1. Definice limity funkce.

Značení:
Je-li $x_0 \in R$, $\delta > 0$, budeme značit
$$\mathcal{P}(x_0) = (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta) \equiv \{x \in R; 0 < |x - x_0| < \delta\}$$
prstencové δ-okolí bodu x_0; je-li
$$x_0 = +\infty \text{ (resp. } x_0 = -\infty),$$
značíme, pro libovolné $k \in R$,
$$\mathcal{P}(x_0) = (k, +\infty)$$
$$(\text{resp. } \mathcal{P}(x_0) = (-\infty, k)).$$

2.101. Užitím definice limity funkce dokažte:

a) $\lim\limits_{x\to 2} x^2 = 4$, **b)** $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$,

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x+1}{x-1} = 1$,

d) $\lim\limits_{x\to 3_+} \dfrac{1}{x-3} = +\infty$,

e) $\lim\limits_{x\to 3_-} \dfrac{1}{x-3} = -\infty$,

f) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sin x}{x} = 0$.

Řešení. c) Podle definice limity máme k libovolnému $\varepsilon > 0$ najít $k \in R$ (stačí $k < 0$) tak, aby platilo:
$$x < k \Longrightarrow \left|\frac{x+1}{x-1} - 1\right| < \varepsilon \qquad (*)$$
Je-li $x < 1$, je
$$\left|\frac{x+1}{x-1} - 1\right| < \varepsilon \Longleftrightarrow \left|\frac{2}{x-1}\right| < \varepsilon$$
$$\Longleftrightarrow 2 < \varepsilon(1-x) \Longleftrightarrow x < 1 - 2/\varepsilon.$$
Jestliže pro $\varepsilon > 0$ zvolíme
$$k = 1 - 2/\varepsilon$$
(tedy $k < 1$), platí $(*)$.

d) Máme dokázat:
$$\forall K(>0)\ \exists\delta > 0\ \forall x :$$
$$3 < x < 3 + \delta \Longrightarrow \frac{1}{x-3} > K.$$
Pro $K > 0$ a $x > 3$ je
$$\frac{1}{x-3} > K > 0$$
$$\Longleftrightarrow 0 < x - 3 < 1/K$$
$$\Longleftrightarrow 3 < x < 3 + 1/K.$$
Jesliže k danému $K > 0$ zvolíme $\delta = 1/K$, platí
$$3 < x < 3 + \delta \Longrightarrow \frac{1}{x-3} > K,$$
což jsme měli dokázat.

e) Máme dokázat:
$$\forall K(<0)\ \exists\delta > 0\ \forall x :$$
$$3 - \delta < x < 3 \Longrightarrow \frac{1}{x-3} < K.$$
Pro $K < 0$ a $x < 3$ je
$$\frac{1}{x-3} < K < 0$$
$$\Longleftrightarrow \frac{1}{3-x} > -K > 0$$
$$\Longleftrightarrow 0 < 3 - x < -1/K$$
$$\Longleftrightarrow 3 > x > 3 - (-1/K).$$
Stačí tedy k danému $K < 0$ zvolit $\delta = -1/K$ a důkaz je proveden.

2.102. Rozmyslete si, co vyjadřují následující výroky ($x_0 \in R$):

a) $\exists\varepsilon > 0\ \forall\delta > 0\ \forall x :$
$0 < |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$,

b) $\exists\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x :$
$0 < |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$,

c) $\exists\delta > 0\ \forall\varepsilon > 0\ \forall x :$
$0 < |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$,

d) $\exists k\ \forall K\ \forall x :$

$x > k \Longrightarrow f(x) > K$,

e) $\forall k\ \exists K\ \forall x$:
$x > k \Longrightarrow f(x) > K$.

2.103. Dokažte:

a) Jestliže v nějakém $\mathcal{P}(x_0)$ ($x_0 \in R$ nebo $x_0 = \pm\infty$) platí
$$f(x) \le g(x)$$
a existují-li vlastní limity
$\lim_{x\to x_0} f(x)$ a $\lim_{x\to x_0} g(x)$,
pak
$\lim_{x\to x_0} f(x) \le \lim_{x\to x_0} g(x)$.

b) Jestliže
$\lim_{x\to x_0} f(x) < \lim_{x\to x_0} g(x)$,
pak existuje $\mathcal{P}(x_0)$ tak, že pro body x z tohoto okolí platí
$$f(x) < g(x).$$

c) Jestliže
$\lim_{x\to x_0} f(x) > 0$ (resp. < 0),
pak existuje $\mathcal{P}(x_0)$ tak, že pro body x z tohoto okolí platí
$$f(x) > 0 \text{ (resp. } f(x) < 0) .$$

2.104. Dokažte:

a) Nechť $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ a funkce g je omezená v nějakém $\mathcal{P}(x_0)$ ($x_0 \in R$ nebo $x_0 = \pm\infty$). Pak je
$\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = 0$.

b) Nechť
$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$
a nechť funkce g je zdola omezená v nějakém $\mathcal{P}(x_0)$ ($x_0 \in R$ nebo $x_0 = \pm\infty$). Pak je
$\lim_{x\to x_0}(f(x) + g(x)) = +\infty$.

c) Vyslovte tvrzení analogické k b) pro nevlastní limitu $-\infty$.

d) Nechť
$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$
a nechť funkce g v nějakém okolí $\mathcal{P}(x_0)$ splňuje $g(x) \ge c > 0$. Pak
$\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = +\infty$.
Je-li v $\mathcal{P}(x_0)$ splněno $g(x) \le c < 0$, je
$\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = -\infty$.

2.105. Užitím cvičení 2.104 vypočítejte následující limity:

a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} (x^2 + 2\sin x)$,

b) $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sin x}{x}$,

c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^{-x}\sin x$,

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} x\cos\frac{1}{x}$,

e) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x(\cos x + 3)$,

f) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \cos\frac{1}{x}\ \ln(1 + x)$.

Řešení. a) Poněvadž
$\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$
a funkce $x \to 2\sin x$ je zdola omezená, je podle 2.104.b limita rovna $+\infty$. **b)** 0, **c)** 0, **d)** 0, **e)** $+\infty$, **f)** 0.

2. Výpočet limit.

V příkladech 2.201 – 2.210 vypočítejte dané limity. V případě, že daná funkce nemá v daném bodě oboustrannou limitu, pokuste se vypočítat limity jednostranné.

2.201. Buď
$$f(x) = x^5 - 2x^3 + 3x^2 + x - 1.$$
Spočítejte:

a) $\lim_{x\to 2} f(x)$, b) $\lim_{x\to 0} f(x)$,

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, d) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

Řešení. a) $f(2) = 29$, b) -1, c) $+\infty$, d) $-\infty$.

2.202. Spočítejte:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3-2x^2+x}{2x^3+x^2-2x}$,

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^4-4x^3+x^2}{x^3+x^2+x}$,

c) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3+x^2+x+1}{x^4+x^2-2}$,

d) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^2+3x-4}{3x^2-2x+5}$,

e) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^3+x^2-4}{2x^3+x+11}$,

f) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{3x^2+2x-1}{x^3-x+2}$,

g) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x^3}{x^2+2}-x\right)$,

h) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}}$.

Řešení. a) Poněvadž limita čitatele i jmenovatele je nula, nemůžeme počítat danou limitu přímo podle věty o limitě podílu. Čitatele i jmenovatele však můžeme rozložit na součin kořenového činitele a dalšího polynomu:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3-2x^2+x}{2x^3+x^2-2x}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{x(x^2-2x+1)}{x(2x^2+x-2)}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2-2x+1}{2x^2+x-2} = -\frac{1}{2}.$$

b) 0. c) $-\frac{1}{3}$. d) $\frac{1}{3}$. e) $\frac{1}{2}$. f) 0. g) 0. h) $(\frac{3}{2})^{30}$.

2.203. Spočítejte:

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+2x+3}{(x-1)^2}$,

b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+2x-3}{(x-1)^2}$,

c) $\lim\limits_{x\to -5_+} \dfrac{x}{5+x}$;

d) $\lim\limits_{x\to 3_-} \dfrac{3+x}{3-x}$,

e) $\lim\limits_{x\to 2_+} \dfrac{(x+1)^2}{2-x}$.

Řešení. a) $+\infty$. b) Poněvadž limita čitatele i jmenovatele je nula, postupujeme jako v 2.202.a. Rozkladem čitatele a jmenovatele dostaneme

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2+2x-3}{(x-1)^2}$$
$$= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+3)}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 1} \frac{x+3}{x-1}.$$

Limita čitatele je 4 a je tedy

$$\lim_{x\to 1_+} \frac{x+3}{x-1} = +\infty\,,$$

poněvadž $x-1>0$ pro $x>1$ a limita jmenovatele je nula; podobně

$$\lim_{x\to 1_-} \frac{x+3}{x-1} = -\infty,$$

poněvadž $x-1<0$ pro $x<1$. Proto

$$\lim_{x\to 1_+} \frac{x^2+2x-3}{(x-1)^2} = +\infty$$

a $$\lim_{x\to 1_-} \frac{x^2+2x-3}{(x-1)^2} = -\infty.$$

Oboustranná limita v bodě 1 neexistuje. c) $-\infty$. d) $+\infty$. e) $-\infty$.

2.204. Spočítejte:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+2x}-1}{3x}$,

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$,

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}$,

d) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x^2-25}$,

e) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x+6}-3}{x^3-5x^2+3x+9}$,

f) $\lim\limits_{x\to 9} \dfrac{3-\sqrt{x}}{27-\sqrt{x^3}}$.

Řešení. **a)** Protože limita čitatele i jmenovatele je nula, nemůžeme použít větu o limitě podílu (neurčitý výraz „$\frac{0}{0}$"). Zlomek proto před výpočtem limity rozšíříme výrazem $(\sqrt{1+2x}+1)$, abychom odstanili z čitatele zlomku odmocninu a získali v čitateli faktor „x", který lze zkrátit:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+2x}-1}{3x} =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{1+2x}-1)(\sqrt{1+2x}+1)}{3x(\sqrt{1+2x}+1)}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{1+2x-1}{3x(\sqrt{1+2x}+1)}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{2}{3(\sqrt{1+2x}+1)}$$
$$= \frac{2}{3(\sqrt{1}+1)} = \frac{1}{3}.$$

b) 1. **c)** $\frac{2}{3}$. **d)** $\frac{1}{40}$. **e)** Limita zprava (resp. zleva) je $+\infty$ (resp. $-\infty$); oboustranná limita neexistuje. **f)** $\frac{1}{27}$.

2.205. Spočítejte:

a) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^2+1}-x}$,

b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x}-2\sqrt{x^3}}{\sqrt[4]{x^5}+x\sqrt{x}}$,

c) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt[3]{x^2+1}}{2\sqrt[4]{x^4+1}-\sqrt[5]{x^4+1}}$,

d) $\lim\limits_{x\to 1+} \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$,

e) $\lim\limits_{x\to +\infty} (\sqrt{x^2+x}-x)$,

f) $\lim\limits_{x\to -\infty} (\sqrt{x^2+x}-x)$,

g) $\lim\limits_{x\to \pm\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$,

h) $\lim\limits_{x\to \pm\infty}$ $(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1})$,

i) $\lim\limits_{x\to +\infty} (\sqrt{x-3}-\sqrt{x})$,

j) $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x}(\sqrt{x-3}-\sqrt{x})$,

k) $\lim\limits_{x\to +\infty} (\sqrt{x^2+1}-x)$,

l) $\lim\limits_{x\to -\infty} (\sqrt{x^2+1}-x)$,

m) $\lim\limits_{x\to +\infty} x(\sqrt{x^2+1}-x)$,

n) $\lim\limits_{x\to -\infty} x(\sqrt{x^2+1}-x)$,

p) $\lim\limits_{x\to -\infty} x(\sqrt{x^2+4}-\sqrt{x^2-4})$.

Řešení. **a)** Tato limita je neurčitý výraz „$\frac{\infty}{\infty}$". Čitatele i jmenovatele vydělíme nejvyšší mocninou, tj. x^1; po dělení dostaneme:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2}}+\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x^2}}}{\frac{\sqrt[4]{x^2+1}}{\sqrt[4]{x^4}}-\frac{x}{x}}$$
$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{\frac{1}{x}}}{\sqrt[4]{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}}-1},$$

$\frac{\sqrt{1+0}+\sqrt{0}}{\sqrt[4]{0+0}-1} = -1.$

b) -2. c) $\frac{1}{2}$. d) $+\infty$. e) Jedná se o neurčitý výraz typu „$\infty - \infty$". Výraz převedeme na podíl tak, že zároveň odstraníme odmocninu v čitateli; postupně dostáváme:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\sqrt{x^2+x}-x)(\sqrt{x^2+x}+x)}{(\sqrt{x^2+x}+x)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1} = \frac{1}{\sqrt{1}+1} = \frac{1}{2}.$$

f) $+\infty$. g) ± 1. h) ± 1. i) 0. j) $-\frac{3}{2}$. k) 0. l) $+\infty$. m) $\frac{1}{2}$. n) $-\infty$. p) -4.

2.206. Spočítejte:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{2x}$, b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} 8x}{x}$,

c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} 5x}{\sin 4x}$,

d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 3x + \sin 5x}{\sin 2x}$,

e) $\lim\limits_{x\to a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a}$,

f) $\lim\limits_{x\to -1} \frac{x^3+1}{\sin(x+1)}$,

g) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\operatorname{tg}(x-1)}{\sqrt{x}-1}$,

h) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{1-\cos x}}$,

i) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{\cos x}-1}{\sin^2 x}$,

j) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^2(2+\sin x)$,

k) $\lim\limits_{x\to +\infty} e^{-x}\sin x$,

l) $\lim\limits_{x\to +\infty} x\sin x$,

m) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x+\sin x}{x-\cos x}$.

Řešení. a) Tato limita je typu „$\frac{0}{0}$". Při výpočtu limit v bodě 0 typu „$\frac{0}{0}$" výrazů, v nichž se vyskytují goniometrické funkce, snažíme se limitovaný výraz upravit tak, abychom dostali $\lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y}$ $(= 1)$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin 3x}{3x} \cdot 3$$

$$= \frac{3}{2} \lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{3x} = \frac{3}{2},$$

protože

$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{3x} = \lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y} = 1.$

(Zde jsme položili $y = 3x$ a výsledek je důsledkem věty o limitě složené funkce.) b) 8. c) $\frac{5}{4}$. d) 4. e) $\cos a$. f) 3. g) 2. h)

$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{1-\cos x}} = \lim_{x\to 0} \frac{x\sqrt{1+\cos x}}{\sqrt{1-\cos^2 x}}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{x}{|\sin x|}\sqrt{1+\cos x}.$

Přitom je

$\lim_{x\to 0+} \frac{x}{|\sin x|} = 1,$

$\lim\limits_{x\to 0_-} \frac{x}{|\sin x|} = \lim\limits_{x\to 0_-} \frac{x}{-\sin x} = -1.$

Oboustranná limita tedy neexistuje, ale

$\lim_{x\to 0+} \frac{x}{\sqrt{1-\cos x}} = \sqrt{2}$

a

$\lim_{x\to 0-} \frac{x}{\sqrt{1-\cos x}} = -\sqrt{2}.$

i) $-\frac{1}{4}$. j) $+\infty$. k) 0. l) Limita neexistuje. m) 1.

2.207. Spočítejte:

a) $\lim\limits_{x\to +\infty} (\sin\sqrt{x+1} - \sin\sqrt{x})$,

b) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}\pi} \frac{1-\sin x}{\pi - 2x}$,

c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{\sqrt{x+3}-\sqrt{3}}$,

d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x^3}$,

e) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{4}\pi} \dfrac{\sin x - \cos x}{\cos 2x}$,

f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^3 \frac{x}{2}}{x^3}$,

g) $\lim\limits_{x\to\pi+} \dfrac{\sqrt{1+\cos x}}{\sin x}$,

h) $\lim\limits_{x\to 0} x \operatorname{cotg} 2x$,

i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1-\cos x^2}}{1-\cos x}$,

j) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{1}{|\cos x|}$,

k) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2(1-\cos\dfrac{1}{x})$.

Řešení. **a)** 0, **b)** 0, **c)** $4\sqrt{3}$, **d)** $+\infty$, **e)** $-\frac{1}{\sqrt{2}}$, **f)** $\frac{1}{8}$, **g)** $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$, **h)** $\frac{1}{2}$, **i)** $\sqrt{2}$, **j)** $+\infty$, **k)** $\frac{1}{2}$.

2.208. Spočítejte:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x}$,

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+3x)}{x}$,

c) $\lim\limits_{x\to 1+} \ln \dfrac{x-1}{x+1}$,

d) $\lim\limits_{x\to -1-} \ln \dfrac{x-1}{x+1}$,

e) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \ln \dfrac{x-1}{x+1}$,

f) $\lim\limits_{x\to e} \dfrac{\ln x^x - x}{2-\ln x^2}$,

g) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$,

h) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$,

i) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{2}{e^x - e^{-x}}$,

j) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$,

k) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$,

l) $\lim\limits_{x\to 0\pm} \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$,

m) $\lim\limits_{x\to e} \dfrac{\ln x - 1}{x - e}$,

n) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x^2)}{\ln(1-x^2)}$,

p) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x}$,

r) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x - 1}{x}$, $(a > 0)$,

s) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(\sqrt{x^2+1} - x)$.

Řešení.

a) Podle definice funkce $\ln x$ (viz. skripta J. Štěpánek: Matematika pro přírodovědce I) je pro všechny body $x > -1$ splněna nerovnost

$$\tfrac{x}{1+x} \le \ln(1+x) \le x.$$

Ta pro $x > 0$ dává

$$\tfrac{1}{1+x} \le \tfrac{\ln(1+x)}{x} \le 1$$

a pro $x \in (-1, 0)$

$$\tfrac{1}{1+x} \ge \tfrac{\ln(1+x)}{x} \ge 1.$$

Jelikož $\lim_{x\to 0} \frac{1}{1+x} = 1$, je podle věty o limitě sevřené funkce i

$$\lim_{x\to 0} \tfrac{\ln(x+1)}{x} = 1.$$

b) 3. **c)** $-\infty$. **d)** $+\infty$.

e) Limitu vypočítáme podle věty o limitě složené funkce:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \tfrac{x-1}{x+1} = 1,$$

funkce $\ln y$ je spojitá v bodě 1, tedy

$$\lim_{x\to\pm\infty} \ln \tfrac{x-1}{x+1} = \lim_{y\to 1} \ln y = \ln 1 = 0.$$

f) $-\frac{1}{2}$. **g)** $\pm\infty$. **h)** $+\infty$. **i)** 0. **j)** ± 1. **k)** ± 1. **l)** $\pm\infty$. **m)** e^{-1}. **n)** -1. **p)** Vztahem $x = \ln(y+1)$

vyjádříme x pomocí nové proměnné y. Poněvadž

$$\lim_{y\to 0} \ln(y+1) = 0,$$

dostáváme použitím věty o limitě složené funkce

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = \lim_{y\to 0} \frac{e^{\ln(y+1)}-1}{\ln(y+1)}$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{y}{\ln(y+1)} = 1$$

(podle a)). **r)** $\ln a$. **s)** $-\infty$.

2.209. Spočítejte:

a) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x(2^{\frac{1}{x}}-1)$,

b) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (1+\dfrac{1}{x})^x$,

c) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$,

d) $\lim\limits_{x\to 0}(1+4x)^{\frac{1}{3x}}$,

e) $\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1+x}{1-x}}$,

f) $\lim\limits_{x\to 1_\pm} e^{\frac{1+x}{1-x}}$,

g) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} e^{\frac{1+x}{1-x}}$,

h) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (1+\dfrac{b}{x})^x$, $b\in R$.

Řešení. a) Poněvadž

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = 0,$$

je $\lim_{x\to\pm\infty} 2^{\frac{1}{x}} = 2^0 = 1$ (podle věty o limitě složené funkce). Limitu daného součinu nemůžeme vypočítat přímo, protože se jedná o neurčitý výraz „$\infty \cdot 0$“. Pokusme se limitovaný výraz převést na limitu $\lim_{y\to 0} \frac{e^y-1}{y} = 1$. Vyjádříme-li x pomocí $\frac{1}{y}$, můžeme psát:

$$\lim_{x\to\pm\infty} x(2^{\frac{1}{x}}-1)$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{1}{y}(2^y-1)$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{e^{y\ln 2}-1}{y}$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{e^{y\ln 2}-1}{y\ln 2} \ln 2 = \ln 2,$$

poněvadž

$$\lim_{y\to 0} \frac{e^{y\ln 2}-1}{y\ln 2} = 1$$

(porovnejte s 2.208.r). **b)** e, **c)** e, **d)** $e^{\frac{4}{3}}$, **e)** e, **f)** pro $x\to 1_+$ (resp. 1_-) je limita 0 (resp. $+\infty$), **g)** e^{-1}, **h)** e^b.

2.210. Spočítejte:

a) $\lim\limits_{x\to 2_-} \arcsin \dfrac{1}{3-x}$,

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin x}{x}$,

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin 5x}{3x}$,

d) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \arcsin \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$,

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \arcsin \dfrac{1-x}{1+x}$,

f) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^{-x}}{\arcsin \frac{1}{x}}$,

g) $\lim\limits_{x\to+\infty} \arccos(\sqrt{x^2+x}-x)$,

h) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\operatorname{arccotg} x}{x^2-x}$,

i) $\lim\limits_{x\to-2_\pm} \operatorname{arctg} \dfrac{1}{2+x}$,

j) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \operatorname{arctg} \dfrac{x-1}{x+1}$,

k) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}$,

l) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \operatorname{arccotg} \dfrac{x}{x^2+1}$,

m) $\lim\limits_{x\to\pm 0} \operatorname{arccotg} \dfrac{1}{x}$,

n) $\lim\limits_{x\to-\infty}$ $\operatorname{arccotg}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})$,

p) $\lim\limits_{x\to 1} \sqrt{\dfrac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \dfrac{1}{(x-1)^2}}$,

r) $\lim_{x\to -3} \dfrac{\arcsin(3+x)}{x^2+3x}$,

s) $\lim_{x\to 1_-} \dfrac{\arcsin x}{x(x-1)}$.

Řešení. **a)** $\frac{1}{2}\pi$, **b)** 1, **c)** $\frac{5}{3}$, **d)** $\pm\frac{1}{2}\pi$, **e)** $-\frac{1}{2}\pi$, **f)** $-\infty$, **g)** $\frac{1}{3}\pi$, **h)** 0, **i)** $\pm\frac{1}{2}\pi$, **j)** $\frac{1}{4}\pi$, **k)** 0, **l)** $\frac{1}{2}\pi$, **m)** pro $x \to 0_+$ (resp. $x \to 0_-$) je limita 0 (resp. π), **n)** $\frac{1}{2}\pi$, **p)** 0, **r)** $-\frac{1}{3}$, **s)** $-\infty$.

3. Asymptoty.

2.301. **a)** Asymptotou funkce f v nevlastním bodě $+\infty$ nazýváme přímku $y = ax + b$ s koeficienty a, b takovými, že

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - ax - b) = 0.$$

Dokažte, že pro čísla a, b platí

$$a = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x},$$
$$b = \lim_{x\to+\infty}(f(x) - ax).$$

b) Definujte asymptotu v bodě $-\infty$. **c)** Existuje asymptota v nevlastních bodech funkce $g(x) = \ln(x^2+1)$? **d)** Buď $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = A$. Dokažte, že z toho plyne

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = A \ (A \in R, \pm\infty).$$

e) Buď

$$f(x) = \frac{\sin x^2}{x}.$$

Najděte asymptoty funkce f v nevlastních bodech. Ukažte také, že $\lim_{x\to\pm\infty} f'(x)$ neexistuje. Není proto obecně možné hledat směrnici asymptoty jako limitu derivace.

Řešení. **c)** Funkce asymptoty nemá. **d)** Derivace f' existuje na nějakém intervalu $(a, +\infty)$. Podle tvrzení Lagrangeovy věty pro všechna čísla b, x splňující $a < b < x$ platí

$$\frac{f(x) - f(b)}{x - b} = f'(\xi),$$

kde ξ je bod z intervalu (b, x). Jestliže zvolíme číslo b dostatečně veliké, je pravá strana blízká k hodnotě A. Současně rozdíl levé strany poslední rovnosti a výrazu $f(x)/x$ je

$$\begin{aligned}
&\frac{f(x) - f(b)}{x - b} - \frac{f(x)}{x} \\
&= \frac{b(f(x) - f(b)) + f(b)(b - x)}{x(x - b)} \\
&= \frac{b}{x}\,\frac{f(x) - f(b)}{x - b} - \frac{f(b)}{x} \\
&= \frac{b}{x} f'(\xi) - \frac{f(b)}{x}.
\end{aligned}$$

Necháme-li $x \to +\infty$, konverguje tento rozdíl k nule, a proto je dokázáno, že

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = A.$$

e) Asymptotou je v obou nevlastních bodech přímka $y = 0$. Přitom

$$f'(x) = -\frac{\sin x^2}{x^2} + 2\cos x^2.$$

Limita v nevlastním bodě prvního členu vpravo je nula a limita druhého členu neexistuje.