pro $x = 2$, f je rostoucí v $(-\infty, 2\rangle$, klesající v $\langle 2, 3\rangle$, v $x = 2$ je ostré abs. maximum ($f(2) = 2$), $f'_-(3) = -\infty$, funkce f je konkávní v $D(f)$.

c) $D(f) = R - \{-1\}$, f je spojitá v $D(f)$, $f(x) = 0$ právě pro $x = 0$,

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$,

$\lim_{x\to-1_-} f(x) = -\infty$,

$\lim_{x\to-1_+} f(x) = +\infty$,

$f'(x) = 0$ právě pro $x = -2$, v $x = 0$ derivace neexistuje ($f'_-(0) = -\infty$, $f'_+(0) = +\infty$), f je rostoucí v $(-\infty, -2\rangle$ a v $\langle 0, +\infty)$, klesající v $\langle -2, -1)$ a v $(-1, 0\rangle$, v $x = -2$ ostré lok. maximum ($f(-2) = -\sqrt[3]{4}$), v $x = 0$ ostré lok. minimum ($f(0) = 0$), dva inflexní body (x_1, y_1) a (x_2, y_2):

$x_1 = -2 + \sqrt{3}$, $y_1 = \sqrt[3]{\frac{1}{2}(\sqrt{27} - 5)}$,

$x_2 = -2 - \sqrt{3}$, $y_2 = -\sqrt[3]{\frac{1}{2}(\sqrt{27} + 5)}$,

f je konvexní v $(-\infty, x_2\rangle$ a v $(-1, x_1\rangle$, konkávní v $\langle x_2, -1)$, $\langle x_1, 0\rangle$ a v $\langle 0, +\infty)$.

3.605.

a) $f(x) = x \ln x$,

b) $f(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$,

c) $f(x) = x + \ln \cos x$.

Řešení.

a) $D(f) = (0, +\infty)$, f je spojitá v $D(f)$, $f(x) = 0$ právě pro $x = 1$,

$\lim_{x\to 0_+} f(x) = 0$,

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$,

$f'(x) = 0$ právě pro $x = e^{-1}$, f je klesající v $(0, e^{-1}\rangle$, rostoucí v $\langle e^{-1}, +\infty)$, v $x = e^{-1}$ je ostré lok. (i abs.) minimum ($f(e^{-1}) = -e^{-1} \doteq -0{,}37$), f je konvexní v $(0, +\infty)$, $\lim_{x\to 0_+} f'(x) = -\infty$.

b) $D(f) = (0, +\infty)$, f je spojitá v $D(f)$, $f(x) = 0$ právě pro $x = 1$, $\lim_{x\to 0_+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, $f'(x) = 0$ právě pro $x = e^2$, f je rostoucí v $(0, e^2\rangle$, klesající v $\langle e^2, +\infty)$, v $x = e^2 \doteq 7{,}39$ je ostré lok. (i abs.) maximum ($f(e^2) = 2e^{-1} \doteq 0{,}74$), $f''(x) = 0$ právě pro $x = e^{\frac{8}{3}} \doteq 14{,}39$, f je konkávní v $(0, e^{\frac{8}{3}}\rangle$, konvexní v $\langle e^{\frac{8}{3}}, +\infty)$; inflexní bod s $x = e^{\frac{8}{3}}$, $f(e^{\frac{8}{3}}) \doteq 0{,}7$, $f'(e^{\frac{8}{3}}) \doteq -0{,}006$.

c)

$$D(f) = \bigcup_{k\in Z} (-\tfrac{1}{2}\pi + 2k\pi, \tfrac{1}{2}\pi + 2k\pi),$$

f je spojitá v $D(f)$ a $f(2k\pi) = 2k\pi$ pro všechna celá k,

$\lim_{x\to(-\frac{1}{2}\pi+2k\pi)_+} f(x) = -\infty$,

$\lim_{x\to(\frac{1}{2}\pi+2k\pi)_-} f(x) = -\infty$,

$f'(x) = 0$ právě pro $x = \frac{1}{4}\pi + 2k\pi$, funkce f je rostoucí v intervalech $(-\frac{1}{2}\pi + 2k\pi, \frac{1}{4}\pi + 2k\pi\rangle$ a klesající v $\langle\frac{1}{4}\pi + 2k\pi, \frac{1}{2}\pi + 2k\pi)$, v $x = \frac{1}{4}\pi + 2k\pi$ je ostré lok. maximum ($f(\frac{1}{4}\pi + 2k\pi) = \frac{1}{4}\pi + 2k\pi + \ln \frac{1}{2}\sqrt{2}$), funkce f je konkávní v intervalech

$(-\frac{1}{2}\pi+2k\pi, \frac{1}{2}\pi+2k\pi)$, $f'(2k\pi)=1$ (graf má v bodech $(2k\pi, 2k\pi)$ tečnu $y=x$).

3.606.

a) $f(x) = \exp\left(\dfrac{1}{x}\right)$,

b) $f(x) = \dfrac{1}{e^x - 1}$,

c) $f(x) = e^{\operatorname{tg} x}$,

d) $f(x) = \exp\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)$,

e) $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$.

Řešení.

a) $D(f) = R - \{0\}$, f je spojitá a kladná v $D(f)$,

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 1$,
$\lim_{x\to 0_+} f(x) = +\infty$,
$\lim_{x\to 0_-} f(x) = 0$,

f je klesající v $(-\infty, 0)$ i v $(0,+\infty)$, f je konkávní v $(-\infty, -\frac{1}{2}\rangle$, konvexní v $\langle -\frac{1}{2}, 0)$ a v $(0,+\infty)$, inflexní bod s $x = -\frac{1}{2}$, $f(-\frac{1}{2}) = e^{-2} \doteq 0{,}135$, $f'(-\frac{1}{2}) = -4e^{-2} \doteq 0{,}541$, $\lim_{x\to 0_-} f'(x) = 0$.

b) $D(f) = R - \{0\}$, f je spojitá v celém definičním oboru,

$\lim_{x\to -\infty} f(x) = -1$,
$\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0$,
$\lim_{x\to 0_+} f(x) = +\infty$,
$\lim_{x\to 0_-} f(x) = -\infty$,

f je klesající v $(-\infty, 0)$ i v $(0,+\infty)$, f je konkávní v intervalu $(-\infty, 0)$ a konvexní v intervalu $(0,+\infty)$.

c) $D(f) = R - \{\frac{1}{2}(2k+1)\pi;\ k\in Z\}$, f je spojitá a kladná funkce v $D(f)$, která je periodická s periodou π na $D(f)$, na intervalu $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ má tyto vlastnosti:

$\lim_{x\to -\frac{1}{2}\pi_+} f(x) = 0$,
$\lim_{x\to \frac{1}{2}\pi_-} f(x) = +\infty$,

funkce f je rostoucí a konvexní v intervalu $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$.

d) $D(f) = R - \{\pm 1\}$, f je sudá, spojitá a kladná v $D(f)$,

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = e$,
$\lim_{x\to 1_-} f(x) = 0$,
$\lim_{x\to -1_+} f(x) = 0$,
$\lim_{x\to 1_+} f(x) = +\infty$,
$\lim_{x\to -1_-} f(x) = +\infty$,

f je rostoucí v $(-\infty, -1)$ a v $(-1, 0\rangle$ a je klesající v $\langle 0, 1)$ a v $(1,+\infty)$, v $x = 0$ je ostré lok. maximum ($f(0) = e^{-1}$), f je konvexní v $(-\infty,-1)$, $(1,+\infty)$, $(-1, -\frac{1}{3}\sqrt{3}\rangle$ a v intervalu $\langle \frac{1}{3}\sqrt{3}, 1)$, konkávní je v intervalu $\langle -\frac{1}{3}\sqrt{3}, \frac{1}{3}\sqrt{3}\rangle$,

$\lim_{x\to 1_-} f'(x) = 0$,
$\lim_{x\to -1_+} f'(x) = 0$,

graf má dva inflexní body se souřadnicemi $x = \pm\frac{1}{3}\sqrt{3}$, přitom je

$f(\pm\frac{1}{3}\sqrt{3}) = e^{-2} \doteq 0{,}135$,
$f'(\frac{1}{3}\sqrt{3}) = -f'(\frac{1}{3}\sqrt{3}) \doteq 0{,}7$.

e) $D(f) = R - \{0\}$ a funkce je spojitá na celém $D(f)$,

$\lim_{x\to -\infty} f(x) = 0$,
$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$,
$\lim_{x\to 0_+} f(x) = +\infty$,
$\lim_{x\to 0_-} f(x) = -\infty$,

$f'(x) = 0$ právě pro $x = 1$, f je klesající v $(-\infty, 0)$ a v $(0, 1\rangle$, rostoucí v $\langle 1, +\infty)$, v $x = 1$ je ostré lok. minimum ($f(1) = e$), funkce f je konkávní v $(-\infty, 0)$ a konvexní v $(0,+\infty)$.

3.607.

a) $f(x) = x - 2\,\mathrm{arctg}\, x$,

b) $f(x) = \arcsin \dfrac{1+x}{1-2x}$,

c) $f(x) = \mathrm{arctg}\, \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$,

d) $f(x) = \arcsin \dfrac{2x}{1+x^2}$,

e) $f(x) = \mathrm{arctg}\, \dfrac{1-x}{1+x}$.

Řešení.

a) $D(f) = R$, funkce f je spojitá a lichá v definičním oboru,

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$,

$f'(x) = 0$ právě pro $x = \pm 1$, f je rostoucí v $(-\infty, -1\rangle$ a v $\langle 1, +\infty)$, klesající v $\langle -1, 1\rangle$, v $x = -1$ je ostré lok. maximum ($f(-1) = -1 + \frac{1}{2}\pi$), v $x = 1$ je ostré lok. minimum ($f(1) = 1 - \frac{1}{2}\pi$), f je konkávní v $(-\infty, 0\rangle$ a konvexní v $\langle 0, +\infty)$, jeden inflexní bod s $x = 0$, přitom je $f(0) = 0$ a $f'(0) = -1$, asymptota v $\pm\infty$ je $y = x \mp \pi$.

b) $D(f) = (-\infty, 0\rangle \cup \langle 2, +\infty)$, f je spojitá v $D(f)$, $f(x) = 0$ právě pro $x = -1$,

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = -\frac{1}{6}\pi$,

v bodě $x = 0$ je abs. maximum ($f(0) = \frac{1}{2}\pi$), v bodě $x = 2$ je abs. minimum ($f(2) = -\frac{1}{2}\pi$), f je rostoucí a konvexní v $(-\infty, 0\rangle$, rostoucí a konkávní v $\langle 2, +\infty)$, $f'_-(0) = +\infty$ a $f'_+(2) = +\infty$.

c) $D(f) = R$, funkce f je spojitá a lichá v $D(f)$, $f(x) = 0$ právě pro $x = 0$,

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\frac{1}{4}\pi$,

f je rostoucí v $D(f)$, konvexní v $(-\infty, 0\rangle$ a konkávní v $\langle 0, +\infty)$, jeden inflexní bod s $x = 0$, přitom je $f(0) = 0$ a $f'(0) = 1$.

d) $D(f) = R$, f je lichá a spojitá v $D(f)$, $f(x) = 0$ právě pro $x = 0$, pro $\neq \pm 1$ je

$$f'(x) = \frac{2}{1+x^2}\,\mathrm{sgn}(1-x^2),$$

funkce f v bodech $x = \pm 1$ nemá derivaci,

$f'_+(1) = -1$, $f'_-(1) = 1$,

$f'_-(-1) = -1$, $f'_+(-1) = 1$,

f je klesající v $(-\infty, -1\rangle$, a v $\langle 1, +\infty)$, rostoucí v $\langle -1, 1\rangle$, v $x = -1$ je ostré lok. (i abs.) minimum ($f(-1) = -\frac{1}{2}\pi$), v $x = 1$ je ostré lok. (i abs.) maximum ($f(1) = \frac{1}{2}\pi$), f je konkávní v $(-\infty, -1\rangle$ a v $\langle 0, 1\rangle$, konvexní v $\langle -1, 0\rangle$ a v $\langle 1, +\infty)$, jeden inflexní bod s $x = 0$, přitom je $f'(0) = 2$.

e) $D(f) = R - \{-1\}$,

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = -\frac{1}{4}\pi$,

$\lim_{x\to -1_-} f(x) = -\frac{1}{2}\pi$,

$\lim_{x\to -1_+} f(x) = \frac{1}{2}\pi$,

$f(x) = 0$ právě pro $x = 1$, $f(0) = \frac{1}{4}\pi$, f je klesající v $(-\infty, -1)$ i v $(-1, +\infty)$, f je konkávní v $(-\infty, -1)$ a v $(-1, 0\rangle$, konvexní v $\langle 0, +\infty)$, jeden inflexní bod s $x = 0$, přitom je $f'(0) = 1$, kromě toho je

$\lim_{x\to -1_+} f'(x) = -\frac{1}{2}$,

$\lim_{x\to -1_-} f'(x) = -\frac{1}{2}$.

3.608.

a) $f(x) = \dfrac{\sin x}{2 + \cos x}$,

b) $f(x) = \dfrac{\cos x}{\cos 2x}$,

c) $f(x) = |x| \, e^{-|x-1|}$.

Řešení.

a) $D(f) = R$, f je spojitá a lichá v $D(f)$ a periodická s periodou 2π, na intervalu $\langle 0, \pi \rangle$ má funkce tyto vlastnosti: $f(0) = 0$, $f(\pi) = 0$, funkce f je kladná v $(0, \pi)$, $f'(x) = 0$ právě pro $x = \frac{2}{3}\pi$, f je rostoucí v $\langle 0, \frac{2}{3}\pi \rangle$, klesající v $\langle \frac{2}{3}\pi, \pi \rangle$, v $x = \frac{2}{3}\pi$ je ostré lok. (i abs.) maximum ($f(\frac{2}{3}\pi) = \frac{1}{3}\sqrt{3}$), f je konkávní v $\langle 0, \pi \rangle$, vlastnosti funkce na $\langle -\pi, 0 \rangle$ se získají, vezmeme-li v úvahu lichost funkce f – vlastnosti přecházejí v opačné, body s $x = k\pi$ jsou inflexními body, $f'(0) = \frac{1}{3}$ a $f'(\pi) = -1$.

b) $D(f) = R - \{\frac{1}{4}(2k+1)\pi; k \in Z\}$, f je spojitá a sudá v $D(f)$ a periodická s periodou 2π, na intervalu $\langle 0, \pi \rangle$ má funkce tyto vlastnosti: $f(0) = 1$ (ostré lok. minimum), $f(\pi) = -1$ (ostré lok. maximum),

$$\lim_{x \to \frac{1}{4}\pi-} f(x) = +\infty,$$

$$\lim_{x \to \frac{1}{4}\pi+} f(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x \to \frac{3}{4}\pi-} f(x) = +\infty,$$

$$\lim_{x \to \frac{1}{4}\pi+} f(x) = -\infty,$$

f je rostoucí v $\langle 0, \frac{1}{4}\pi)$, $(\frac{1}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi)$, $(\frac{3}{4}\pi, \pi \rangle$, funkce f je konvexní v intervalech $\langle 0, \frac{1}{4}\pi)$, $\langle \frac{1}{2}\pi, \frac{3}{4}\pi)$, konkávní v intervalech $(\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{2}\pi \rangle$, $(\frac{3}{4}\pi, \pi \rangle$, bod s $x = \frac{1}{2}\pi$ je inflexní bod, $f(\frac{1}{2}\pi) = 0$ a $f'(\frac{1}{2}\pi) = 1$.

c) $D(f) = R$, f je spojitá a nezáporná v $D(f)$, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$,

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0,$$

v bodech $x = 0$ a $x = 1$ nemá f derivaci ($f'_-(0) = -e^{-1}$, $f'_+(0) = e^{-1}$, $f'_-(1) = 2$, $f'_+(1) = 0$), $f'(x) = 0$ právě pro $x = -1$, v bodě $x = -1$ je ostré lok. maximum ($f(-1) = e^{-2} \doteq 0{,}135$), v bodě $x = 0$ je ostré lok. i abs. minimum ($f(0) = 0$), v bodě $x = 1$ je ostré lok. i abs. maximum ($f(1) = 1$), $f''(x) = 0$ právě pro $x = \pm 2$, funkce f je konvexní v intervalech $(-\infty, -2\rangle$, $\langle 0, 1\rangle$, $\langle 2, +\infty)$, konkávní v intervalech $\langle -2, 0\rangle$, $\langle 1, 2\rangle$, ($f(2) = 2e^{-1} \doteq 0{,}736$, $f'(2) = -e^{-1} \doteq -0{,}368$, $f(-2) = 2e^{-3} \doteq 0{,}1$, $f'(-2) = e^{-3} \doteq 0{,}05$).