Příklad 8.4. Napište Taylorův polynom n-tého řádu dané funkce v daném bodě. Případně spočtěte přibližně danou funkční hodnotu.

a) $f(x) = \frac{1}{x}, \quad x_0 = 1, \quad n = 3, \quad f(1,5) \doteq ?$

b) $f(x) = \operatorname{arctg} x, \quad x_0 = 1, \quad n = 2$

c) $f(x) = x^3 + 2x^2 + x, \quad x_0 = 1, \quad n = 3, \quad f(1,1) \doteq ?$

d) $f(x) = x\mathrm{e}^{-x}, \quad x_0 = 0, \quad n = 4$

e) $f(x) = \sin 2x, \quad x_0 = \frac{\pi}{2}, \quad n = 3, \quad \sin(181°) \doteq ?$

f) $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}, \quad x_0 = 0, \quad n = 2, \quad f(\frac{1}{100}) \doteq ?$

Řešení 8.4.

a) $T_3(x) = 1 - (x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3$
$f(1,5) \doteq T_3(1,5) = 1 - 0,5 + 0,25 - 0,125 = 0,625$

b) $T_2(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{4}(x-1)^2$

c) $T_3(x) = 4 + 8(x-1) + 5(x-1)^2 + (x-1)^3 = x^3 + 2x^2 + x$
$f(1,1) = T_3(1,1) = 4 + 0,8 + 0,05 + 0.001 = 4,851$

d) $T_4(x) = x - x^2 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{6}x^4$

e) $T_3(x) = -2\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{4}{3}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^3$
$\sin(\pi + \frac{\pi}{180}) = f(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{360}) \doteq T_3(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{360}) = -2\frac{\pi}{360} + \frac{4}{3}\left(\frac{\pi}{360}\right)^3 \doteq -0{,}0175$

f) $T_2(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x$
$f\left(\frac{1}{100}\right) \doteq T_2\left(\frac{1}{100}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{400} = 0,5025$

Příklad 8.5. Pomocí Taylorova polynomu 2. řádu ve vhodném bodě aproximujte hodnotu

a) $\ln(1,1)$

b) $\operatorname{arccotg}(0,1)$

c) $\sqrt{0,9}$

d) $\cos 5°$

Řešení 8.5.

a) $f(x) = \ln x, \quad x_0 = 1, \quad T_2(x) = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2$
$\ln(1,1) \doteq T_2(1,1) = 0,1 - 0,005 = 0,095$

b) $f(x) = \operatorname{arccotg} x, \quad x_0 = 0, \quad T_2(x) = \frac{\pi}{2} - x$
$\operatorname{arccotg}(0,1) \doteq T_2(0,1) = \frac{\pi}{2} - 0,1 \doteq 1.4708$

c) $f(x) = \sqrt{x}, \quad x_0 = 1, \quad T_2(x) = 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2$
$\sqrt{0,9} \doteq T_2(0,9) = 1 - 0,05 - 0,00125 = 0.94875$

d) $f(x) = \cos x, \quad x_0 = 0, \quad T_2(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2$
$f\left(\frac{\pi}{36}\right) \doteq T_2\left(\frac{\pi}{36}\right) = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{36}\right)^2 \doteq 0,996$