1. Základní obraty, použití integrace per partes a substituce.

4.101. Nechť F je primitivní funkcí k funkci f na intervalu (a,b). Každá jiná primitivní funkce k funkci f na intervalu (a,b) se liší od funkce F pouze o konstantu. Proto budeme ve výsledcích konstantu c vynechávat.

Uvědomte si, že i při správném vyřešení úlohy můžete dostat primitivní funkci, která vypadá jinak, než výraz uvedený ve výsledcích. Například užitím jednoduché substituce dostaneme

$$\int 4\sin x\cos x\,dx = 2\sin^2 x + c_1 .$$

Jako výsledek však může být uvedena funkce $\cos 2x$, která je výsledkem výpočtu

$$\int 4\sin x\cos x\,dx = 2\int \sin 2x\,dx = -\cos 2x + c_2 .$$

Poněvadž $2\sin^2 x - 1 = -\cos 2x$, vidíme, že oba odvozené výrazy jsou správné. Ostatně derivováním se o tom snadno přesvědčíme. Vypočítat derivaci předpokládané primitivní funkce je nejlepší způsob, jak se ujistíme o správnosti výsledku.

a) Ukažte, že na $(0,+\infty)$ jsou pro

$$\int \frac{1}{x}\,dx$$

správné například tyto dva výsledky

$\ln 3x + c_1$, $\ln x + c_2$.

b) Ukažte, že na R jsou pro

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$$

správné například tyto výsledky:

$$\frac{1}{2}\ln\frac{5(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}-x} + c_1,$$

$$\ln(\sqrt{x^2+1}+x) + c_2 .$$

c) Ukažte, že na $(-1,1)$ jsou pro

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

správné oba tyto výsledky:

$\arcsin x + c_1$, $-\arccos x + c_2$.

4.102. Při počítání integrálu

$$\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x\sin^2 x}\,dx$$

postupujte dvěma způsoby:

a) Užijte $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$.

b) Užijte $\cos x\sin x = \frac{1}{2}\sin 2x$ a použijte substituce $t = \sin 2x$.

Řešení. Na každém z otevřených intervalů $(\frac{1}{2}k\pi, \frac{1}{2}(k+1)\pi)$, $k \in Z$, dostaneme: **a)** $-\operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x + C$, **b)** $-2/\sin 2x + C$.

4.103. Vypočítejte použitím základních vzorců:

a) $\int (1 - 4x^3 + e^x)\,dx$,

b) $\int (u + \sqrt{u})^2\,du$,

c) $\displaystyle\int \left(\frac{1-t}{t}\right)^2 dt$,

d) $\displaystyle\int \frac{(1-w)^2}{w\sqrt{w}}\,dw$,

e) $\int \operatorname{tg}^2\varphi\,d\varphi$,

f) $\displaystyle\int \frac{5\cdot 4^{x+1} - 2\cdot 3^{x+1}}{4^x}\,dx$,

g) (x je zadané číslo)

$$\int \frac{y^2e^y - y + x}{y^2}\,dy,$$

h) (a, b, c jsou zadaná čísla)

$$\int \left(3av^2 - \frac{6b}{v^2\sqrt{v}} + c\right) dv,$$

i)

$$\int \frac{1}{\cos 2x + \sin^2 x}\,dx,$$

j)

$$\int \frac{1 + 2x^2}{x^2(1 + x^2)}\,dx.$$

Řešení. **a)** $x - x^4 + e^x$ na R, **b)** $\frac{1}{3}u^3 + \frac{4}{5}u^2\sqrt{u} + \frac{1}{2}u^2$ na $(0, +\infty)$, **c)** $t - 2\ln|t| - 1/t$ na intervalech $(-\infty, 0)$ a $(0, +\infty)$, **d)** $(2w^2 - 12w - 6)/(3\sqrt{w})$ na $(0, +\infty)$, **e)** $\operatorname{tg}\varphi - \varphi$ pro $\varphi \neq (\frac{1}{2} + k)\pi$, $k \in Z$, **f)** $20x + 6(\frac{3}{4})^x / \ln\frac{4}{3}$ na reálné ose, **g)** $e^y - \ln|y| - x/y$ na intervalech $(-\infty, 0)$ a $(0, +\infty)$, **h)** $av^3 + 4b/(v\sqrt{v}) + cv$ na $(0, +\infty)$, **i)** $\operatorname{tg} x$ pro $x \neq (\frac{1}{2} + k)\pi$, $k \in Z$, **j)** $\operatorname{arctg} x - 1/x$ na $R - \{0\}$.

4.104. Dvě úlohy, které se dají řešit aplikací základních vzorců:

a) $\displaystyle\int |x|\,dx.$

b) $\displaystyle\int |\cos x|\,dx.$

Řešení. Obě integrované funkce jsou spojité a nezáporné. Primitivní funkce jsou rostoucí. Průběh primitivních funkcí si nakreslete. Sledujte (zvláště v úloze b)), zda se spojitě napojují jednotlivé části. **a)** $\frac{1}{2}x\,|x|$ na celé reálné ose. **b)** Na intervalu $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ zvolíme primitivní funkci $x \to \sin x$. Na intervalu $(\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi)$ je $|\cos x| = -\cos x$, a proto primitivní funkce je $x \to -\sin x + C$. Přitom C musí být taková konstanta, aby primitivní funkce spojitě navazovala při přechodu z intervalu $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ na $(\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi)$. Odtud plyne, že $C = 2$. Postupujeme dále a za chvíli odhalíme, že hledaná primitivní funkce se na intervalu $x \in \langle(-\frac{1}{2} + k)\pi, (\frac{1}{2} + k)\pi\rangle$ dá popsat výrazem
$2k + \sin(x - \pi k) \equiv 2k + (-1)^k \sin x.$

4.105. **a)** Několik poznámek o mocninné funkci, která se pro $a \in R$ obvykle definuje pomocí vztahu

$$x^a \equiv \exp(a \ln x),$$

a proto se předpokládá, že $x > 0$. Pro iracionální a tedy je

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C$$

na $(0, +\infty)$. Omezení na interval $(0, +\infty)$ se může ukázat zbytečným pro některé případy, které odpovídají racionálnímu exponentu. Například funkce

$$x \to \sqrt[3]{x^2}$$

je spojitá na R. Proto k ní existuje primitivní funkce na R a tuto funkci je třeba popsat. Obecně nás tedy zajímá, kdy funkci

$$x \to \sqrt[n]{x^m} \qquad (*)$$

lze chápat jako spojitou na množině větší než interval $(0, +\infty)$ a jak vyjádřit primitivní funkci. Probereme několik případů:

(i) $m, n \in N$ jsou lichá čísla. Jestliže pro $z < 0$ označíme

$$\sqrt[n]{z} \equiv -\sqrt[n]{|z|},$$

je funkce $(*)$ definována na R a je tam spojitá a kladná (záporná) pro kladné (záporné) hodnoty x. Primitivní funkce F k funkci $(*)$ na R je

$$F(x) = \frac{n}{m+n}\sqrt[n]{x^{m+n}} + C. \qquad (**)$$

(Povšimněte si, že $m+n$ je číslo sudé.) Tuto funkci lze zapsat také ve tvaru

$$F(x) = \frac{n}{m+n}\, x\sqrt[n]{x^{m}} + C. \qquad (**)$$

(ii) $m, n \in N$, m je číslo sudé a n liché. Funkce $(*)$ je spojitá na R a primitivní funkce F je opět dána vztahy $(**)$. V tomto případě je funkce $(*)$ kladná, jestliže $x \neq 0$. Funkce F je tedy rostoucí na R. (Všimněte si, že $m+n$ je nyní liché číslo.)

(iii) $m, n \in N$, m sudé, n sudé. Potom funkce $(*)$ je spojitá na R a nabývá kladných hodnot, jakmile $x \neq 0$. Primitivní funkce F existuje na R, je rostoucí funkcí a je dána vztahem

$$\frac{n}{m+n}\sqrt[n]{x^{m+n}} + C \text{ pro } x \geq 0$$

a vztahem

$$-\frac{n}{m+n}\sqrt[n]{x^{m+n}} + C \text{ pro } x \leq 0.$$

To lze zapsat jedním výrazem platným pro všechna $x \in R$ takto:

$$F(x) = \frac{n}{m+n}\, x\sqrt[n]{x^{m}} + C.$$

b) Co lze říci o posledním zbývajícím případu $m, n \in N$, m liché a n sudé?

c) Spočítejte $\int \sqrt[3]{x^2}dx$.

d) Spočítejte $\int \sqrt{x^2}dx$ a srovnejte s 4.104.a.

Řešení. c) $\frac{3}{5}x\sqrt[3]{x^2}$ na reálné ose.

4.106. Některé jednoduché úlohy, které se formálně řeší substitucí, je dobré pomocí drobné úpravy vyřešit přímo. Například počítáme

$$\begin{aligned}&\int \sin(3x-2)\,dx\\ &= \tfrac{1}{3}\int 3\sin(3x-2)\,dx\\ &= -\tfrac{1}{3}\cos(3x-2) + C\end{aligned}$$

a substituci vůbec nevypisujeme. Podobně (čitatel ve druhém výrazu je derivací jmenovatele)

$$\begin{aligned}&\int \frac{x}{x^2+3}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+3}\,dx\\ &= \tfrac{1}{2}\ln(x^2+3) + C.\end{aligned}$$

Při integraci jednoduchých racionálních lomených funkcí se někdy veškeré úpravy omezí na přičtení a odečtení vhodného členu v čitateli a jednoduché dělení. Například

$$\begin{aligned}&\int \frac{x^2+2x}{x+3}\,dx\\ &= \int \frac{x(x+3)-(x+3)+3}{x+3}\,dx\\ &= \int (x-1)\,dx + 3\int \frac{1}{x+3}\,dx\\ &= \tfrac{1}{2}x^2 - x + 3\ln|x+3| + C\end{aligned}$$

na každém z těchto dvou otevřených intervalů $(-\infty, -3)$, $(-3, +\infty)$. Také vhodná úprava funkcí pod integrálem usnadní výpočet. Například

$$\begin{aligned}&\int \cos 2x \cos 3x\,dx\\ &= \frac{1}{2}\int (\cos 5x + \cos x)\,dx\\ &= \tfrac{1}{10}\sin 5x + \tfrac{1}{2}\sin x + C.\end{aligned}$$

Spočítejte tyto integrály:

a) $$\int \frac{e^{5x}-1}{e^{2x}}\,dx,$$

b) $\int e^x \sin e^x \, dx$,

c) $\int x\sqrt{x^2+1}\, dx$,

d) $\int x\sqrt{2-3x^2}\, dx$,

e) $\displaystyle\int \frac{1}{2t+3}\, dx$,

f) $\displaystyle\int xe^{-x^2}\, dx$,

g) $\displaystyle\int \sin^5 x \cos x \, dx$,

h) $\displaystyle\int \frac{\sin 2x}{1+\cos^2 x}\, dx$,

i) $\displaystyle\int \frac{3x}{\sqrt{x^2+4}}\, dx$,

j) $\displaystyle\int (-x+3)^6\, dx$,

k) $\displaystyle\int \frac{1}{z^2-1}\, dz$,

l) $\displaystyle\int \sin 3t \, dt$,

m) $\displaystyle\int \frac{5y}{2y+3}\, dy$,

n) $\displaystyle\int \frac{2+w}{2-w}\, dw$,

o) $\displaystyle\int \frac{x^2+3x+3}{x+2}\, dx$,

p) $\displaystyle\int \sin x \cos 2x \, dx$,

q) $\displaystyle\int \sin x \sin 2x \, dx$,

r) $\displaystyle\int \operatorname{tg} v \, dv$,

s) $\displaystyle\int \operatorname{cotg} t \, dt$.

Řešení. **a)** $\frac{1}{3}e^{3x} + \frac{1}{2}e^{-2x}$ na R, **b)** $-\cos(e^x)$ na R, **c)** $\frac{1}{3}\sqrt{(x^2+1)^3}$ na R, **d)** $-\frac{1}{9}\sqrt{(2-3x^2)^3}$ na intervalu $(-\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}})$, **e)** $\frac{1}{2}\ln|2t+3|$ na obou intervalech tvořících $R-\{-\frac{3}{2}\}$, **f)** $-\frac{1}{2}e^{-x^2}$ na R, **g)** $\frac{1}{6}\sin^6 x$ na R, **h)** $-\ln(1+\cos^2 x)$ na R, **i)** $3\sqrt{x^2+4}$ na R, **j)** $\frac{1}{7}(x-3)^7$ na R, **k)** $\frac{1}{2}\ln(|z-1| / |z+1|)$ na každém ze tří intervalů tvořících $R-\{\pm 1\}$, **l)** $-\frac{1}{3}\cos 3t$ na R, **m)** $\frac{5}{2}(y - \frac{3}{2}\ln|2y+3|)$ na intervalech tvořících $R-\{\frac{3}{2}\}$, **n)** $-(w+4\ln|w-2|)$ na intervalech tvořících $R-\{2\}$, **o)** $\frac{1}{2}x^2+x+\ln|x+2|$ na intervalech tvořících $R-\{-2\}$, **p)** $-\frac{1}{6}\cos 3x + \frac{1}{2}\cos x$ na R, **q)** $\frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{6}\sin 3x$ na R, **r)** $-\ln|\cos v|$ pro $v \neq \frac{1}{2}\pi + k\pi$, $k \in Z$, **s)** $\ln|\sin t|$ pro $t \neq k\pi$, $k \in Z$.

4.107. Integrál, bez něhož se žádná sbírka úloh neobejde, je

$$\int \frac{1}{\sin x}\, dx.$$

Pro jednoduchost budeme hledat primitivní funkci pouze na intervalu $(0, \pi)$. Tradují se tyto tři metody, jejichž uvedení je možné ospravedlnit tím, že se nechají okouknout triky, které člověku přijdou vhod i u jiných úloh.

a) Vztah $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$ a substituce $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$ dovolují postupovat takto:

$$\int \frac{1}{\sin x}\, dx = \int \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}} \frac{dx}{2}$$
$$= \int \frac{1}{t}\, dt = \ln|t| + C$$
$$= \ln \operatorname{tg}\frac{x}{2} + C$$

na otevřeném intervalu $(0, \pi)$. Sledujte, jaký interval probíhá t, když

x se pohybuje v intervalu $(0, \pi)$.

b) Integrand rozšíříme $\sin x$ a využijeme $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ a substituce $\cos x = z$. Potom

$$\int \frac{1}{\sin x}\,dx = \int \frac{-\sin x}{\cos^2 x - 1}\,dx$$
$$= \int \frac{1}{z^2 - 1}\,dz \text{ (podle 4.106.k)}$$
$$= \tfrac{1}{2}\ln \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} + C$$

na otevřeném intervalu $(0, \pi)$.

c) A ještě trik s jedničkou obratně zapsanou, který už známe z 0.309.a. Pro vyšetřovaný integrál postupně dostaneme

$$\frac{1}{2}\int \frac{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2}}\,dx$$
$$= \int \frac{\cos \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \frac{dx}{2} + \int \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} \frac{dx}{2}$$
$$= \ln \sin \frac{x}{2} - \ln \cos \frac{x}{2} + C$$
$$= \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} + C$$

na otevřeném intervalu $(0, \pi)$.

d) Ověřte pomocí vztahů mezi goniometrickými funkcemi, že výsledek v a) je ekvivalentní výsledku nalezenému v b).

e) Vhodnou transformací se někdy podaří převést integrand na funkci, jejíž primitivní funkci známe. Například, máme-li na intervalu $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ najít

$$\int \frac{1}{\cos w}\,dw, \qquad (*)$$

převedeme tento integrál substitucí $x = \frac{1}{2}\pi - w$ na

$$-\int \frac{1}{\sin x}\,dx \text{ pro } x \in (0, \pi).$$

S pomocí částí a), b) najděte primitivní funkci $(*)$ a přesvědčte se o správnosti výsledku derivováním.

Řešení. e) $\ln((1 + \sin w)/\cos w)$ na $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$.

4.108. Použitím integrace per partes se sice u těchto úloh funkce pod integrálem nezjednodušuje, ale integrál lze takto vyčíslit. V některých případech lze použít i jiného postupu. Najděte integrací per partes:

a) $\int e^x \sin x\,dx$,
b) $\int e^x \cos x\,dx$,
c) $\int e^{-x} \sin x\,dx$,
d) $\int \frac{\ln x}{x}\,dx$,
e) $\int \cos^2 x\,dx$,
f) $\int e^{-x} \cos 2x\,dx$,
g) $\int \cos(\ln x)\,dx$.
h) Najděte primitivní funkci v c) použitím substituce $x = -z$ a výsledku příkladu a).

Řešení. **a)** $\frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x)$ na R, **b)** $\frac{1}{2}e^x(\sin x + \cos x)$ na R, **c)** $-\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x + \cos x)$ na R, **d)** $\frac{1}{2}\ln^2 x$ na $(0, +\infty)$, **e)** $\frac{1}{2}(x + \sin x \cos x)$ na R, **f)** $\frac{1}{5}e^{-x}(2\sin 2x - \cos 2x)$ na R, **g)** $\frac{1}{2}x(\cos(\ln x) + \sin(\ln x))$ na $(0, +\infty)$.

4.109. Výpočet začněte tím, že užijete integrace per partes a potom jakýkoliv obrat, který usnadní nalezení primitivní funkce. Najděte

a) $\int x e^{-x}\,dx$, **b)** $\int x^2 e^{3x}\,dx$,
c) $\int x^2 \sin x\,dx$, **d)** $\int x^3 \ln x\,dx$,
e) $\int \arccos x\,dx$, **f)** $\int x^2 \cos^2 x\,dx$,

g) $\displaystyle\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\,dx$,

h) $\int x^2 \arccos x\,dx$,

i) $\displaystyle\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{x+1}}\,dx$,

j) $\int x \operatorname{arctg} x\,dx$,

k) $\int \ln(x^2+1)\,dx$,

l) $\int x(\operatorname{arctg} x)^2\,dx$,

m) $\int \sin(\ln x)\,dx$,

n) $\int x^n \ln x\,dx$, $(n \neq -1)$,

o) $\int e^{ax}\cos nx\,dx$ $(a\cdot n \neq 0)$,

p) (použijte 4.108.a, b)
$\int x^2 e^x \sin x\,dx$.

Řešení.
a) $-(x+1)e^{-x}$ na R, **b)** $\frac{1}{27}(9x^2-6x+2)e^{3x}$ na R, **c)** $(2-x^2)\cos x+2x\sin x$ na R, **d)** $\frac{1}{16}x^4(4\ln x-1)$ na $(0,+\infty)$, **e)** $x\arccos x-\sqrt{1-x^2}$ na intervalu $(-1,1)$, **f)** $\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{4}x^2\sin 2x+\frac{1}{4}x\cos 2x-\frac{1}{8}\sin 2x$ na R, **g)** $-2\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x}+2\sqrt{x}$ na intervalu $(0,1)$, **h)** $\frac{1}{3}x^3\arccos x-\frac{1}{9}(2+x^2)\sqrt{1-x^2}$ na intervalu $(-1,1)$, **i)** $2\sqrt{x+1}\arcsin x+4\sqrt{1-x}$ na $(-1,1)$, **j)** $\frac{1}{2}(x^2+1)\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}x$ na celé reálné ose **k)** $x\ln(x^2+1)-2x+2\operatorname{arctg} x$ na R, **l)** $\frac{1}{2}(x^2+1)(\operatorname{arctg} x)^2+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)-x\operatorname{arctg} x$ na R, **m)** $\frac{1}{2}x(\sin\ln x-\cos\ln x)$ na $(0,+\infty)$, **n)** $\frac{1}{n+1}x^{n+1}(\ln x-\frac{1}{n+1})$ na $(0,+\infty)$, **o)** $\frac{e^{ax}}{a^2+n^2}(n\sin nx+a\cos nx)$ na R, **p)** $\frac{1}{2}\big((x^2-1)\sin x-(x-1)^2\cos x\big)e^x$ na celé reálné ose.

4.110. Integrand v 4.209.o je reálnou částí funkce

$$x \to e^{(a+in)x},$$

a proto můžeme využít vzorce

$$\int e^{bx}\,dx = \frac{1}{b}e^{bx}+C, \qquad (*)$$

který platí pro každé komplexní číslo $b \neq 0$. Primitivní funkce je reálnou částí funkce

$$x \to \frac{1}{a+in}e^{(a+in)x}+C. \qquad (**)$$

a) Co dostanete, když do $(*)$ dosadíte $b=i$ a získaný vztah rozdělíte na reálnou a imaginární část?

b) Spočítejte 4.108.f a 4.109.o.

c) Co je imaginární část funkce definované výrazem $(**)$?

d) Integrál v 4.109.p najděte jako imaginární část integrálu

$$\int x^2 e^{(1+i)x}\,dx.$$

Proti 4.109.p je zde integrand součinem pouze dvou funkcí, a proto je možná použití integrace per partes snadnější.

4.111. Výpočet začněte tím, že použijete vhodné substituce. Spočítejte:

a) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-25x^2}}\,dx$,

b) $\displaystyle\int \frac{4}{(\arcsin x)^3\sqrt{1-x^2}}\,dx$,

c) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}\,dx$,

d) $\displaystyle\int \frac{e^{2x}-e^x}{e^x+1}\,dx$,

e) $\displaystyle\int \exp(e^x+x)\,dx$,

f) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x^3}}\,dx$,

g) $\displaystyle\int \operatorname{arctg}\sqrt{x}\,dx$,

h) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x(1+\ln x)}\,dx.$

Řešení. **a)** $\frac{1}{5}\arcsin 5x$ na $(-\frac{1}{5},\frac{1}{5})$, **b)** $-2/(\arcsin x)^2$ na $(-1,1)$, **c)** $3\sqrt[3]{\sin x}$ pro $x\neq \pi k$, $k\in Z$, **d)** $e^x - 2\ln(e^x+1)$ na R, **e)** $\exp(e^x)$ na R, **f)** $\frac{2}{3}\ln(1+\sqrt{x^3})$ na $(0,+\infty)$, **g)** $(x+1)\operatorname{arctg}\sqrt{x}-\sqrt{x}$ na $(0,+\infty)$, **h)** $\ln x - \ln|\ln x + 1|$ na $(0,e^{-1})$ a na $(e^{-1},+\infty)$.

4.112. Pêle-mêle:

a) $\int x^2 \sin x^3\,dx$,

b) $\displaystyle\int \frac{x^2 \operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx$,

c) $\int \sin^3 x\,dx$,

d) $\int \sqrt[3]{x}\,dx$,

e) $\int \operatorname{cotg}^2 w\,dw$,

f) $\int x^2\cos^2 x\,dx$,

g) $\int e^x \sin^2 x\,dx$,

h) $\int x^3 \exp(x^2)\,dx$,

i) $\int x\cos x^2\,dx$,

j) $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{3+e^x}\,dx$,

k) $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x\cos x}{1+\sin^2 x}\,dx$,

l) $\displaystyle\int \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$,

m) ($a\in R$ je zadaná konstanta) $\int x\sqrt{a+x}\,dy$.

Řešení.
a) $-\frac{1}{3}\cos x^3$ na R, **b)** $x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) - \frac{1}{2}(\operatorname{arctg} x)^2$ na R, **c)** $\frac{1}{3}(\cos^3 x - \cos x)$ na R, **d)** $\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}$ na R, **e)** $-\operatorname{cotg} w - w$ pro $x\neq k\pi$, **f)** $\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{4}x^2\sin 2x+\frac{1}{4}x\cos 2x-\frac{1}{8}\sin 2x$ na R, **g)** $\frac{1}{2}e^x(1-\frac{2}{5}\sin 2x-\frac{1}{5}\cos 2x)$ na R, **h)** $\frac{1}{2}\exp(x^2)(x^2-1)$ na R, **i)** $\frac{1}{2}\sin x^2$ na R, **j)** $e^x - 3\ln(e^x+3)$ na R, **k)** $\sin x - \operatorname{arctg}\sin x$ na R, **l)** $x-\sqrt{1-x^2}\arcsin x$ na $(-1,1)$, **m)** $\frac{2}{15}(3x-2a)\sqrt{(a+x)^3}$ na $(-a,+\infty)$.

4.113. I v úlohách, které jsou věcí rutinního výpočtu, je třeba postupovat s opatrností. Funkce

$$x \longrightarrow \frac{\sin x}{1+\sin x}$$

je spojitá na $(-\frac{1}{2}\pi,\frac{3}{2}\pi)$, a proto na tomto intervalu existuje primitivní funkce. Její výpočet začneme tak, že rozšíříme zlomek $1-\sin x$; dostaneme

$$\int \frac{\sin x-\sin^2 x}{1-\sin^2 x}\,dx = \int\Big(\frac{\sin x}{\cos^2 x}-\frac{1}{\cos^2 x}+1\Big)\,dx = F(x)+x+C,$$

kde jsme pro stručnost označili

$$F(x)=\frac{1}{\cos x}-\operatorname{tg} x.$$

Právě popsaná funkce F je definovaná na intervalech $(-\frac{1}{2}\pi+k\pi,\frac{1}{2}\pi+k\pi)$, $k\in Z$. Je potřeba vzít dva takové intervaly ($k=0,1$)

$$(-\tfrac{1}{2}\pi,\tfrac{1}{2}\pi),\ (\tfrac{1}{2}\pi,\tfrac{3}{2}\pi),$$

aby se nám podařilo téměř pokrýt interval $(-\frac{1}{2}\pi,\frac{3}{2}\pi)$, na němž hledáme primitivní funkci. Poněvadž

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}\pi} F(x)=0,$$

musíme v bodě $\frac{1}{2}\pi$ funkci F přiřadit hodnotou 0, abychom získali funkci spojitou na intervalu $(-\frac{1}{2}\pi,\frac{3}{2}\pi)$. Podle 3.509.a zjistíme, že F má derivaci rovnou integrandu v každém bodě intervalu $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi)$. Takto rozšířená funkce je teprve hledanou primitivní funkcí na intervalu $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi)$.

Ostatně snadno dokážete, že pro všechna $x \in (-\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi)$ platí pro rozšířenou funkci F tento vztah

$$F(x) = \frac{\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}}.$$

4.114. Několik příkladů s goniometrickými funkcemi v integrandu, které lze řešit obratnými úpravami:

a) $\displaystyle\int \cos^2 x\,dx$ (4.108.e),

b) $\displaystyle\int \sin^2 x\,dx,$

c) $\displaystyle\int \cos^3 x\,dx,$

d) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^4 x \cos^2 x}\,dx,$

e) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^6 x}\,dx,$

f) $\displaystyle\int \sin^2 x \cos^4 x\,dx,$

g) $\displaystyle\int \operatorname{tg}^3 x\,dx,$

h) $\displaystyle\int \sin^4 x\,dx,$

i) $\displaystyle\int \frac{1 + \cos^2 x}{\cos^4 x}\,dx.$

Řešení. Pro stručnost vynecháme určení intervalů, na kterých jsou níže vypsané funkce funkcemi primitivními.

a) $\frac{1}{4}(2x + \sin 2x)$, **b)** $\frac{1}{4}(2x - \sin 2x)$, **c)** $\sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x$, **d)** (zde si povšimněte přítomnosti faktoru $1/\cos^2 x$, který se hodí při substituci $\operatorname{tg} x = t$) $-\frac{1}{3}(\operatorname{tg} x)^{-3} - 2(\operatorname{tg} x)^{-1} + \operatorname{tg} x$, **e)** (vezmeme v úvahu přítomnost $1/\sin^2 x$) $-\frac{1}{5}\operatorname{cotg}^5 x - \frac{2}{3}\operatorname{cotg}^3 x - \operatorname{cotg} x$, **f)** $\frac{1}{64}(4x - \sin 4x) + \frac{1}{48}\sin^3 2x$, **g)** $\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x + \ln|\cos x|$, **h)** $\frac{1}{32}\sin 4x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{3}{8}x$, **i)** $2\operatorname{tg} x + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x$.

2. Integrace racionálních lomených funkcí.

4.201. Začneme užitečnými obraty.

a) Výpočet

$$\int \frac{3x + 4}{x^2 + 3x + 5}\,dx \qquad (*)$$

vyžaduje rozklad

$$\frac{3x + 4}{x^2 + 3x + 5} = \alpha\frac{2x + 3}{x^2 + 3x + 5} + \beta\frac{1}{x^2 + 3x + 5}.$$

Čitatel prvního výrazu vpravo je derivace jmenovatele. Snadno najdeme, že $\alpha = \frac{3}{2}$ a $\beta = -\frac{1}{2}$. Poněvadž

$$\frac{1}{x^2 + 3x + 5} = \frac{1}{\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{11}{4}} = \frac{4}{11}\frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{11}}\left(x + \frac{3}{2}\right)\right)^2 + 1}$$

dostaneme použitím jednoduchých substitucí, že integrál $(*)$ je roven

$$\tfrac{3}{2}\ln(x^2 + 3x + 5) - \tfrac{1}{\sqrt{11}}\operatorname{arctg}\tfrac{1}{\sqrt{11}}(2x + 3) + C.$$

b) Pro $n \in N$ odvoďte integrací per partes rekurentní formuli

$$I_{n+1} = \frac{1}{2n}\frac{t}{(t^2+1)^n} + \frac{2n-1}{2n} I_n\,,$$

kde

$$I_n = \int \frac{1}{(1+t^2)^n}\,dt$$

(J. Štěpánek: Matematika pro přírodovědce I, kap. 15, příklad 6.).

c) Kořeny jmenovatele jsou navzájem různé. Například počítejme

$$\int \frac{1}{x^3 - x^2 - 2x}\,dx.$$

Je $x^3 - x^2 - 2x = x(x-2)(x+1)$, a proto musíme najít A, B, C vyhovující

$$\frac{1}{x^3 - x^2 - 2x} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x}$$

pro $x \neq 2, -1, 0$. Násobením výrazem $x(x-2)(x+1)$ dostaneme

$$1 = Ax(x+1) + Bx(x-2) + C(x-2)(x+1).$$

Tento vztah se redukuje po dosazení

$x = 2$ na $1 = 6A$,
$x = -1$ na $1 = 3B$,
$x = 0$ na $1 = -2C$.

Proto hledaný integrál je roven $\frac{1}{6}\ln|x-2| + \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{2}\ln|x| + C = \frac{1}{6}\ln\big(|x-2|(x+1)^2/|x|^3\big) + C$ na každém z otevřených intervalů, které vytvářejí $R - \{-1, 0, 2\}$.

d) V c) najděte koeficienty A, B, C porovnáním koeficientů u mocnin proměnné x a řešením příslušné soustavy. Srovnejte pracnost v obou případech.

4.202. Spočítejte:

a) $\displaystyle\int \frac{5x+9}{x^2+16}\,dx,$

b) $\displaystyle\int \frac{x}{x^3-3x+2}\,dx,$

c) $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^3+2x^2-3x-10}\,dx,$

d) $\displaystyle\int \frac{3x^2+1}{(x^2-1)^2}\,dx,$

e) $\displaystyle\int \frac{2x+3}{(x+5)(x-2)}\,dx,$

f) $\displaystyle\int \frac{2x^2-5}{x^4-5x^2+6}\,dx,$

g) $\displaystyle\int \frac{x}{x^4-3x^2+2}\,dx,$

h) $\displaystyle\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}\,dx,$

i) $\displaystyle\int \frac{3x^2+1}{(x^2-1)^3}\,dx,$

j) $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x^2-3x+2)^2}\,dx,$

k) $\displaystyle\int \frac{1}{x^3+x^2+x+1}\,dx,$

l) $\displaystyle\int \frac{x}{x^3-1}\,dx,$

m) $\displaystyle\int \frac{x^4+1}{x^3-x^2+x-1}\,dx,$

n) $\displaystyle\int \frac{1}{x^4+2x^3+2x^2+x}\,dx,$

o) $\displaystyle\int \frac{x^3+x-1}{(x^2+2)^2}\,dx,$

p) $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2+9)^3}\,dx.$

Řešení.

a) $\frac{5}{2}\ln(x^2+16) + \frac{9}{4}\operatorname{arctg}(\frac{1}{4}x)$ na R, **b)** $-\frac{1}{3}(x-1)^{-1} + \frac{2}{9}\ln(|x-1|/|x+2|)$ na $R - \{-2, 1\}$, **c)** $\frac{3}{17}\ln|x-2| -$

$\frac{3}{34}\ln(x^2+4x+5)+\frac{5}{17}\operatorname{arctg}(x+2)$ na $R-\{2\}$, **d)** $\frac{1}{2}\ln(|x-1|/|x+1|)-2x(x^2-1)^{-1}$ na $R-\{\pm1\}$, **e)** $\ln|(x-2)(x+5)|$ na $R-\{-5,2\}$, **f)** $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln(|x-\sqrt{2}|/|x+\sqrt{2}|)+\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln(|x-\sqrt{3}|/|x+\sqrt{3}|)$ na $R-\{\pm\sqrt{2},\pm\sqrt{3}\}$, **g)** $\frac{1}{2}\ln(|x^2-2|/|x^2-1|)$ na $R-\{\pm\sqrt{2},\pm1\}$, **h)** $\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+4x+\ln(x^2|x-2|^5/|x+2|^3)$ na $R-\{0,\pm2\}$, **i)** $-x/(x^2-1)^2$ na $R-\{\pm1\}$, **j)** $(6-5x)/(x^2-3x+2)+4\ln(|x-1|/|x-2|)$ na $R-\{1,2\}$, **k)** $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+\frac{1}{4}\ln((x+1)^2/(x^2+1))$ na $R-\{-1\}$, **l)** $\frac{1}{3}\ln(|x-1|/\sqrt{x^2+x+1})+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}(\frac{1}{\sqrt{3}}(2x+1))$ na $R-\{1\}$, **m)** $\frac{1}{2}(x+1)^2+\ln(|x-1|/\sqrt{x^2+1})-\operatorname{arctg}x$ na $R-\{1\}$, **n)** $\ln(|x|/|x+1|)-\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}(\frac{1}{\sqrt{3}}(2x+1))$ na $R-\{-1,0\}$, **o)** $\frac{1}{4}(2-x)/(x^2+2)+\ln\sqrt{x^2+2}-\frac{1}{4\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\frac{1}{\sqrt{2}}x)$ na R, **p)** $\frac{1}{216}x/(x^2+9)+\frac{1}{36}x/(x^2+9)^2+\frac{1}{648}\operatorname{arctg}(\frac{1}{3}x)$ na R.

3. **Speciální substituce.**

4.301. Spočítejte:

a) $\displaystyle\int\frac{1}{(1+e^x)^2}\,dx$,

b) $\displaystyle\int\frac{1}{e^{2x}+e^x-2}\,dx$,

c) $\displaystyle\int\frac{e^x-1}{e^x+1}\,dx$,

d) $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{1+e^x}}\,dx$.

Řešení.
a) $x+1/(1+e^x)-\ln(1+e^x)$ na R, **b)** $-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}\ln|e^x-1|+\frac{1}{6}\ln(e^x+2)$ na $R-\{0\}$, **c)** $2\ln(e^x+1)-x\equiv 2\ln(\exp(\frac{1}{2}x)+\exp(-\frac{1}{2}x))$ na R, **d)** $\ln((\sqrt{1+e^x}-1)/(\sqrt{1+e^x}+1))\equiv 2\ln(\sqrt{1+e^x}-1)-x$ na R.

4.302. Spočítejte:

a) $\displaystyle\int\frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx$,

b) $\displaystyle\int\frac{x^2+\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}}\,dx$,

c) $\displaystyle\int\frac{1}{x}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx$,

d) $\displaystyle\int\frac{1+\sqrt[4]{x}}{x+\sqrt{x}}\,dx$,

e) (jednoduchý příklad)
$$\int\frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{1+x}{x}}\,dx,$$

f) (složitý příklad)
$$\int\frac{1}{x^2}\sqrt[3]{\frac{2x+1}{x+1}}\,dx,$$

g) $\displaystyle\int\frac{\sqrt{2x+3}+x}{\sqrt{2x+3}-x}\,dx$,

h) $\displaystyle\int\frac{x\sqrt[3]{2+x}}{x+\sqrt[3]{2+x}}\,dx$.

Řešení.
a) $2\sqrt{x}-2\ln(1+\sqrt{x})$ na $(0,+\infty)$, **b)** $6\sqrt[3]{(1+x)^2}(\frac{1}{16}(x+1)^2-\frac{1}{5}(1+x)+\frac{1}{7}\sqrt{1+x}+\frac{1}{4})$ na $(-1,+\infty)$, **c)** $\ln(|\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}|/(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}))+2\operatorname{arctg}(\sqrt{1-x}/\sqrt{1+x})$ na intervalech $(-1,0)$ a $(0,1)$, **d)** $4\sqrt[4]{x}+2\ln(1+\sqrt{x})-4\operatorname{arctg}\sqrt[4]{x}$ na

$(0,+\infty)$, **e)** $-\frac{2}{3}\sqrt{(1+x)^3/x^3}$ na intervalech $(-\infty,-1)$ a $(0,+\infty)$, **f)** $-t/(t^3-1)+\frac{1}{3}\ln|t-1|-\frac{1}{6}\ln(t^2+t+1)-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\big(\frac{1}{\sqrt{3}}(2t+1)\big)$, kde $t=\sqrt[3]{(2x+1)/(x+1)}$, na intervalech tvořících $R-\{-1,0\}$, **g)** $-\frac{1}{2}t^2-4t-9\ln|t-3|+\ln(t+1)$, kde $t=\sqrt{2x+3}$, na intervalech $(-\frac{3}{2},3)$ a $(3,+\infty)$, **h)** $\frac{3}{4}t^4-\frac{3}{2}t^2-\frac{3}{4}\ln|t-1|+\frac{15}{8}\ln(t^2+t+2)-\frac{27}{4\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\big(\frac{1}{\sqrt{7}}(2t+1)\big)$, kde $t=\sqrt[3]{2+x}$, na intervalech $(-\infty,-1)$ a $(-1,+\infty)$.

4.303. K integraci výrazů s goniometrickými funkcemi v integrandu používáme různé substituce. Použijeme-li substituci $t=\operatorname{tg}x$, dostaneme snadno

$$\int\frac{1}{1+3\sin^2 x}\,dx=\int\frac{1}{1+4t^2}\,dt,$$
$$=\tfrac{1}{2}\operatorname{arctg}(2\operatorname{tg}x)+C.$$

Poslední funkce je definována na intervalech $(-\frac{1}{2}\pi+k\pi,\frac{1}{2}\pi+k\pi)$, $k\in Z$, které označíme I_k. Poněvadž integrand je funkce spojitá na R, primitivní funkci bychom měli určit taky jako funkci na R. Kdybychom v tomto směru chtěli skutečně postupovat dále, dostaneme se do situace, na kterou jsme narazili už v příkladu 4.104.b – máme vhodnou volbou konstanty C spojitě napojit primitivní funkci v bodech, kde se intervaly I_k stýkají. V příkladu 4.104.b jsme viděli, že takto popsat primitivní funkci může být pracné a výsledek nepřehledný. Proto se v dalším obvykle spokojíme s tím, že řekneme, na jakých intervalech je nalezená funkce primitivní funkcí.

Pozorně je třeba postupovat při výpočtu určitého integrálu. Mechanickým počítáním bychom dostali

$$\int_0^\pi\frac{1}{1+3\sin^2 x}\,dx \qquad (*)$$
$$=\tfrac{1}{2}\operatorname{arctg}(2\operatorname{tg}x)\Big|_{x=0}^{x=\pi}=0$$

– výsledek, který je nesprávný, neboť integrujeme kladnou funkci. Je třeba rozdělit integrační obor na intervaly $(0,\frac{1}{2}\pi)$ a $(\frac{1}{2}\pi,\pi)$. Tím dostaneme dva integrály. Substitucí $y=\pi-x$ ve druhém integrálu zjistíme, že druhý integrál je roven prvnímu, a proto hledaná hodnota $(*)$ je

$$2\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{1}{1+3\sin^2 x}\,dx$$
$$=\lim_{x\to\frac{1}{2}\pi_-}\operatorname{arctg}(2\operatorname{tg}x)=\tfrac{1}{2}\pi.$$

Spočítejte $(*)$ tak, že napojením v bodě $\frac{1}{2}\pi$ sestrojíte primitivní funkci na intervalu $(-\frac{1}{2}\pi,\frac{3}{2}\pi)$.

Řešení. Primitivní funkce F je dána výrazem

$$F(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(2\operatorname{tg}x) & \text{na } (-\frac{1}{2}\pi,\frac{1}{2}\pi),\\ \frac{1}{4}\pi & \text{pro } x=\frac{1}{2}\pi,\\ \frac{1}{2}\pi+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(2\operatorname{tg}x) & \text{na } (\frac{1}{2}\pi,\frac{3}{2}\pi).\end{cases}$$

Proto hodnota integrálu může být také vyčíslena jako

$$F(\pi)-F(0)\ \ (=\tfrac{1}{2}\pi).$$

4.304. Rozhodněte, zda použít nějaké běžné substituce, substituce $t=\operatorname{tg}x$, nebo dokonce $u=\operatorname{tg}\frac{1}{2}x$ a spočítejte:

a) $\displaystyle\int \sin^3 x \cos^2 x \, dx$,

b) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{(1-\cos x)^2}\, dx$,

c) $\displaystyle\int \frac{1}{1+\operatorname{tg} x}\, dx$,

d) $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x}\, dx$,

e) $\displaystyle\int \frac{1}{(\sin x+\cos x)^2}\, dx$,

f) $\displaystyle\int \frac{1}{2\sin x-\cos x+5}\, dx$,

g) $\displaystyle\int \frac{1}{5+4\sin x}\, dx$,

h) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x+\operatorname{tg}^2 x}\, dx$,

i) $\displaystyle\int \frac{1}{(2+\cos x)\sin x}\, dx$,

j) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin x\cos^4 x}\, dx$,

k) (zkuste $y = \cos x$ i $t = \operatorname{tg} x$; porovnejte pracnost)

$$\int \frac{1}{\sin^3 x\cos^5 x}\, dx,$$

l) $\displaystyle\int \frac{1}{3+5\operatorname{tg} x}\, dx$,

m) $\displaystyle\int \frac{2-\sin x}{2+\cos x}\, dx$,

n) $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x}{1-\operatorname{tg} x}\, dx$.

Řešení. Funkce uvedené u těchto a dalších úloh jako řešení jsou primitivními funkcemi na každém intervalu, který padne do jejich přirozeného definičního oboru. V některých případech – podobně jako v úloze 4.303 – musí primitivní funkce existovat na větších intervalech.

a) $\frac{1}{15}\cos^3 x\,(3\cos^2 x-5)$ **b)** $(\cos x-1)^{-1}$ **c)** $\frac{1}{2}(x+\ln|\sin x+\cos x|)$, **d)** $x-\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}\operatorname{tg} x)$, **e)** $-(1+\operatorname{tg} x)^{-1}$, **f)** $\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\big(\frac{1}{\sqrt{5}}(3\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1)\big)$, **g)** $\frac{2}{3}\operatorname{arctg}\big(\frac{1}{3}(5\operatorname{tg}\frac{x}{2}+4)\big)$, **h)** $-\frac{1}{2}\big(\operatorname{cotg} x+\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}(\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{tg} x)\big)$, **i)** (výhodná substituce: $u=\cos x$) primitivní funkce je $\frac{1}{6}\ln\big((1-\cos x)(2+\cos x)^2/(1+\cos x)^3\big)$; se substitucí $t = \operatorname{tg}\frac{1}{2}x$ dostaneme primitivní funkci v proměnné t ve tvaru $\frac{1}{3}\ln\big(|t|(t^2+3)\big)$, **j)** $(\cos x)^{-1}+\frac{1}{3}(\cos x)^{-3}+\ln\left|\operatorname{tg}\frac{1}{2}x\right|$, **k)** $\frac{1}{4}\operatorname{tg}^4 x+\frac{3}{2}\operatorname{tg}^2 x-\frac{1}{2}\operatorname{cotg}^2 x+3\ln|\operatorname{tg} x|$, **l)** $\frac{3}{34}x+\frac{5}{34}\ln|5\sin x+3\cos x|$, **m)** $\frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}(\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{tg}\frac{1}{2}x)+\ln(2+\cos x)$, **n)** $\frac{1}{4}\big(\cos x\,(\cos x-\sin x)-\ln|\cos x-\sin x|\big)$.

4.305. Spočítejte

$$\int \frac{1}{\sin^3 x}\, dx$$

těmito dvěma způsoby:

a) Využijte substituce $t = \operatorname{tg}\frac{1}{2}x$.

b) Rozšiřte integrand $\sin x$, využijte $\sin^4 x = (1-\cos^2 x)^2$ a zaveďte substituci $u = \cos x$.

Řešení. a) Primitivní funkce v proměnné t je $\frac{1}{2}\ln|t|+\frac{1}{8}(t^2-t^{-2})$. Dosazením za t a využitím vztahu $\cos^4\frac{1}{2}x-\sin^4\frac{1}{2}x = \cos x$ dostaneme primitivní funkci ve tvaru

$$\tfrac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}x\right|-\tfrac{1}{2}\cos x\sin^{-2} x.$$

b) Primitivní funkce v proměnné u je $\frac{1}{2}\ln\sqrt{\frac{1-u}{1+u}}-\frac{1}{2}\frac{u}{1-u^2}$. Dosazením za u se získá výsledek.

4.306. a) Využijte 4.304.c a 4.304.n k výpočtu

$$\int \frac{\cos^2 x}{1-\operatorname{tg} x}\,dx.$$

b) Využijte 4.305 k výpočtu

$$\int \frac{1}{\cos^3 z}\,dz.$$

Řešení. a) $\frac{1}{4}\bigl(2x+\cos x(\sin x-\cos x)-\ln|\cos x-\sin x|\bigr)$, b) $\frac{1}{2}\sin z\cos^{-2} z-\frac{1}{2}\ln\bigl|\operatorname{tg}(\frac{1}{4}\pi-\frac{1}{2}z)\bigr|$.

4.307. Použijte substituce $t=\operatorname{tg}\frac{1}{2}x$ a spočítejte:

a) $$\int \frac{1}{\sin x+\cos x}\,dx,$$

b) $$\int \frac{\sin^2 x}{\sin x+\cos x}\,dx,$$

c) $$\int \frac{\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}\,dx.$$

Řešení. Označme pro jednoduchost $\Phi(t)=(t+\sqrt{2}-1)/(\sqrt{2}+1-t)$. Potom primitivní funkce v proměnné t mají tvar: a) $\frac{1}{2}\sqrt{2}\ln|\Phi(t)|$, b) $\frac{1}{4}\sqrt{2}\ln|\Phi(t)|-(t+1)/(t^2+1)$, c) $-\frac{1}{4}\sqrt{2}\ln|\Phi(t)|+(t-1)/(t^2+1)$. Podle 0.305.d je $\operatorname{tg}\frac{1}{8}\pi=\sqrt{2}-1$. Dosadíme za t nejprve do $\Phi(t)$ a po snadné úpravě dostaneme:

$$\Phi(\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}x)=\frac{1}{\sqrt{2}+1}\,\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}x+\operatorname{tg}\frac{1}{8}\pi}{1-\operatorname{tg}\frac{1}{2}x\operatorname{tg}\frac{1}{8}\pi}.$$

Podle 0.205.c je tento výraz roven

$$(\sqrt{2}+1)^{-1}\operatorname{tg}\left(\tfrac{1}{2}x+\tfrac{1}{8}\pi\right).$$

Primitivní funkce jsou:

a) $F(x)\equiv\frac{1}{2}\sqrt{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}\pi\right)\right|$,

b) $\frac{1}{2}\Bigl(F(x)-\sin x-\cos x\Bigr)$,

c) $-\frac{1}{2}\Bigl(F(x)-\sin x+\cos x\Bigr)$.

4.308. a) Řešení úloh v 4.307 začněte uplatněním postupu z 0.308.a. Ten dává

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{2}(\cos x+\sin x)=\sin(x+\tfrac{1}{4}\pi).$$

Proto integrál v části a) je roven

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{1}{\sin(x+\frac{1}{4}\pi)}\,dx.$$

Substitucí $x+\frac{1}{4}\pi=y$ a použitím výsledku 4.107 dostaneme primitivní funkci.

b) Postupujte stejně v úlohách 4.307.b, c.

c) Podobně (a s pomocí 0.203) spočítejte:

$$\int \frac{\sin^2 x}{\sin x+2\cos x}\,dx.$$

d) Řešte 4.307.b tak, že píšete $\sin^2 x=\frac{1}{2}\bigl((\sin^2 x-\cos^2 x)+1\bigr)$ a integrál rozdělíte na dva a využijte 4.307.a. Podobnou úpravou řešte 4.307.c.

Řešení. c) $-\frac{1}{5}(2\sin x+\cos x)+\frac{4}{5\sqrt{5}}\ln\bigl|\operatorname{tg}\bigl(\frac{1}{2}(x+\operatorname{arctg}2)\bigr)\bigr|$.

4.309. Spočítejte

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx$$

použitím vhodné substituce i integrací per partes.

Řešení. $\frac{1}{2}(x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x)$ na $(-1,1)$. Lze použít třeba substituce $\sin t=x$; při integraci per partes pište $x^2=1-(1-x^2)$ a integrál rozložte na dva.

4.310. Integrál

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$$

spočítejte několika způsoby:
a) substitucí $\sqrt{1+x^2} = x + t$,
b) substitucí $\sqrt{1+x^2} = -x + t$,
c) substitucí $\sqrt{1+x^2} = 1 + xt$,
d) substitucí $x = \operatorname{cotg} t$,
e) substitucí $x = \sinh u$ (pomocí hyperbolických funkcí).

Řešení. $\ln(x + \sqrt{x^2+1})$ na R. Postup navrhovaný v d) je podrobně popsán ve skriptech J. Štěpánka: Matematika pro přírodovědce I, Kapitola 15, př. 12. Pro postup e) potřebujeme znát definiční vztahy

$\sinh u = \frac{1}{2}(e^u - e^{-u})$,
$\cosh u = \frac{1}{2}(e^u + e^{-u})$

a tyto jednoduché vlastnosti:

$(\cosh u)' = \sinh u$,
$(\sinh u)' = \cosh u$,
$\cosh^2 u - \sinh^2 u = 1$.

Jak vyjádřit x pomocí u je popsáno v 0.807.a.

4.311. Spočítejte
a) pro a kladné
$$\int \frac{1}{\sqrt{a+x^2}}\,dx,$$
b) $$\int \sqrt{1+x^2}\,dx,$$
c) $$\int \frac{1}{\sqrt{3+4x-4x^2}}\,dx,$$
d) $$\int \frac{1}{\sqrt{-x^2-6x}}\,dx.$$

Řešení. a) $\ln(x + \sqrt{x^2+a})$ na R (substitucí převedeme na úlohu 4.310), b) $\frac{1}{2}(x\sqrt{1+x^2} + \ln(x + \sqrt{1+x^2}))$ na R (použijte integrace per partes nebo vhodné metody ze 4.310), c) $\frac{1}{2}\arcsin(x-\frac{1}{2})$ na $(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ (pouhá substituce), d) $\arcsin\frac{1}{3}(x+3)$ na $(-6, 0)$ (pouhá substituce).

4.312. Integrál
$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-4}}\,dx$$
spočítejte několika způsoby:
a) substitucí $\sqrt{x^2-4} = x + t$,
b) substitucí $\sqrt{x^2-4} = -x + t$,
c) substitucí $x = 2/\sin t$,
d) substitucí $x = 2\sinh u$.

Řešení. $\ln|x + \sqrt{x^2-4}|$ na intervalech $(-\infty, -2)$ a $(2, +\infty)$.

4.313. Spočítejte
a) $$\int \sqrt{16-x^2}\,dx,$$
b) $$\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}\,dx.$$

Řešení. a) Integrál lze substitucí převést na 4.309; primitivní funkce je $8\arcsin\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}x\sqrt{16-x^2}$ na $(-4, 4)$, b) $\frac{9}{2}\arcsin\frac{1}{3}x - \frac{1}{2}x\sqrt{9-x^2}$ na $(-3, 3)$ (substituce $x = 3\sin t$) .

4.314. Integrál
$$\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\,dx$$
spočítejte několika způsoby:
a) substitucí $x = \sinh u$,
b) substitucí $x = \operatorname{tg} y$,
c) substitucí $\sqrt{1+x^2} = -x + t$,
d) substitucí $\sqrt{1+x^2} = x + t$,
e) substitucí $\sqrt{1+x^2} = 1 + xt$.

Řešení. Primitivní funkce na intervalech $(-\infty, 0)$ a $(0, +\infty)$ je tvaru
$$\sqrt{x^2+1} + \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+1}. \quad (*)$$

V případě c) má primitivní funkce v proměnné t tvar

$$\tfrac{1}{2}(t + \tfrac{1}{t}) + \ln \tfrac{|t-1|}{t+1}.$$

Po dosazení $t = x + \sqrt{x^2+1}$ dostaneme výraz, který má jinou podobu, než $(*)$. Využijeme-li vztahu

$$t + \tfrac{1}{t} = 2\sqrt{x^2+1},$$

který také dosadíme do posledního výrazu v

$$\ln \tfrac{|t-1|}{t+1} = \ln \frac{\left|\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}\right|}{\sqrt{t} + \frac{1}{\sqrt{t}}} = \tfrac{1}{2} \ln \frac{t + \frac{1}{t} - 2}{t + \frac{1}{t} + 2},$$

dostaneme zase výraz $(*)$.

4.315. Integrál (výsledek známe)

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$$

zapište ve tvaru

$$\int \frac{1}{1+x} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\, dx$$

a použijte substituce $t^2 = (1+x)/(1-x)$. Pomocí získaného výsledku odvoďte vztah mezi funkcemi arcsin a arctg. Pokuste se potom tento vztah odvodit přímo.

Řešení. Kromě arcsin je primitivní funkcí na $(-1, 1)$ tato funkce:

$$2 \operatorname{arctg} \sqrt{(1+x)/(1-x)}.$$

Srovnáním v bodě $x = 0$ dostaneme

$$\tfrac{1}{2}\pi + \arcsin x = 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

pro všechna $x \in (-1, 1)$.

4.316. Spočítejte:

a) $\displaystyle \int \frac{1}{x + \sqrt{x^2+x+1}}\, dx,$

b) $\displaystyle \int \frac{x+1}{\sqrt{(x^2+x+1)^3}}\, dx,$

c) $\displaystyle \int \frac{x + \sqrt{x^2+x+1}}{x + 1 + \sqrt{x^2+x+1}}\, dx,$

d) $\displaystyle \int \frac{1}{x\sqrt{x^2+x+1}}\, dx.$

Řešení. Použijeme substituci

$$t = x + \sqrt{x^2+x+1}.$$

Jestliže pro jednoduchost označíme

$$\sqrt{*} = \sqrt{x^2+x+1},$$

platí tyto vztahy

$$x = (t^2-1)/(2t+1),$$
$$\sqrt{*} = (t^2+t+1)/(2t+1),$$
$$dx = \big(2\sqrt{*}/(2t+1)\big)\, dt,$$
$$t + 1 = x + 1 + \sqrt{*},$$
$$2t + 1 = 2x + 1 + 2\sqrt{*} > 0,$$
$$t^2 + t + 1 = (2x + 1 + 2\sqrt{*})\sqrt{*}.$$

a) Na $R - \{-1\}$ dosadíme za t do $\frac{1}{2}\big(\ln(t^4/(2t+1)^3) + 3(2t+1)^{-1}\big)$.

b) Po substituci dostaneme

$$2\int \frac{t(t+2)}{(t^2+t+1)^2}\, dt = -\frac{2(t+1)}{t^2+t+1} + C.$$

Použijeme výše uvedených výrazů a po rozšíření výrazem $2\sqrt{*} - 2x - 1$ dostaneme na R primitivní funkci

$$\tfrac{2}{3}(x-1)/\sqrt{x^2+x+1}.$$

c) $\frac{1}{4}(4t^2+2t+3)/(2t+1) + \frac{1}{2}\ln\big((2t+1)^3/(t+1)^4\big) + c$; poněvadž

$$\tfrac{1}{4}(4t^2+2t+3)/(2t+1) = (t^2+t+1)/(2t+1) - \tfrac{1}{4},$$

dostaneme z prvního členu (až na konstantu) $\sqrt{x^2+x+1}$; ve druhém členu využijeme vztahu

$$\left(\tfrac{2t+1}{t+1}\right)^2 = \left(\tfrac{3}{-x+1+\sqrt{*}}\right)^2$$

a najdeme, že

$$\frac{(2t+1)^3}{(t+1)^4} = \frac{9(2x+1+2\sqrt{*})}{(x+2+2\sqrt{*})^2}.$$

Proto primitivní funkce je

$$\sqrt{*} + \frac{1}{2}\ln\frac{2x+1+2\sqrt{*}}{(x+2+2\sqrt{*})^2}.$$

d) $\ln\big((t-1)/(t+1)\big)+C$; po dosazení a úpravě najdeme primitivní funkci $\ln\big(|x|/(x+2+2\sqrt{*})\big)$.

4.317. V 4.316.d použijte substituci $x = 1/z$ a potom 4.311.a. Získáte výsledek snadněji?

4.318. Spočítejte:

a) (substituce $\sqrt{\bullet} = xt + 1$)

$$\int \frac{x-1}{x^2\sqrt{2x^2-2x+1}}\,dx,$$

b) (substituce $\sqrt{*} = t - x$)

$$\int \frac{1}{1+\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx.$$

Řešení. a) $\sqrt{2x^2-2x+1}/x$ na $R-\{0\}$, b) $\ln(x+1+\sqrt{x^2+2x+2})$ $-(x+1)/(1+\sqrt{x^2+2x+2})$ na R.

4.319. Tyto úlohy ilustrují postup, který se dá uplatnit v případě, že kvadratický člen pod odmocninou má reálné kořeny. Spočítejte:

a) $$\int \frac{1}{u\sqrt{1-u^2}}\,du,$$

b) $$\int \frac{1}{u^2\sqrt{1-u^2}}\,dx,$$

c) $$\int \frac{x}{(x-1)^2\sqrt{1+2x-x^2}}\,dx.$$

Řešení. a) Funkci pod integrálem upravíme; integrál získá tvar

$$\int \frac{1}{u(1+u)}\sqrt{\frac{1+u}{1-u}}\,du.$$

Postupujeme jako v 4.302.c a dostaneme

$$\ln\frac{1-\sqrt{1-u^2}}{|u|}.$$

b) Stejnou metodou jako v části a) získáme primitivní funkci ve tvaru $-\sqrt{1-u^2}/u$. c) Provedeme substituci $x = y + 1$, potom $y = \sqrt{2}u$ a dostaneme primitivní funkci kombinací výsledků a), b) ve tvaru

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{1+2x-x^2}/(1-x) - \tfrac{1}{\sqrt{2}}\times$$
$$\ln\left((\sqrt{2}+\sqrt{1+2x-x^2})/\,|1-x|\right)$$

na $(1-\sqrt{2},1)$ a na $(1,1+\sqrt{2})$.

4.320. Stejnou metodu jako v předchozí úloze použijeme na tyto dvě úlohy:

a) $$\int \frac{1}{8+\sqrt{3+2x-x^2}}\,dx,$$

b) $$\int \frac{1}{x\sqrt{2+x-x^2}}\,dx.$$

Řešení. a)

$$\frac{4}{15}\ln\frac{\sqrt{1+x}+2\sqrt{3-x}}{2\sqrt{1+x}+\sqrt{3-x}} + \frac{6}{15}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1+x}{3-x}}$$

na intervalu $(-1,3)$,

b) $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{(\sqrt{2}\sqrt{1+x}-\sqrt{2-x})^2}{|x|}$

na intervalech $(-1,0)$ a $(0,2)$.

4.321. Spočítejte 4.320.b pomocí substituce $x = 1/z$ a úvah z 4.312.

4. Určitý integrál.

4.401. Spočítejte:

a) $\int_0^a |\cos x|\,dx$, kde $a = \frac{49}{6}\pi$,

b) $\int_0^5 |x^2-3x+2|\,dx$,

c) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2+1}\,dx,$

d) $\displaystyle\int_{-\sqrt{3}}^{1} \frac{1}{x^2+1}\,dx,$

e) $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx,$

f) $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}\sqrt{2}}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx,$

g) (užijte arccos i arcsin)

$\displaystyle\int_{-1}^{\frac{1}{2}} \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx,$

h) (užijte arccos i arcsin)

$\displaystyle\int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx,$

i) $\int_0^8 \sqrt{1+x}\,dx,$

j) $\displaystyle\int_{2}^{1+\sqrt{3}} \frac{1}{x^2-2x+2}\,dx.$

Řešení. a) $\frac{33}{2}$, b) $\frac{29}{2}$, c) $\frac{1}{2}\pi$, d) $\frac{7}{12}\pi$, e) $\frac{1}{2}\pi$, f) $\frac{3}{4}\pi$, g) $-\frac{2}{3}\pi$, h) $-\frac{1}{3}\pi$, i) $\frac{52}{3}$, j) $\frac{1}{12}\pi$.

4.402. Spočítejte:

a) $\displaystyle\int_0^1 x \operatorname{arctg} x\,dx,$

b) $\int_1^e x^2 \ln x\,dx,$

c) $\displaystyle\int_3^5 \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}\,dx,$

d) $\int_0^{\frac{1}{6}\pi} \sin^3 t \cos t\,dt.$

Řešení. a) $\frac{1}{8}(3\pi-8)$, b) $\frac{1}{9}(2e^3+1)$, c) $4-3\operatorname{arctg}\frac{4}{3}$, d) 2^{-6}.

4.403. Spočítejte:

a) $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\pi} \sin^2 x\,dx,$

b) $\displaystyle\int_0^{\frac{11}{6}\pi} \sin^2 x\,dx,$

c) $\displaystyle\int_{\frac{1}{3}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \cos^2 x\,dx,$

d) $\displaystyle\int_{\frac{1}{3}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \sin^3 x\,dx,$

e) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^3 x \cos^2 x\,dx,$

f) $\displaystyle\int_{-\pi}^{0} \cos^3 x \sin^2 x\,dx,$

g) $\displaystyle\int_{2\sqrt{3}}^{3\sqrt{2}} \frac{1}{x\sqrt{x^2-9}}\,dx,$

h) $\displaystyle\int_0^{\frac{3}{2}} \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}\,dx,$

i) $\displaystyle\int_2^4 \sqrt{16-x^2}\,dx.$

Řešení. a) $\frac{1}{4}\pi$, b) $\frac{1}{24}(22\pi+3\sqrt{3})$, c) $\frac{1}{24}(2\pi-3\sqrt{3})$, d) $\frac{11}{24}$, e) $\frac{2}{15}$, f) 0, g) $\frac{1}{36}\pi$, h) $\frac{3}{8}(2\pi-3\sqrt{3})$, i) $\frac{2}{3}(4\pi-3\sqrt{3})$.

4.404. Bez určení primitivní funkce zdůvodněte vztahy:

a) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin x\,dx = 0,$

b) $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{3}{2}\pi} \sin^{101} x\,dx = 0,$

c) pro libovolné $a \in R$

$\displaystyle\int_{-a}^{a} \sin^5 3x\,dx = 0,$

d) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin^8 x \cos x\,dx = 0,$

e) $\int_0^\pi \sin^2 x\, dx = \int_0^\pi \cos^2 x\, dx = \frac{1}{2}\pi$ (nejprve zjistíte, že integrály se rovnají a potom uvážíte, že znáte součet integrandů).

4.405. a) Dokažte, že pro všechna kladná a platí

$$\int_{1/a}^{a} \frac{1}{x} \ln x\, dx = 0.$$

b) Buď f funkce splňující

$$f(\tfrac{1}{2}\pi + y) = f(\tfrac{1}{2}\pi - y)$$

pro všechna $y \in R$. Dokažte, že pro každé $a \in R$ platí

$$\int_{\frac{1}{2}\pi - a}^{\frac{1}{2}\pi + a} f(x) \cos x\, dx = 0.$$

Řešení.
a) Stačí předpokládat, že $a > 1$. Interval $(1/a, a)$ rozdělíme na dva intervaly: $(1/a, 1)$ a $(1, a)$. Na jednom z intervalů provedeme substituci $x = 1/u$. Porovnáním tohoto integrálu se zbývajícím dostaneme výsledek. b) Stačí předpokládat, že $a > 0$. Poněvadž

$$\cos(\tfrac{1}{2}\pi \pm x) = \mp \sin x,$$

dostaneme výsledek stejně jako v a) rozdělením integračního intervalu na dva: $(\frac{1}{2}\pi - a, \frac{1}{2}\pi)$ a $(\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi + a)$.

4.406. Rozmyslete si, jak z charakteru funkcí lze usoudit na platnost těchto vztahů:

a) $$\int_1^3 (\, x - \sqrt{x}\,)\, dx > 0,$$

b) $$\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{2 - \cos x}}\, dx < 3,$$

c) $$\int_3^4 \frac{x^2 + 1}{(x^2 - 1)x}\, dx > \frac{1}{4},$$

d) $$\int_{-1}^2 (e^x - e^{-x})\, dx > 0.$$

4.407. Buď obsah řezu tělesa rovinou kolmou na osu x roven $f(x)$ a přitom $x \in (a, b)$, $a < b$. Je-li těleso měřitelné, potom jeho objem je roven

$$\int_a^b f(x)\, dx.$$

Dokažte, že objem jehlanu je roven třetině součinu obsahu podstavy a výšky.

Řešení. Osa x se ztotožní se směrem výšky a počátek soustavy souřadnic ($x = 0$) s vrcholem jehlanu. Jestliže výška je h a obsah podstavy S, je obsah řezu jehlanu rovinou kolmou na x ve vzdálenosti $x \in (0, h)$ od vrcholu roven Sx^2/h^2. Proto

$$\int_0^1 Sx^2/h^2\, dt = \tfrac{1}{3}Sh.$$