Prvky R_n budeme zapisovat jako řádkové vektory

$$\vec{u} = (u_1, \dots, u_n)$$

nebo sloupcové vektory

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}.$$

(Ve druhém případě šipka nad u chybí záměrně; pouze řádkové vektory budou zpravidla označovány šipkou.) Vystačili bychom se zápisem ve formě sloupcových vektorů, ale pro úsporu místa je někdy výhodné zvolit řádkovou formu zápisu. Transponovanou matici k matici A budeme označovat A'. Formálně vzato je

$$u = \vec{u}\,'.$$

Řádkový vektor $\vec{u}$ lze chápat jako matici typu $(1, n)$ a transposice dá příslušný sloupec. Jednotkovou matici budeme označovat I. Diagonální matice je vytvořena souborem svých diagonálních prvků $d_1, \dots, d_n$; je tedy typu (n, n). Vektor z R_n, který má na j-tém místě jedničku a na všech ostatních místech nuly, budeme označovat $\vec{e}_j$, jde-li o řádkový vektor, nebo e_j, bude-li se jednat o sloupcový vektor. Lineárním obalem skupiny vektorů nazveme množinu vektorů, které lze dostat jako všechny lineární kombinace vektorů dané skupiny.

Řekneme, že množina vektorů $M \subset R_n$ má vlastnost LIN (linearity), když platí

(i) pro každou dvojici $x_1, x_2 \in M$ je $x_1 + x_2 \in M$,

(ii) pro každou dvojici $x \in M$ a $\alpha \in R$ je $\alpha x \in M$.

1. Vektory a matice.

1.101. Spočítejte

a) a nakreslete v rovině $t_1\vec{u}_1 + t_2\vec{u}_2$, kde

$\vec{u}_1 = (1, 2), t_1 = 2,$
$\vec{u}_2 = (-1, 1), t_2 = 1,$

b) $t_1\vec{u}_1 + t_2\vec{u}_2$, kde

$\vec{u}_1 = (1, 1, -2), t_1 = 3,$
$\vec{u}_2 = (3, -1, 2), t_2 = -2,$

c) $t_1\vec{u}_1 + t_2\vec{u}_2 + t_3\vec{u}_3$, kde

$\vec{u}_1 = (-1, 3, 2, 3, 0), t_1 = 2,$
$\vec{u}_2 = (3, 2, 2, -4, 1), t_2 = -1,$
$\vec{u}_3 = (1, 1, -2, 2, 2), t_3 = 3,$

d) $s_1\vec{y}_1 + s_2\vec{y}_2 + s_3\vec{y}_3$, kde

$\vec{y}_1 = (-1, 3, 2), s_1 = -1,$
$\vec{y}_2 = (1, 1, 0), s_2 = 1,$
$\vec{y}_3 = (-1, 1, 1), s_3 = 2,$

e) $s_1\vec{y}_1 + s_2\vec{y}_2 + s_3\vec{y}_3 + s_4\vec{y}_4$, kde

$\vec{y}_1 = (1, -1, 0, 0), s_1 = 2,$
$\vec{y}_2 = (2, 2, 3, -1), s_2 = -1,$
$\vec{y}_3 = (-1, 0, 0, -2), s_3 = 2,$
$\vec{y}_4 = (7, 1, -1, -2), s_4 = 1,$

f) $3\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3 + 4\vec{e}_4, \vec{e}_i \in R_4$.

Řešení. a) $(1, 5)$, **b)** $(-3, 5, -10)$, **c)** $(-2, 7, -4, 16, 5)$, **d)** $(0, 0, 0)$, **e)** $(5, -3, -4, -5)$, **f)** $(3, -2, 1, 4)$.

1.102. Charakterisujte jednoduše lineární obaly skupin vektorů

a) $\vec{e}_1, \vec{e}_2 \in R_3$,
b) $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \in R_3$,
c) $(0,0,0)$,
d) $(1,1,1), (-1,1,1)$,
e) $(1,1,0), (-1,1,1)$,
f) $(1,2,1), (3,-4,2)$.

Řešení. a) $\{(x_1, x_2, x_3); x_3 = 0\}$, b) R_3, c) $\{(0,0,0)\}$, d) $\{(x_1, x_2, x_3); x_2 = x_3\}$, e) $\{(x_1, x_2, x_3); x_1 - x_2 + 2x_3 = 0\}$, f) $\{(x_1, x_2, x_3); 8x_1 + x_2 - 10x_3 = 0\}$.

1.103. Rozhodněte, zda tyto množiny mají vlastnost LIN:
a) $\{(0,0,0)\}$, b) R_4,
c) $\{(x_1, x_2, x_3) \in R_3; x_3 = 0\}$,
d) $\{(x_1, x_2, x_3) \in R_3; x_2 = 1\}$,
e) $\{(x_1, x_2, x_3) \in R_3; x_2 + 2x_3 = 0\}$,
f) $\{(x_1, x_2, x_3) \in R_3; x_1 - 4x_3 = 1\}$,
g) $\{(x_1, x_2, x_3) \in R_3; x_1^2 + x_2^2 < 10\}$,

Řešení. a) ano, b) ano, c) ano, d) ne, e) ano, f) ne, g) ne.

1.104. Dokažte, že lineární obal skupiny vektorů má vlastnost LIN.

1.105. Dokažte, že lineární obal skupiny vektorů je stejný jako lineární obal skupiny, která vznikne z dané skupiny jednou z těchto operací:

(i) vzájemně vyměníme dva vektory dané skupiny;

(ii) jeden z vektorů vynásobíme nenulovým číslem;

(iii') k jednomu z vektorů přičteme násobek jiného vektoru;

(iii) k jednomu z vektorů přičteme lineární kombinaci ostatních vektorů .

(iv) vynecháme ze skupiny nulový vektor.

1.106. Buďte dány matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$F = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$H = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix},$$

$$L = (1 \quad 2), M = (1 \quad 1 \quad -2),$$

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

a) Určete typy jednotlivých matic.
b) Spočítejte $3A, 2A - B, 2\pi F - \pi G, 8C - 3P, 7F - 4G$.
c) Které matice a v jakém pořadí lze vzájemně násobit? Spočítejte

$AH, HL, CA, PC, AJ, JG,$
$KJ, BJ, PF, LP, MK.$

Ve kterých případech je součin definován i pro převrácené pořadí matic?
d) Spočítejte HM a MH. Výsledné matice nejsou stejného typu a nemohou se proto rovnat. Spočítejte CP a PC. Tyto dvě matice jsou sice stejného typu, ale nerovnají se. (Násobení matic není komutativní.)

e) Násobení matic je asociativní operace. Pro libovolné matice X, Y, Z platí

$$(XY)Z = X(YZ),$$

jakmile násobení jsou definována. Výpočtem ukažte, že

$$(PC)G = P(CG).$$

f) Rozhodněte, zda součiny mají smysl a vypočítejte:

$$P^3, CAJF, LAM', G'BM'\ .$$

g) Spočítejte C^2. Součin dvou matic může být matice nulová, i když žádný z činitelů se nulové matici nerovná.

h) Spočítejte AI a IJ, kde I je příslušná jednotková matice.

i) Nechť D je diagonální matice vytvořená prvky 1, -1, 2. Určete

$$KD,\ DK,\ BD,\ DJ.$$

Jak se mění sloupce (resp. řádky) matice, když ji násobíme zprava (resp. zleva) diagonální maticí?

j) Pro libovolné matice X, Y, Z platí (distributivní zákon)

$$(X+Y)Z = XZ + YZ,$$
$$Z(X+Y) = ZX + ZY,$$

jakmile operace mají smysl. Ověřte, že platí

$$(A+B)J = AJ + BJ,$$
$$P(A+B) = PA + PB.$$

V 1.202. při úvahách o řešení lineárních soustav použijeme tuto podobu posledního vztahu: pro každou matici T typu (m, n) a $x, y \in R_n$ platí

$$T(x+y) = Tx + Ty. \qquad (*)$$

k) Buďte

$$I_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Spočítejte $I_1K, I_2K,\ KI_1, KI_2$. Ve všech případech se součin matic liší od matice K pouze pořadím řádků (resp. sloupců) . Jak souvisí toto přemístění řádků (resp. sloupců) s rozložením jedniček v maticích I_j při násobení zleva (resp. zprava) maticí I_j?

l) Buď $I_{ij}, i \neq j$, matice, kterou dostaneme z jednotkové tím, že na místo (i, j) napíšeme jedničku. Najděte KI_{ij}. Jaká operace se sloupci matice K vede k KI_{ij}? Podobně pro $I_{ij}K$.

m) Pro každou matici platí

$$(X')' = X.$$

Pro libovolné matice platí

$$(XY)' = Y'X',$$

jakmile součiny matic mají smysl. Ověřte, že

$$(K')' = K,\ (KJ)' = J'K'.$$

Řešení. b)

$$3A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -9 \\ 0 & -3 & 6 \end{pmatrix},$$

$$2A - B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -7 \\ -2 & -4 & 3 \end{pmatrix},$$

$$2\pi F - \pi G = \begin{pmatrix} 0 \\ -5\pi \end{pmatrix},$$

$$8C - 3P = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -20 & 1 \end{pmatrix},$$

$$7F - 4G = \begin{pmatrix} -1 \\ -19 \end{pmatrix}.$$

c) $$AH = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix},$$

$$HL = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix},$$

$$CA = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$
$$PC = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 7 & 7 \end{pmatrix},$$
$$AJ = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix},$$
$$JG = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, KJ = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 11 & 2 \\ 9 & 0 \end{pmatrix},$$
$$BJ = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix},$$
$$PF = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}, LP = (11 \quad -5),$$
$$MK = (1 \quad 4 \quad -1).$$

f)
$$P^3 = \begin{pmatrix} 39 & 13 \\ 52 & -39 \end{pmatrix},$$
$$CAJF = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$
$$LAM' = (-1), G'BM' = (4).$$

g) Všechny prvky matice C^2 jsou rovny nule.

i) Jesliže násobíme matici zprava (resp. zleva) maticí diagonální vytvořenou prvky $d_1, \ldots, d_n$ násobí se j-tý sloupec (řádek) dané matice číslem d_j.

k) Při násobení zprava maticí I_i se vyměňují sloupce a při násobení zleva řádky.

l) Při násobení zprava maticí I_{ij} se k j-tému sloupci přičte i-tý sloupec matice K. Při násobení zleva přičítáme k řádku i-tému řádek j-tý.

1.107. **a)** Pro
$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$
spočítejte A^2, A^3 a $A^n, n \in N$.

b) Spočítejte, $n \in N$,
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n,$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^{n+1}.$$

Řešení. a)
$$A^n = \begin{pmatrix} \cos n\alpha & -\sin n\alpha \\ \sin n\alpha & \cos n\alpha \end{pmatrix},$$
b)
$$\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Soustavy lineárních rovnic; Gaussova eliminační metoda.

1.201. Nehomogenní soustavu zapište pomocí násobení matic. Co je příslušná homogenní soustava?

a)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 0, \\ x_1 \qquad - 2x_3 &= 3, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 &= -6, \end{aligned}$$
b)
$$y_1 + 2y_2 - 2y_3 - y_4 = 3,$$
c)
$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= 3, \\ z_1 + 2z_2 &= 4, \\ 2z_1 + 3z_2 &= 7, \\ 3z_1 - 5z_2 &= 1, \end{aligned}$$
d)
$$\begin{aligned} p + q - r &= 0, \\ 2p + 3q + 4r &= 0, \\ p \qquad - r &= 13. \end{aligned}$$

Řešení. a) Nehomogenní soustava má tvar $Ax = b$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix},$$

tj. $x \in R_3$. Příslušná homogenní soustava se zapíše jako $Ax = 0$, kde 0 označuje nulovou matici typu $(3,1)$.

1.202. Buď dána soustava

$$Ax = b. \qquad (*)$$

a) Nechť x splňuje $(*)$ a y vyhovuje $Ay = 0$. Dokažte, že $x_1 = x + y$ splňuje $Ax_1 = b$. Vektor x_1 je tedy také řešením $(*)$.

b) Nechť každý z vektorů x_1, x_2 řeší $(*)$, tj. $Ax_1 = b$, $Ax_2 = b$. Dokažte, že $v = x_1 - x_2$ vyhovuje

$$Av = 0. \qquad (**)$$

c) Buď x_0 nějaké řešení $(*)$, tj. $Ax_0 = b$. Potom každé řešení x soustavy $(*)$ lze zapsat ve tvaru

$$x = x_0 + y,$$

kde vektor y vyhovuje $Ay = 0$.

Řešení. Použijeme vztah $(*)$ z 1.106.j. **a)** $Ax_1 = A(x + y) = Ax + Ay = b + 0 = b$, **b)** $Av = Ax_1 - Ax_2 = b - b = 0$, **c)** Položme $y = x - x_0$. Potom $Ay = A(x - x_0) = Ax - Ax_0 = b - b = 0$.

1.203. Ukažte, že $M = \{v \in R_n; Av = 0\}$, kde A je matice typu (m, n) (M je množina řešení soustavy 1.202.b.$(**)$), má vlastnost LIN.

1.204. Na několika příkladech ukážeme typy soustav, k nimž budeme směřovat eliminováním vhodných proměnných z některých rovnic zadané soustavy. Rozmyslete si, proč jsou to právě tyto typy.

a) Soustava

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 - x_3 &= -7, \\ 2x_2 + 3x_3 &= 8, \\ x_3 &= 2, \end{aligned}$$

má jediné řešení

$$(x_1, x_2, x_3) = (-1, 1, 2).$$

b) Soustava

$$\begin{aligned} 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 + x_4 &= -1, \\ 2x_2 - x_3 - x_4 &= 1, \end{aligned}$$

dovoluje vyjádřit

$$x_2 = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}x_3 + \tfrac{1}{2}x_4 ,$$

$$x_1 = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}x_4 .$$

Proměnné x_3 a x_4 nahradíme parametry $s, t \in R$ a tím dostaneme pro řešení vztah

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, 0, 0)$$
$$+ s(0, \tfrac{1}{2}, 1, 0) + t(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, 0, 1) . \quad (*)$$

Vektor $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0)$ řeší danou soustavu a vektory $(0, \frac{1}{2}, 1, 0)$, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 1)$ řeší příslušnou homogenní soustavu. Dosazením do levých stran soustavy si lze správnost výpočtu snadno ověřit. To vždy udělejte! Snažíme se však obvykle o co nejjednodušší tvar výsledku. Jestliže místo s (resp. t) dosadíme $2u$ (resp. $-1 + 2v$), dostaneme

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 0, 0, -1)$$
$$+ u(0, 1, 2, 0) + v(1, 1, 0, 2).$$

Tento výsledek neobsahuje zlomky a jeho správnost se ověří ještě snadněji, než tomu bylo v případě řešení $(*)$. Pro její jednoduchost dávejte právě takové formě výsledků přednost.

Ať už vyjádříme řešení jakkoliv, je minimální počet parametrů, které potřebujeme, abychom zachytili všechna řešení soustavy, vždycky stejný. Porovnejte s 1.313 a 1.314.

c) Někdy roli parametrů - a to přirozeným způsobem - převezmou jiné proměnné, než ty s nejvyššími indexy. Například soustava

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 1, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 &= 2, \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 2x_5 &= 2, \end{aligned}$$

se upraví snadno na soustavu

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 1, \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 &= 1, \\ x_4 + x_5 &= 1. \end{aligned}$$

Parametry je nutno dosadit za proměnné x_3 a x_5 a ne za x_4 a x_5. Soustavu lze upravit také na tvar

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 1, \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 &= 3, \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 0, \end{aligned}$$

a x_1, x_2 nahradit parametry.

d) Soustava může mít i tvar

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + 3\,x_3 &= 1, \\ 0 &= 1. \end{aligned}$$

Tato soustava řešení nemá.

Je zřejmé, že výsledky úloh je užitečné uvést pouze pro případy, kdy řešení neexistuje, existuje jediné, a snad i v případě, kdy k popisu řešení stačí jediný parametr. V případě, že parametry jsou aspoň dva, nemusí být jasné na první pohled, že řešení vypočítané dvěma řešiteli se shodují. Proto zkoušku udělejte vždy sami.

1.205. (*Obecné řešení* soustavy lineárních rovnic.) Uvědomte si, že zápis označený $(*)$ v 1.204.b vlastně vyjadřuje:

(i) Ke každému řešení

$$(x_1, x_2, x_3, x_4)$$

soustavy existují čísla $s, t \in R$ tak, že řešení je vyjádřeno $(*)$.

(ii) Pro každé $s, t \in R$ je vektor (x_1, x_2, x_3, x_4) daný $(*)$ řešením soustavy.

Shrnuto: Pokud skupina řešení homogenní soustavy vystupující ve vztahu typu $(*)$ (který dává každé řešení původní soustavy) je lineárně nezávislá, nazveme takový vztah *obecným řešením*.

1.206. Dokažte, že množina řešení soustavy lineárních rovnic je stejná jako množina řešení soustavy, která se dostane ze soustavy dané jednou z těchto operací:

(i) vzájemně vyměníme dvě rovnice dané soustavy;

(ii) jednu z rovnic násobíme nenulovým číslem;

(iii') k jedné z rovnic přičteme násobek jiné rovnice;

(iii) k jedné z rovnic přičteme lineární kombinaci ostatních rovnic,

(iv) vynecháme ze soustavy rovnici, jejíž všechny koeficienty jsou nulové.

1.207. Řešte soustavy v 1.201.

Řešení. **a)** $(1, -2, -1) + u(4, 1, 2)$, **b)** $(3, 0, 0, 0) + s(-2, 1, 0, 0) + t(2, 0, 1, 0) + u(1, 0, 0, 1)$, **c)** $(2, 1)$, **d)** $(\frac{91}{6}, -13, \frac{13}{6})$.

1.208. Úpravou tabulky sestavené z koeficientů lineární soustavy najděte všechna řešení

a)
$$\begin{aligned} 3x + 4y &= 1, \\ 2x + 5y &= 3, \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 2x - y &= 3, \\ -6x + 3y &= -9, \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} 3x + 4y &= 5, \\ 6x + 8y &= 9, \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} x_1 \phantom{{}- x_2} + 2x_3 &= 1, \\ 3x_1 - x_2 \phantom{{}+ 2x_3} &= 3, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= 4, \end{aligned}$$

e)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 7, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 4, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 &= 3, \end{aligned}$$

f)
$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 - x_3 &= 2, \\ 5x_1 - 4x_2 + x_3 &= -6, \\ 7x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 2, \end{aligned}$$

g)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 1, \\ 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 3, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 &= 0, \\ 2x_1 - 8x_2 + 10x_3 &= 5, \end{aligned}$$

h)
$$\begin{aligned} 8x_1 + 9x_2 - 3x_3 &= 4, \\ -2x_1 - x_2 + 4x_3 - 3x_4 &= 3, \\ 2x_1 + 6x_2 + 9x_3 - 9x_4 &= 13, \\ 5x_2 + 13x_3 - 12x_4 &= 16, \end{aligned}$$

i)
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 &= -1, \\ 5x_1 - 3x_3 - 2x_4 &= 2, \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 9x_4 &= 5, \end{aligned}$$

j)
$$\begin{aligned} 2x_1 - 4x_2 - 5x_3 - 2x_4 &= 0, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + 4x_4 &= 0, \\ 6x_1 + 2x_2 + 2x_4 &= 0, \end{aligned}$$

k)
$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 &= 0, \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 &= 0, \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= 0, \\ x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 &= 0, \end{aligned}$$

l)
$$\begin{aligned} x_1 - 4x_2 + 6x_3 + x_4 &= 0, \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 + 2x_4 &= 0, \\ 7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 0, \\ 9x_1 - 14x_2 + 28x_3 + 7x_4 &= 0, \end{aligned}$$

m) ($a \in R$ je dané číslo)
$$\begin{aligned} ay_1 + y_2 + ay_3 + y_4 &= 0, \\ y_1 + ay_2 + y_3 + ay_4 &= 0, \\ 2y_1 + 3y_2 - 5y_3 + y_4 &= 0, \\ 3y_1 + 4y_2 - 4y_3 + 2y_4 &= 0, \end{aligned}$$

n)
$$\begin{aligned} -y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 &= 0, \\ y_1 - y_2 + y_3 + y_4 + y_5 &= 0, \\ y_1 + y_2 - y_3 + y_4 + y_5 &= 0, \\ y_1 + y_2 + y_3 - y_4 + y_5 &= 0, \\ y_1 + y_2 + y_3 + y_4 - y_5 &= 0, \end{aligned}$$

o)
$$\begin{aligned} 2y_1 - 5y_2 + 3y_4 &= 12, \\ y_1 + 4y_2 - 3y_3 &= -5, \\ 3y_1 - 5y_3 + y_4 &= -4, \\ 4y_1 - y_2 - 2y_3 + y_4 &= 8, \end{aligned}$$

p)
$$\begin{aligned} x_1 - 4x_2 + 2x_3 &= 1, \\ 3x_1 - 7x_2 + 11x_3 - 15x_4 &= 3, \\ x_2 + x_3 - 3x_4 &= 0, \\ 4x_1 - 11x_2 + 13x_3 - 15x_4 &= 4, \end{aligned}$$

q)
$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= 1, \\ x_2 - x_3 &= 0, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 &= 3, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 &= 1, \end{aligned}$$

r) soustavy $Bw = d$, kde $B =$

$$\begin{pmatrix} -3 & -2 & 0 & 6 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 3 & 9 & -6 \\ 4 & -2 & 2 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & -5 & 2 \end{pmatrix},$$

$$w = (w_1, w_2, w_3, w_4, w_5)',$$
$$d = (3, 2, 5, 0, -1)',$$

s) soustavy $Cz = c$, kde $C =$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & 11 & -3 & 8 \\ 1 & -1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 8 & 11 & -2 & 13 \end{pmatrix},$$

$$z = (z_1, z_2, z_3, z_4, z_5)',$$
$$c = (1, 0, 3, 2, 8)',$$

t)
$$\begin{aligned} y_1 - 2y_2 + 3y_3 + y_4 &= -5, \\ 2y_1 - 3y_2 + y_3 - 2y_4 &= -7, \\ y_1 + y_2 + y_3 + y_4 &= 3, \\ 3y_1 + 2y_2 + 5y_3 - y_4 &= 1, \end{aligned}$$

u)
$$\begin{aligned} 2y_1 - 5y_2 \qquad\qquad + 3y_4 &= 12, \\ y_1 + 4y_2 - 3y_3 \qquad\quad &= -5, \\ 3y_1 \qquad - 5y_3 + 4y_4 &= 5, \\ 3y_2 - 2y_3 + y_4 &= -4, \\ 4y_1 - y_2 - 2y_3 + y_4 &= 8, \end{aligned}$$

v)
$$\begin{aligned} y_1 + 2y_2 + 3y_3 + 4y_4 &= 5, \\ 2y_1 + y_2 - y_3 + 3y_4 &= 2, \\ 6y_1 - 3y_2 - 17y_3 - y_4 &= 3, \end{aligned}$$

x)
$$\begin{aligned} 3y_1 - 2y_2 - 3y_3 - 5y_4 &= 3, \\ 2y_1 - 2y_2 - 3y_3 - 4y_4 &= 1, \\ 2y_1 + y_2 + 2y_3 + y_4 &= 4, \\ 2y_1 - y_2 + y_3 - y_4 &= 3. \end{aligned}$$

Řešení. **a)** $(-1, 1)$, **b)**$(0, -3) + s(1, 2)$, **c)** soustava nemá řešení, **d)** $(\frac{19}{13}, \frac{18}{13}, -\frac{3}{13})$, **e)** $(1, 2, 4)$, **f)** $(1, 2, -3)$, **g)** žádné řešení, **h)** dva parametry, jedno řešení nehomogenní soustavy je $(5, -4, 0, -3)$, **i)** $(1, -1, 1, 0) + s(1, 1, 1, 1)$, **j)** $s(1, -1, 2, -2)$, **k)** jediné řešení (nulové), **l)** dva parametry, **m)** pro $a = 1$ jsou k vyjádření řešení třeba dva parametry, pro $a \neq 1$ jeden parametr: řešení je $s(2, -7, -2, 7)$, **n)** jediné řešení (triviální), **o)** $(3, \frac{1}{3}, \frac{28}{9}, \frac{23}{9})$, **p)** dva parametry, jedno řešení nehomogenní soustavy je $(1, 0, 0, 0)$, **q)** řešení neexistuje, **r)** řešení neexistuje, **s)** dva parametry, **t)** $(1, 2, -1, 1)$, **u)** $(2, -1, 1, 1)$, **v)** řešení neexistuje, **x)** $(1, 1, 1, -1)$. .

1.209. V některých případech má soustava jednoduchý tvar. Stojí za pokus takovou soustavu řešit nějakým nestandardním obratem. Výpočet pak může být velmi jednoduchý. Takto hledejte řešení

a)
$$\begin{aligned} y_1 + y_2 \qquad\qquad\quad + y_5 &= -2, \\ y_1 + y_2 + y_3 \qquad\qquad &= 2, \\ y_2 + y_3 + y_4 \qquad &= 1, \\ y_3 + y_4 + y_5 &= -1, \\ y_4 + y_5 &= -2, \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} y_2 + y_3 + y_4 + y_5 &= 1, \\ y_1 \qquad + y_3 + y_4 + y_5 &= 2, \\ y_1 + y_2 \qquad + y_4 + y_5 &= 6, \\ y_1 + y_2 + y_3 \qquad + y_5 &= 2, \\ y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \qquad &= 1, \end{aligned}$$

c) 1.208.k,

d) 1.208.n.

Řešení. **a)** $(2, -1, 1, 1, -3)$; sečtením 2. a 5. rovnice zjistíme, že $y_1 +$

$\ldots + y_5 = 0$. Tohoto vztahu použijeme, když sečteme 1. a 4. rovnici a dostaneme tak $y_5 = -3$. Postupujeme od konce a dopočítáme ostatní hodnoty. **b)** $(2, 1, -3, 1, 2)$; sečtením rovnic dostaneme $y_1 + \ldots + y_5 = 3$ a od tohoto vztahu odečítáme jednotlivé rovnice. **c)** Od 1. odečíst 4. rovnici: $x_3 = 0$. Sečíst 2. a 4. rovnici: $x_2 = 0$. Zůstane systém dvou rovnic pro x_1 a x_4; odtud ihned $x_1 = x_4 = 0$. **d)** Postupujte jako v b).

3. Lineární závislost vektorů; hodnost matice.

1.301. Buďte $u_1, \ldots, u_m$ vektory z R_n. Dokažte:

a) jestliže u_1 je nulový vektor, potom vektory jsou lineárně závislé;

b) jestliže $u_1 = u_2$, potom vektory jsou lineárně závislé;

c) jestliže

$$u_3 = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2,\ \alpha_1, \alpha_2 \in R,$$

potom vektory jsou lineárně závislé;

d) jestliže dvojice nenulových vektorů u_1, u_2 je lineárně závislá, potom existuje $\alpha \in R$ takové, že $u_2 = \alpha u_1$.

1.302. Zjistěte, zda vektory v úloze 1.101 tvoří skupiny lineárně závislé nebo nezávislé.

Řešení. **a)** nezávislá, **b)** nezávislá, **c)** nezávislá, **d)** závislá, **e)** nezávislá, **f)** nezávislá.

1.303. Zjistěte, zda řádky (sloupce) matic J a K z 1.106 jsou lineárně závislé nebo nezávislé.

Řešení. Řádky matice J (resp. K) jsou závislé (resp. nezávislé). Sloupce matic J i K jsou nezávislé.

1.304. Lineární kombinací vektorů $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_4$ vyjádřete $(3, -2, 8, 4)$ a $(\frac{1}{3}\pi, -\pi, \operatorname{arctg} 1, 0)$.

Řešení. $3\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + 8\vec{e}_3 + 4\vec{e}_4$, $\pi(\frac{1}{3}\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \frac{1}{4}\vec{e}_3)$.

1.305. Lineární kombinací vektorů

$$\vec{v}_1 = (1, 2, -3, 1),$$
$$\vec{v}_2 = (-2, 1, 2, -3)$$

vyjádřete

a) $\vec{v}_3 = (-4, 7, 0, -7)$,

b) $\vec{v}_4 = (9, 8, -19, 11)$,

c) $\vec{v}_5 = (0, 5, -4, -1)$,

d) $\vec{v}_6 = (4, 3, -6, 5)$.

Řešení. **a)** $\vec{v}_3 = 2\vec{v}_1 + 3\vec{v}_2$, **b)** $\vec{v}_4 = 5\vec{v}_1 - 2\vec{v}_2$, **c)** $\vec{v}_5 = 2\vec{v}_1 + \vec{v}_2$, **d)** $\vec{v}_6$ není lineární kombinací vektorů $\vec{v}_1$ a $\vec{v}_2$.

1.306. Najděte hodnotu parametru t, pro kterou tyto vektory tvoří skupinu lineárně závislou:

a) $(1, 1, 3), (1, 2, 1), (t, -1, 7)$.

b) $(-1, 3, 2), (2, -2, -1), (1, t, 4)$.

c) $(1, 1, 3, -1), (2, -1, 1, 3), (2, 3, t, 2)$.

Řešení. **a)** $t = 1$. **b)** $t = 5$. **c)** Pro každou hodnotu t jsou vektory lineárně nezávislé.

1.307. Dokažte, že vektory

$$(1, 0, 0, 0, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1),$$
$$(0, 1, 0, 0, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2),$$
$$(0, 0, 1, 0, \alpha_3, \beta_3, \gamma_3),$$

$$(0,0,0,1,\alpha_4,\beta_4,\gamma_4),$$
jsou lineárně nezávislé pro všechny hodnoty α_i, β_i, $\gamma_i \in R$. Zobecněte.

1.308. Dokažte, že vektory
$$(1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7),$$
$$(0,1,b_3,b_4,b_5,b_6,b_7),$$
$$(0,0,1,c_4,c_5,c_6,c_7),$$
$$(0,0,0,1,d_5,d_6,d_7),$$
jsou lineárně nezávislé pro jakékoliv hodnoty a_i, b_i, d_i, c_i. Zobecněte.

1.309. Změníme-li danou skupinu vektorů z R_n některým z následujících způsobů, zůstane lineární nezávislost (resp. lineární závislost) zachována:

(i) vzájemně vyměníme dva vektory dané skupiny;

(ii) jeden z vektorů vynásobíme nenulovým číslem;

(iii') k jednomu z vektorů přičteme násobek jiný vektor skupiny;

(iii) k jednomu z vektorů přičteme lineární kombinaci ostatních.

Řešení. Budeme se zabývat pouze případem, že skupina vektorů je lineárně nezávislá. Je přímým důsledkem definice, že operace (i) a (ii) zachovávají lineární nezávislost. Výměnou vektorů lze dosáhnout toho, že výsledek operace (iii') na skupinu vektorů
$$\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\ldots,\vec{u}_n\},$$
bude skupina
$$\{\vec{u}_1+\vec{u}_2,\vec{u}_2,\ldots,\vec{u}_n\}, \qquad (*)$$
která vznikne přičtením druhého vektoru k prvnímu. Nechť
$$\beta_1(\vec{u}_1+\vec{u}_2)+\beta_2\vec{u}_2+\ldots+\beta_n\vec{u}_n=0$$
pro nějaká $\beta_1,\ldots,\beta_n$. Potom
$$\beta_1\vec{u}_1+(\beta_1+\beta_2)\vec{u}_2+\ldots+\beta_n\vec{u}_n=0,$$
a poněvadž $\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_n$ jsou lineárně nezávislé, znamená to, že
$$\beta_1=0, \beta_1+\beta_2=0,$$
$$\beta_3=0,\ldots,\beta_n=0.$$
Odtud vidíme, že také $\beta_2=0$, a proto skupina $(*)$ je lineárně nezávislá. To, že operace (iii) zachovává lineární nezávislost, se dokáže opakovaným užitím (ii) a (iii').

1.310. Potvrďte, že vektory
$$\vec{w}_1=(1,1,-2,0,3),$$
$$\vec{w}_2=(-1,2,0,2,1),$$
$$\vec{w}_3=(1,1,1,1,1)$$
jsou lineárně nezávislé. Kolik nejvíce vektorů k nim můžete přidat, aby dohromady tvořily skupinu lineárně nezávislých vektorů? Najděte takové vektory.

Řešení. Skupina vektorů $\vec{w}_3$, $\vec{w}_2+\vec{w}_3$, $\vec{w}_1-\vec{w}_2$, ke které dojdeme úpravami popsanými v 1.309, má tvar
$$\vec{w}_3 = (1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1),$$
$$\vec{w}_2+\vec{w}_3=(0,\ 3,\ 1,\ 3,\ 2),$$
$$\vec{w}_1-\vec{w}_3=(0,\ 0,\ -3,\ -1,\ 2);$$
je tedy trojicí lineárně nezávislých vektorů. K těmto vektorům lze přidat nejvíce dva další vektory takové, že skupina bude ještě lineárně nezávislá. Například to mohou být vektory (jak ukazuje analogie k 1.308)
$$\vec{w}_4=(0,0,0,1,\alpha),$$
α libovolné,
$$\vec{w}_5=(0,0,0,0,1).$$
Například vektory $\vec{w}_4$, $\vec{w}_5$ tedy doplňují
$$\{\vec{w}_1,\vec{w}_2,\vec{w}_3\}$$

na skupinu lineárně nezávislých vektorů, která již nemůže být zvětšena. Pokud se přidají jakékoliv další vektory, vznikne skupina lineárně závislých vektorů.

1.311. Najděte hodnost matic v úloze 1.106.

Řešení. $h(A) = 2$, $h(B) = 2$, $h(C) = 1$, $h(F) = h(G) = h(H) = 1$, $h(J) = 2$, $h(K) = 3$, $h(L) = h(M) = 1$, $h(P) = 2$.

1.312. Najděte hodnost matice

a)
$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & 3 \\ -3 & -10 & 1 \end{pmatrix},$$
b)
$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 7 & 2 & 2 \\ 9 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$
c)
$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & -3 & 4 & 5 & 6 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$
d)
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -1 & 3 \\ 2 & -3 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 9 & -7 & -4 & 5 \end{pmatrix},$$
e)
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 32 \\ 1 & -1 & -10 \end{pmatrix},$$
f)
$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & 4 \\ 5 & 8 & -1 \\ 5 & -6 & 7 \\ 7 & -14 & 13 \end{pmatrix},$$
g)
$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 2 & 5 & 4 \\ 7 & 10 & 10 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & -6 & 1 & -6 \\ 3 & 9 & 8 & -3 & -7 \end{pmatrix},$$
h)
$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 8 & -5 & -1 \\ 5 & -1 & 11 & -7 & -2 \end{pmatrix}.$$

Řešení. **a)** 2, **b)** 3, **c)** 2, **d)** 2, **e)** 2, **f)** 2 , **g)** 3, **h)** 3.

1.313. Počet parametrů, které vystupují ve výrazu pro obecné řešení (popsané v 1.205) soustavy
$$Ax = 0,$$
kde A je matice typu (m, n) a $x \in R_n$, je roven
$$n - h(A)\,.$$
Ověřte pro 1.208.j, k, l.

1.314. Je pravda, že počet parametrů ve výrazu pro obecné řešení soustavy
$$Ax = b,$$
kde A je matice typu (m, n) a $x \in R_n$, je roven
$$n - h(A)\ ?$$

Řešení. Je to pravda, pokud soustava má alespoň jedno řešení. To vyplývá z 1.202.c.

4. Determinanty.

1.401. Určete počet inversí v permutaci
a) $\pi_1 = (1,3,2)$, b) $\pi_2 = (3,1,2)$,
c) $\pi_3 = (3,2,1)$, d) $\pi_4 = (3,1,4,2)$,
e) $\pi_5 = (4,2,3,1)$,
f) $\pi_6 = (4,3,2,1)$,
g) $\pi_7 = (3,5,4,2,1)$,
h) $\pi_8 = (4,1,3,6,5,2)$.

Řešení. a) 1, b) 2, c) 3, d) 3, e) 5, f) 6, g) 8, h) 7.

1.402. Zjistěte, zda následující součin je členem součtu tvořícího determinant příslušného stupně a v kladném případě určete, jakým znaménkem je opatřen:
a) $a_{12}a_{21}$, b) $a_{32}a_{21}a_{13}$,
c) $a_{33}a_{21}a_{23}$, d) $a_{43}a_{32}a_{21}a_{14}$,
e) $a_{31}a_{23}a_{44}a_{13}$,
f) $a_{25}a_{31}a_{44}a_{56}a_{64}a_{12}$,
g) $a_{31}a_{54}a_{66}a_{12}a_{25}a_{43}$,
h) $a_{25}a_{34}a_{16}a_{43}a_{61}a_{52}$.

Řešení. a) ano,−, b) ano,+, c) ne, d) ano,−, e) ne, f) ne, g) ano,+, h) ano,−.

1.403. Doplňte chybějící dvojici indexů i,j tak, aby následující součin byl členem součtu tvořícího determinant příslušného stupně a byl přitom opatřen znaménkem minus:
a) $a_{1i}a_{2j}$. b) $a_{3i}a_{21}a_{1j}$.
c) $a_{2i}a_{31}a_{1j}$. d) $a_{21}a_{34}a_{i2}a_{j3}$.
e) $a_{1i}a_{23}a_{42}a_{3j}$.
f) $a_{35}a_{2i}a_{41}a_{66}a_{5j}a_{12}$.

Řešení. a) $i=2, j=1$. b) $i=3, j=2$. c) $i=2, j=3$. d) $i=4, j=1$. e) $i=4, j=1$. f) $i=4, j=3$.

1.404. Podle definice zjistěte
a) hodnotu determinantu
$$\begin{vmatrix} 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 & 0 & d \end{vmatrix},$$
b) koeficienty u x^3 a x^2 polynomu
$$\begin{vmatrix} x & 2 & x \\ 1 & x & -1 \\ x & x & 0 \end{vmatrix},$$
c) hodnotu determinantu
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & 0 & a_{23} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & 0 & a_{43} & 0 & 0 \\ a_{51} & 0 & a_{53} & 0 & 0 \end{vmatrix},$$
d) koeficienty u x^4 a x^3 polynomu
$$\begin{vmatrix} 2x & x & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -x \end{vmatrix},$$
e) koeficienty u x^4 a x^3 polynomu
$$\begin{vmatrix} 3x & 2 & 4 & 5 \\ -2 & 5 & -x & 1 \\ 1 & 5 & 4x & 2 \\ 2x & x & 3 & -x \end{vmatrix},$$
f) platnost vztahu $\det(A)\det(B) =$
$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & 0 \\ c_{11} & c_{12} & b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ c_{21} & c_{22} & b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ c_{31} & c_{32} & b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix},$$
kde je jasné, co se považuje za matice A a B. Zobecněte.

Řešení. a) a^2bcd, b) $-1, 2$, c) 0, d) $-2, 1$, e) (brzy zjistíte, že do úvahy nutno brát pouze součiny obsahující element stojící na místě $(1,1)$) $0, -93$.

1.405. Vypočítejte hodnotu determinantů

a)
$$\begin{vmatrix} a & 0 \\ b & c \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a & a \\ b & -b \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & a \\ b & c \end{vmatrix},$$

b)
$$\begin{vmatrix} a & -a \\ -1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a & 1 \\ -1 & a \end{vmatrix},$$

c)
$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \\ d & e & f \end{vmatrix},$$

d)
$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & 0 \\ f & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

e)
$$\begin{vmatrix} a & a & a \\ 0 & b & 0 \\ b & 0 & b \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} b & c & 0 \\ b & 0 & c \\ b & c & c \end{vmatrix},$$

f)
$$\begin{vmatrix} a & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ a & 0 & -a \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a & 2a & -a \\ 2a & -a & a \\ -a & a & 2a \end{vmatrix}.$$

Řešení. a) $ac, -2ab, -ab$, b) 0, a^2+1, c) adf, acf, d) $-abd, -cef$, e) $0, -bc^2$, f) $-2a^2b, -14a^3$.

1.406. Vypočítejte

a)
$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 252 & -253 \\ 250 & -251 \end{vmatrix},$$

b)
$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 7 & -2 & 0 \\ 8 & 16 & -24 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & -6 \\ 2 & -8 & 10 \end{vmatrix},$$

c)
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 15 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix},$$

d)
$$\begin{vmatrix} -9 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & -1 \\ 9 & 0 & 9 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 4 & 9 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{vmatrix},$$

e)
$$\begin{vmatrix} -4 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -2 & 4 & -4 \\ 3 & -4 & 4 \\ 5 & 3 & -2 \end{vmatrix},$$

f)
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix},$$

g)
$$\begin{vmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 2 & 2 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{4} & \frac{1}{3} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 5 & -7 \\ 2 & 3 & -5 \\ 5 & 4 & -6 \end{vmatrix},$$

h)
$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix},$$

i)
$$\begin{vmatrix} 20 & -10 & 10 & 0 \\ -1 & -2 & 20 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & -1 \end{vmatrix},$$

j) (a, b jsou reálná čísla)

$$\begin{vmatrix} -a & a & 0 & a \\ -b & b & b & b \\ 2a & 0 & -a & -a \\ -2b & 0 & b & -b \end{vmatrix},$$

k) (a, b jsou reálná čísla)

$$\begin{vmatrix} a & a & b & 0 \\ -a & -2a & b & a \\ a & a & b & -a \\ 0 & 0 & b & a \end{vmatrix},$$

l) (a, b jsou reálná čísla)

$$\begin{vmatrix} a & -a & -a & 3a \\ b & 0 & b & 2b \\ -b & -b & 0 & b \\ -a & -a & -a & 0 \end{vmatrix},$$

m) (a, b jsou reálná čísla)

$$\begin{vmatrix} 5a & 3a & -2a & 9a \\ 7b & 4b & 3b & 12b \\ 3b & -8b & b & b \\ 3a & -2a & -2a & 4a \end{vmatrix}.$$

Řešení. **a)** -2, -2, **b)** 96, -16, **c)** $-6, -15$, **d)** $-162, 2$, **e)** $30, -4$, **f)** 1, 3, **g)** $\frac{1}{6}, -10$, **h)** 6, **i)** 10, **j)** $-4a^2b^2$, **k)** $-a^3b$, **l)** $-a^2b^2$, **m)** $45a^2b^2$.

1.407. Nechť

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Dokažte, že vektory $\vec{a} = (a_1, a_2)$ a $\vec{b} = (b_1, b_2)$ jsou lineárně závislé.

Řešení. Vidíme ihned, že nastane alespoň jeden z těchto případů:

(i) $b_1 \neq 0$,

(ii) $b_2 \neq 0$,

(iii) $b_1 = b_2 = 0$.

V případě (iii) je $\vec{b}$ nulový vektor. Vektory $\vec{a}, \vec{b}$ jsou proto lineárně závislé. V případě (ii) je postup stejný jako v případě (i), který nyní probereme. Je-li tedy $b_1 \neq 0$, lze najít $\alpha \in R$ tak, že

$$a_1 = \alpha b_1.$$

Vektory splňují podmínku $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$, ze které (po dosazení za a_1 z posledního vztahu a po krácení b_1) dostáváme

$$a_2 = \alpha b_2.$$

Poslední dva vztahy ukazují, že $\vec{a} - \alpha\vec{b} = \vec{0}$. Tvrzení je dokázáno.

1.408. Jestliže

$$\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0,$$

potom vektory $\vec{u} = (0, u_2, u_3)$ a $\vec{v} = (0, v_2, v_3)$ jsou lineárně závislé; tj. existují reálná čísla α, β, z nichž aspoň jedno není nula, taková, že

$$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{0}.$$

Řešení. Poněvadž první složka obou vektorů je nulová, tvrzení vyplývá z úlohy 1.407.

1.409. Nechť

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Dokažte, že vektory $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ jsou lineárně závislé.

Řešení. Jsou-li všechny 3 složky vektoru $\vec{a}$ rovny 0, jsou vektory $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ lineárně závislé. Buď tedy alespoň jedna ze složek vektoru $\vec{a}$ různá od 0; předpokládejme pro jednoduchost, že je to 1. složka. Nahradíme-li vektor $\vec{a}$ vhodným násobkem (jakým přesně?), můžeme dokonce předpokládat, že $a_1 = 1$. Provedeme 2 řádkové úpravy determinantu, po kterých dostaneme determinant, v němž

1. řádek tvoří $\vec{a}$,

2. řádek tvoří $\vec{u} = \vec{b} - b_1\vec{a}$,

3. řádek tvoří $\vec{v} = \vec{c} - c_1\vec{a}$.

Poněvadž předpokládáme, že $a_1 = 1$, jsou 1. složky vektorů $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ a $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ rovny 0 . Upravený determinant má hodnotu 0 stejně jako původní determinant a rozepsáním podle 1. sloupce dostáváme

$$\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Podle 1.408 existují α, β, z nichž aspoň jedno je různé od nuly, taková, že $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{0}$. Dosazením za $\vec{u}$ a $\vec{v}$ dostaneme

$$-(\alpha b_1 + \beta c_1)\vec{a} + \alpha\vec{b} + \beta\vec{c} = \vec{0}.$$

To ukazuje, že vektory $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ jsou lineárně závislé.

1.410. Najděte kořeny polynomů

a)

$$\begin{vmatrix} x-1, & 2 \\ -1, & x-4 \end{vmatrix} = 0,$$

b)

$$\begin{vmatrix} x-1, & 1, & 1 \\ 2, & x+1, & 1 \\ -1, & 0, & x \end{vmatrix} = 0,$$

c)

$$\begin{vmatrix} \lambda+7, & 11, & 5 \\ 6, & 9-\lambda, & 4 \\ 0, & -1, & \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

d)

$$\begin{vmatrix} \lambda-2, & 3, & -12 \\ -4, & \lambda+15, & -26 \\ -2, & 7, & \lambda-12 \end{vmatrix} = 0,$$

e)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & x & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Řešení. a) $x_1 = 3, x_2 = 2$, **b)** $x_1 = 0, x_{2,3} = \pm\sqrt{2}$, **c)** $\lambda_1 = 2, \lambda_{2,3} = \pm 1$, **d)** $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = -4$, **e)** $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 1$.

1.411. Dokažte tvrzení: jestliže soustava rovnic $Ax = 0$, kde A je čtvercová matice typu (n, n), má netriviální řešení, potom $\det(A) = 0$.

Řešení. Nechť $x_1, \ldots, x_n$ je netriviální řešení soustavy $Ax = 0$. Předpokládejme, že $x_1 \neq 0$; jestliže $x_1 = 0$ vybereme i tak, že $x_i \neq 0$ a postupujeme stejně (zápis je však trochu složitější). Můžeme dokonce předpokládat, že $x_1 = 1$. Toho lze docílit tak, že vezmeme vhodný násobek řešení. Uvažujeme-li o matici A jako o souboru sloupcových vektorů, vztah $Ax = 0$ s $x_1 = 1$ říká, že první sloupec matice A je lineární kombinací ostatních. Pro takovou matici je $\det(A) = 0$.

1.412. Skupina vektorů, $n \geq m$,

$\vec{w}_1 = (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}),$

$\vec{w}_2 = (a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}),$

$\ldots \qquad \ldots$

$\vec{w}_m = (a_{m1}, a_{m2}, \ldots, a_{mn}),$

má tu vlastnost, že determinant matice A, kterou sestavíme z prvních m sloupců, je různý od nuly. Dokažte, že vektory $\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_m$ jsou lineárně nezávislé.

Řešení. Nechť $\alpha_1\vec{w}_1 + \ldots + \alpha_m\vec{w}_m = \vec{0}$ pro nějaká čísla $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in R$. Hodnoty prvních m složek ukazují, že každý z těchto výrazů

$$\begin{array}{c} a_{11}\alpha_1 + a_{21}\alpha_2 + \ldots + a_{m1}\alpha_m, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{1m}\alpha_1 + a_{2m}\alpha_2 + \ldots + a_{mm}\alpha_m \end{array}$$

je roven nule. Čísla $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ jsou tedy řešením soustavy

$$A'\alpha = 0,$$

kde $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)'$. Poněvadž podle předpokladu máme

$$\det(A') = \det(A) \neq 0,$$

je podle 1.411 každé řešení soustavy nulové. Proto všechna $\alpha_i = 0$ a vektory $\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_m$ jsou lineárně nezávislé.

1.413. Změní se něco v předcházející úloze, když bude různý od nuly determinant sestavený z jiných než prvních m sloupců?

Řešení. Závěr je stejný, vektory jsou nezávislé. Pouze zápis důkazu by byl složitější.

1.414. Pro libovolné dvě matice A, B typu (n, n) platí

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

Ověřte platnost tohoto vztahu pro matice, jejichž determinanty byly počítány v 1.406.e a v 1.406.f.

1.415. Dokažte vztah

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

pro libovolné dvě matice typu $(3, 3)$.

Řešení. Nejprve z definice determinantu (stejně jako v 1.404.f) ověřte, že $\det(A)\det(B) =$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & -1 & 0 & b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & -1 & b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}.$$

Potom matici podrobte těmto řádkovým úpravám:

4. řádek násobte a_{11} a přičtěte k 1. řádku,

5. řádek násobte a_{12} a přičtěte k 1. řádku,

6. řádek násobte a_{13} a přičtěte k 1. řádku.

Na prvních 3 místech 1. řádku se objeví nuly. Potom udělejte analogické úpravy, které přinesou nuly také na první 3 místa 2. a 3. řádku. Dostaneme determinant, který lze symbolicky zapsat takto:

$$\begin{vmatrix} 0 & C \\ -I & B \end{vmatrix},$$

kde matice C, jak snadno zjistíte, je rovna součinu matic AB. Pomocí 3 sloupcových výměn lze přesunout matici $C = AB$ vlevo nahoru. Proto

$$\begin{vmatrix} 0 & C \\ -I & B \end{vmatrix} = (-1)^3 \begin{vmatrix} AB & 0 \\ B & -I \end{vmatrix}.$$

Tím je vztah dokázán, poněvadž $\det(-I) = -1$ pro matici typu $(3, 3)$ a tedy (definice determinantu) pravá strana poslední rovnosti se rovná $(-1)^3 \det(AB)\det(-I) = \det(AB)$.

5. Inversní matice. Cramerovo pravidlo.

1.501. Spočítejte inversní matice k

a)
$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 9 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix},$$

b)
$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -\frac{4}{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{6} \end{pmatrix},$$

c)
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Řešení.

a)
$$\begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -7 & 4 \\ 9 & -5 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{4}{3} & \frac{7}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 7 \end{pmatrix},$$

b)
$$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 9 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 12 \\ \frac{3}{2} & -12 \end{pmatrix},$$

c) pro $D \equiv ad - bc = 0$ inversní matice neexistuje. Jestliže $D \neq 0$ inversní matice má tvar
$$\frac{1}{D}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

1.502. Najděte inversní matice k

a)
$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix},$$

b)
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix},$$

c)
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

d)
$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -5 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Řešení. a)
$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & -23 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$
$$\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & -4 & 6 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

b)
$$\begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix},$$
$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix},$$

c)
$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

d)
$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{9} & \frac{4}{9} & -\frac{7}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{1}{9} & \frac{5}{9} \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{7}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & -\frac{9}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

1.503. Najděte inversní matice k

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a alespoň některé prvky inversní matice k matici

$$\begin{pmatrix} a & -a & -a & -a \\ a & 0 & 2a & a \\ b & b & -b & -b \\ b & -b & b & b \end{pmatrix},$$

kde $a, b \in R$.

Řešení.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 7 & 3 & -6 & 5 \\ -2 & -1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix},$$

pro $ab \neq 0$ existuje inversní matice a je rovna

$$\frac{1}{2ab}\begin{pmatrix} 0 & 0 & a & a \\ -b & 0 & a & 0 \\ b & 2b & -a & -2a \\ -2b & -2b & a & 3a \end{pmatrix}.$$

1.504. Zkuste získat inversní matice řádkovými úpravami, kterým podrobíte matici danou a vedle ní napsanou matici jednotkovou. Matice v 1.502.c a první dvě v 1.503 jsou vhodné příklady, že je to někdy schůdná cesta.

1.505. Užitím Cramerova pravidla najděte řešení soustav

a)

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= -1, \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 2, \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 11, \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} 5x_1 + 4x_2 + 4x_3 &= 5, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 5, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &= 0, \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} x + y + u - z &= -1, \\ x - u &= 1, \\ y + z &= 2, \\ x + 2y &= 0. \end{aligned}$$

Řešení. **a)** $(2, -1, -1)$, **b)** $(2, -2, 3)$, **c)** $(1, 1, -1)$; **d)** determinant soustavy je -2 a řešení $(2, -1, 1, 3)$.

1.506. Najděte řešení soustav

a)

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 &= 2, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 &= 0. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 &= 2, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 &= -3, \\ 5x_1 + x_2 + 4x_3 &= 2. \end{aligned}$$

Řešení. a) Zjistíme, že determinant matice sestavené z koeficientů u x_1, x_2, x_3 je

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -2.$$

Proměnnou x_4 nahradíme parametrem s a užijeme Cramerovo pravidlo