Geometrické řady

Filip Konopka

Určete součet následujících řad.

1)

$$\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{3^{n-2}}$$

2)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{3n+1}}{3^{2n-1}}$$

3)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{5n+1}}{5^{2n-1}}$$

4)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+2} \cdot 3^{n+1}}{7^n}$$

5)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+2} + 3^{n+1}}{7^n}$$

6)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^n + 3^{n+1} + 3^{n+2}}$$

7)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+3}}{3^{2n}} (-1)^n$$

8)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{4n+1}}{4^{3n+1}} (-1)^n$$

9)

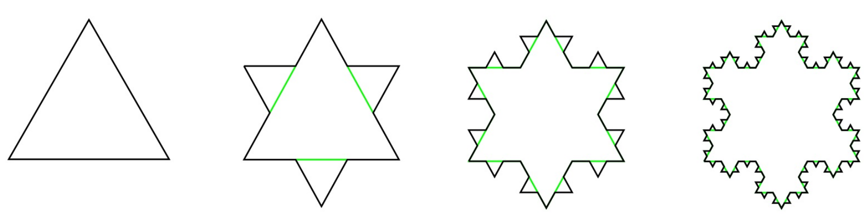
$$\sum_{n=1}^{\infty} 8^{\frac{n+2}{3}} 9^{\frac{1-n}{2}}$$

10)

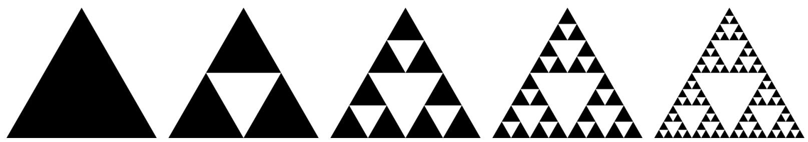
$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} \right)^n$$

Příklady na zamyšlení:

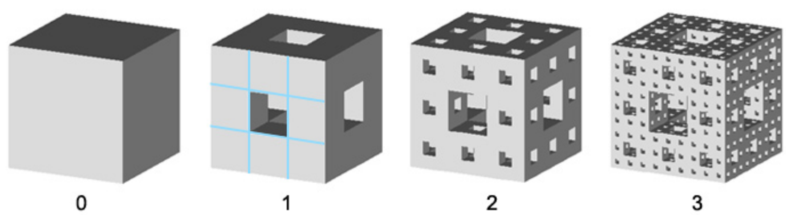
1) Kochova vločka je fraktální křivka, která vznikne následujícím způsobem: Je dán rovnostranný trojúhelník. Každou jeho stranu rozdělíme na třetiny. Nad prostřední třetinou sestrojíme opět rovnostranný trojúheník a úsečku odstraníme. Tento postup opakujeme do nekončna. Limitou těchto mnohoúhelníků je tzv. Kochova vločka. Vypočtěte její obvod a obsah. Kolika úhelník získáme po provedení n iterací?



2) Sierpińského trojúhelník je fraktální útvar vzniklý následujícím způsobem: Z rovnostranného trojúhelníku odstraníme středový trojúhelník, tvořený spojnicemi středů stran. Totéž zopakujeme u každého ze zbývajících tří rohových trojúhelníků. Tento postup opakujeme do nekonečna. Pak limitou posloupnosti těchto útvarů je Sierpenského trojúhelník (to co zbude opakovaným ostraňováním bílých trojúhelníků). Vypočtěte jeho obsah a obvod.



3) Mengerova houba je fraktální těleso, které vznikne z krychle následujícím postupem: Krychle se rozčlení na 27 shodných krychliček o třetinové délce hran. Odstraní se 7 krychliček, a to šest krychliček ve středech stěn krychle a sedmá ve středu krychle. Tentýž postup se znovu aplikuje na každou ze zbývajících 20 krychliček. Stejně se postupuje dále do nekonečna, v každém dalším kroku vždy pro třikrát menší krychličky než v kroku předchozím. Limitou těchto těles je Mengerova houba. Vypočtěte její objem a povrch.



Výsledky:

1) $\frac{1}{6}$

2) 48

3) $+\infty$

4) 84

5) $\frac{217}{20}$

6) $\frac{3}{13}$

7) $\frac{72}{11}$

8) nemá součet

9) 24

10) $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{6}}{4}$

Příklady na zamyšlení:

1) Obsah Kochovy vločky je $\frac{8}{5}$ obsahu výchozího trojúhelníku, zatímco obvod je nekonečný. Po provedení n-té iterace získáme $3 \cdot 4^n$-úhelník. Je-li obsah výchozího trojúhelníku S, pak obsah Kochovy vločky je

$$S + S \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{n-1}}{3^{2n-1}},$$

což je geometrická řada s kvocientem $\frac{4}{9}$ a tedy konverguje. Je-li a strana výchozího trojúhelníku, je obvod Kochovy vločky

$$3a \cdot (1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{n-1}}{3^n}),$$

což je geometrická řada s kvocientem $\frac{4}{3}$ a tedy diverguje.

2) Sierpińského trojúhelník má nulový obsah a nekonečný obvod.

3) Mengerova houba má nulový objem a nekonečný povrch.