1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 3 & 7 \\ 4 & 9 & 5 & 13 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} |\cdot(-2) \\ \oplus \\ (-4) \\ (-1) \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} |\cdot(-1) \\ \oplus \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{matrix}$$

$x_1 = u - t$
$x_2 = -u - t$
$x_3 = u$ $\quad t, u \in R$
$x_4 = t$

Řešením soustavy $A\vec{x} = \vec{0}$ je $\{[u-t; -u-t; u; t], u, t \in R\}$

2.

ROZVOJ PODLE 4. SLOUPCE

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 9 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 5 & 2 & 6 \\ 0 & 7 & 3 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 2\cdot(-1)^{4+4} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 9 & 5 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 3 & 5 \end{vmatrix} =$$

ROZVOJ PODLE 3. ŘÁDKU — SARRUSOVO PRAVIDLO

$$= 2\cdot 3\cdot(-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 9 & 5 \\ 0 & 3 & 5 \end{vmatrix} = (-6)\cdot(18-20) = (-6)\cdot(-2) = \underline{\underline{12}}$$

3.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & a \\ a & 1 & 1 & a^2 \end{array}\right) \begin{matrix} |\cdot(-1) \\ \oplus \\ (-a) \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a & a-1 \\ 0 & 1-a & 1-a^2 & a^2-a \end{array}\right) \oplus \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a & a-1 \\ 0 & 0 & 2-a-a^2 & a^2-1 \end{array}\right)$$

$2 - a - a^2 = 0 \quad |\cdot(-1)$
$a^2 + a - 2 = 0$
$(a+2)(a-1) = 0$
$\underline{a=-2} \vee \underline{a=1}$

I. $\underline{a=-2}$: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow$ soustava nemá řešení

II. $\underline{a=1}$: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim (1\ 1\ 1 \,\|\, 1)$

$x = 1 - u - t$
$y = u$
$z = t$ $\quad t, u \in R$

$\Rightarrow$ soustava má nekonečně mnoho řešení ve tvaru $\{[1-u-t; u; t], u, t \in R\}$

III. $\underline{a \in R \setminus \{1; -2\}}$: $\quad z = \dfrac{a^2-1}{2-a-a^2} = -\dfrac{a+1}{a+2} \quad y = 1 + \dfrac{a+1}{a+2} = \dfrac{1}{a+2} \quad x = 1 - y - az$

$\exists!$ řešení $\qquad = \ldots$