3.4 Derivace

Definice. *Nechť funkce f je definována na okolí bodu $a \in \mathcal{R}$. Pokud existuje vlastní limita*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

nazýváme toto číslo (vlastní) ***derivací*** *funkce f v bodě a.*

Poznámky.

(i) Na rozdíl od definice limity je pro derivaci funkce f v bodě a nutné, aby funkční hodnota $f(a)$ byla definována.

(ii) Derivaci funkce f v bodě a budeme značit $f'(a)$ nebo případně $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a)$.

(iii) Pokud rozdíl $x - a$ nahradíme symbolem h, lze psát $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

(iv) Pokud v definici derivace vystupuje limita v bodě a zprava, resp. zleva, hovoříme o derivaci funkce f v bodě a zprava, resp. zleva a zapisujeme $f'_+(a)$, resp. $f'_-(a)$.

(v) Je-li limita v uvedené definici nevlastní (tj. rovna $\pm\infty$), mluvíme o nevlastní derivaci funkce f v bodě a (případně též zprava či zleva).

Příklady.

(a) Derivace konstanty, tj. funkce $f(x) = q, q \in \mathcal{R}$, v jakémkoli bodě a je rovna nule, neboť $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{q - q}{x - a} = 0$.

(b) Nechť $f(x) = 3x, a = 2$, pak $f'(2) = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3x - 3 \cdot 2}{x - 2} = 3$.

(c) Pro $f(x) = x^2, a = 1$ je $f'(1) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1^2}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x+1)(x-1)}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1} (x + 1) = 2$.

(d) Pro $f(x) = x^2, a = t \in \mathcal{R}$ je $f'(t) = \lim\limits_{x \to t} \dfrac{x^2 - t^2}{x - t} = \lim\limits_{x \to t} (x + t) = 2t$.

(e) Buď $f(x) = x^n, n \in \mathcal{N}, a = t \in \mathcal{R}$, pak

$$f'(t) = \lim_{x \to t} \frac{x^n - t^n}{x - t} = \lim_{x \to t} \frac{(x - t)(x^{n-1} + x^{n-2}t + x^{n-3}t^2 + \cdots + xt^{n-2} + t^{n-1})}{x - t} =$$
$$= \lim_{x \to t} (x^{n-1} + x^{n-2}t + x^{n-3}t^2 + \cdots + xt^{n-2} + t^{n-1}) = nt^{n-1}.$$

Jaký je geometrický význam derivace?

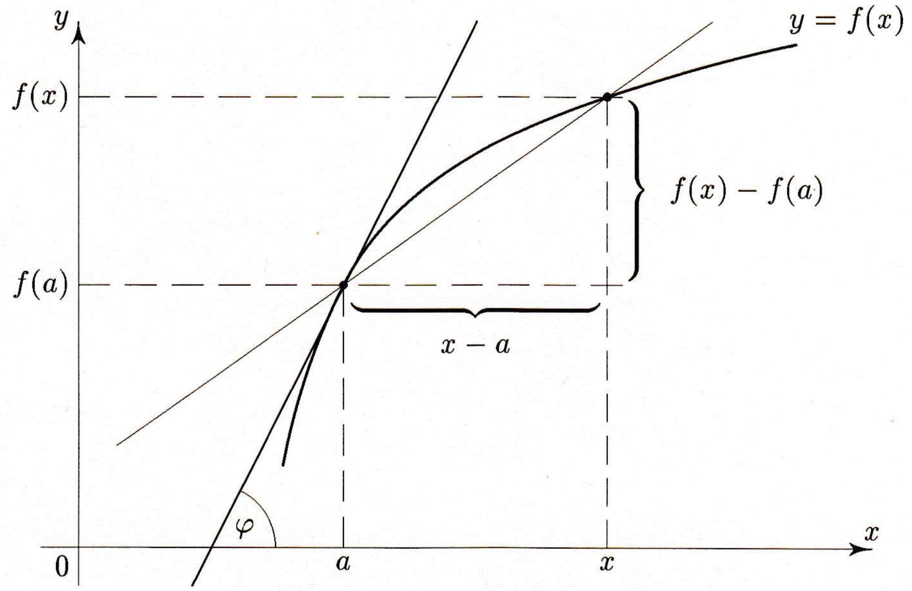
Výraz $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ je pro $x \neq a$ směrnicí sečny, která je určena body $(a, f(a))$, $(x, f(x))$ ležícími na grafu funkce $y = f(x)$. Blížíme-li se nyní s bodem x do bodu a, stane se „limitou" těchto sečen ***tečna*** ke grafu funkce $y = f(x)$ v bodě $(a, f(a))$.

Vlastní derivace $f'(a)$ (tzn. limita směrnic těchto sečen) je tak číslo rovnající se směrnici tečny ke grafu funkce f v bodě a (tj. $\operatorname{tg} \varphi$ — viz obrázek).

Analytické vyjádření této tečny (v kartézských souřadnicích x, y) pak lze zapsat ve tvaru

$$y - f(a) = f'(a) \cdot (x - a).$$

(Jedná se o přímku se směrnicí $f'(a)$, která prochází bodem $\big(a, f(a)\big)$, což je bod jejího dotyku s grafem funkce f.)



Přímka, která je kolmá na tečnu (ke grafu funkce f v bodě a) a prochází bodem $\big(a, f(a)\big)$, se nazývá ***normála*** (ke grafu funkce f v bodě a). Pokud $f'(a) \neq 0$, je její rovnice

$$y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x - a)\,;$$

pokud $f'(a) = 0$, její vyjádření je $x = a$.

Příklady.

(a) Derivací funkce $y = kx$ v bodě a je $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{kx - ka}{x - a} = k$, tj. směrnice této přímky. Tečnou ke grafu této funkce v jakémkoliv bodě je tak tato přímka sama (což ostatně platí také o konstantní funkci $y = q$).

(b) Derivace funkce $y = x^2$ v bodě $a = 1$ je rovna 2, $f(1) = 1$. Rovnice tečny k uvedené parabole v bodě 1 tak má tvar $y - 1 = 2(x - 1)$, tj. $y = 2x - 1$, tj. $2x - y - 1 = 0$. Rovnice normály v bodě 1 pak bude: $y - 1 = -\frac{1}{2}(x - 1)$, neboli $x + 2y - 3 = 0$.

(c) Derivace funkce $y = x^2$ v nule je rovna nule. Rovnice tečny k této parabole v bodě $(0, 0)$ má tudíž tvar $y = 0$ a normálou v tomto bodě je přímka $x = 0$.

Poznámky.

(i) Obecně, je-li derivace funkce f v bodě a nulová, je tečna ke grafu této funkce v bodě a rovnoběžná s osou x (normála v tomto bodě je rovnoběžná s osou y).

(ii) Nechť $f(x) = \sqrt{x}$, $a = 0$. Je $f'_+(0) = \lim\limits_{x \to 0+} \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{0}}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0+} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$ a tečnou ke grafu této funkce v bodě $(0, 0)$ je přímka $x = 0$, tj. osa y.

(„Směrnici $+\infty$“ má přímka, která s osou x svírá úhel, jehož tangens je „roven“ právě „$+\infty$“ — tedy pravý úhel, čili $\frac{\pi}{2}$.)

(iii) Pro $f(x) = |x|$ derivace v bodě nula neexistuje.

Je totiž $f'_+(0) = \lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{x}{x} = 1$

a $\quad f'_-(0) = \lim\limits_{x\to 0-} \dfrac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0-} \dfrac{-x}{x} = -1$.

(iv) Grafy funkcí, které mají v nějakém bodě rozdílné jednostranné derivace (a „oboustranná" derivace tak neexistuje), mají v tomto bodě tvar „hrotu".
Funkcím, které mají v každém bodě intervalu vlastní derivaci (jsou na tomto intervalu tzv. derivovatelné či diferencovatelné), se proto naopak říká hladké. (V každém bodě jejich grafu lze sestrojit tečnu.)

Platí tvrzení: *existuje-li vlastní derivace $f'(a)$, je funkce f v bodě a spojitá.*

Ověřit jeho platnost není těžké: pro dané $\varepsilon > 0$ totiž na jistém $P_\delta(a)$ platí

$$f'(a) - \varepsilon < \frac{f(x) - f(a)}{x - a} < f'(a) + \varepsilon\,,$$

tj. $\quad \big(f'(a) - \varepsilon\big)(x - a) < f(x) - f(a) < \big(f'(a) + \varepsilon\big)(x - a)$ na $(a, a + \delta)$,

resp. $\quad \big(f'(a) - \varepsilon\big)(x - a) > f(x) - f(a) > \big(f'(a) + \varepsilon\big)(x - a)$ na $(a - \delta, a)$.

Protože výrazy $\big(f'(a) - \varepsilon\big)(x - a)$, $\big(f'(a) + \varepsilon\big)(x - a)$ mají pro $x \to a$ limitu rovnou nule, je podle věty o křídlech i $\lim\limits_{x\to a} \big(f(x) - f(a)\big) = 0$, tj. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$, a funkce f je tedy v bodě a spojitá.

Poznámky.

(i) Příkladem funkce, která nemá v nějakém bodě vlastní derivaci, tak je jakákoliv nespojitá funkce.

(ii) Nicméně ani spojitá funkce, jak bylo vidět na příkladu funkce $f(x) = |x|$, nemusí mít v každém bodě vlastní derivaci — neboli implikaci v uvedeném tvrzení nelze obrátit (existence vlastní derivace je tedy silnější vlastnost, než spojitost).

(iii) Příkladem spojité funkce, která nemá v nějakém bodě ani jednostranné derivace, je funkce $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ pro $x \neq 0$, $f(0) = 0$.
Takto dodefinovaná funkce je v nule spojitá, ale derivaci zprava ani zleva zde nemá.
Podle definice je totiž $f'_\pm(0) = \lim\limits_{x\to 0\pm} \dfrac{x \sin \frac{1}{x} - 0}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0\pm} \sin \frac{1}{x}$, ale tyto jednostranné limity, jak jsme se dříve zmínili, neexistují.

(iv) Požadavek existence vlastní derivace v předpokladu uvedeného tvrzení je nezbytný. Pokud má totiž funkce v nějakém bodě derivaci nevlastní, spojitá v něm být nemusí (ale může — viz příklad funkce $f(x) = \sqrt{x}$ v bodě nula zprava anebo podobně funkce $g(x) = \sqrt[3]{x}$ v nule).
Demonstrovat tuto skutečnost lze na funkci $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$.
Pro $a \neq 0$ je jistě $f'(a) = 0$ (jedná se o derivaci konstantní funkce) — a v těchto bodech je také funkce $\operatorname{sgn}(x)$ spojitá.

Pro $a = 0$ je $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{\operatorname{sgn}(x) - \operatorname{sgn}(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{1}{x} = +\infty$

a $\lim\limits_{x\to 0-} \dfrac{\operatorname{sgn}(x) - \operatorname{sgn}(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0-} \dfrac{-1}{x} = +\infty$.

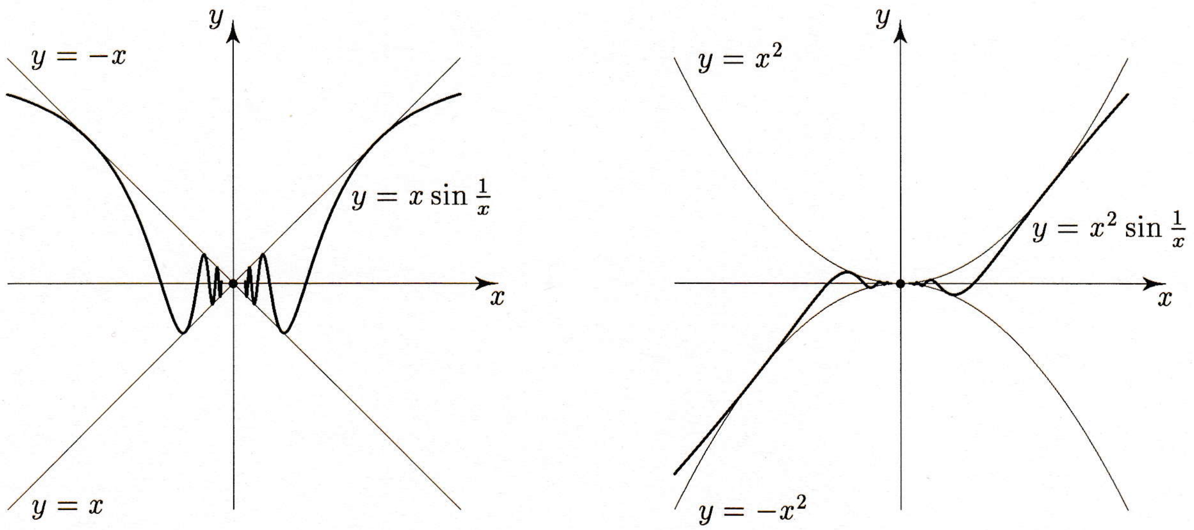
Je tedy $\operatorname{sgn}'(0) = +\infty$, ale v nule tato funkce spojitá není. („Tečnou" ke grafu funkce $y = \operatorname{sgn}(x)$ v bodě $(0, 0)$ je tak osa y.)

Příklad.

Funkce $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x}, & \text{pro } x \neq 0\,; \\ 0, & \text{pro } x = 0\,, \end{cases}$ je v nule spojitá (podobně jako funkce $x \sin\frac{1}{x}$) a má v tomto bodě i vlastní derivaci (na rozdíl od funkce $x\sin\frac{1}{x}$). Je totiž:

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin\frac{1}{x} - 0}{x - 0} = \lim_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0\,.$$

Tečnou ke grafu této funkce v bodě $(0,0)$ je tak přímka $y = 0$, tj. osa x.
Hledíme-li na tuto tečnu jako na limitu sečen (pro $x \to 0$) procházejících body $(0,0)$, $(x, f(x))$, je dobré si geometricky představit, proč v případě funkce $x^2 \sin\frac{1}{x}$ tyto sečny limitu mají, ale v případě funkce $x\sin\frac{1}{x}$ nikoliv.
(U funkce $x\sin\frac{1}{x}$ kmitají směrnice těchto sečen — jejich hodnoty jsou rovny $\sin\frac{1}{x}$ — neustále mezi -1 a 1, a žádné jediné hodnotě se nepřibližují.)



Mějme funkci f definovanou na intervalu I takovou, že v každém bodě $a \in I$ existuje vlastní derivace $f'(a)$ (je-li I interval uzavřený či polouzavřený, požadujeme v krajních bodech existenci příslušné jednostranné derivace).

Funkci, která každému $a \in I$ přiřazuje hodnotu $f'(a)$ nazýváme (první) derivací funkce f na intervalu I a značíme ji f' (je tedy $f' : a \longmapsto f'(a)$).

Výpočet derivací se samozřejmě neprovádí tak, že bychom vždy vyšetřovali hodnotu příslušné limity. To lze pro běžně užívané elementární funkce provést obecně, což spolu s pravidly pro derivování součtu, rozdílu, součinu a podílu funkcí a s pravidlem pro derivování funkce složené umožňuje celkem jednoduše zderivovat jakoukoli funkci (vytvořenou z těchto elementárních funkcí konečným počtem uvedených operací).

Derivace elementárních funkcí

$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}\,,\ n \in \mathcal{N}, x \in \mathcal{R}\,;$ $\qquad (x^a)' = a \cdot x^{a-1}\,,\ a \in \mathcal{R}, x \in \mathcal{R}^+\,;$

$(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x\,,\ x \in \mathcal{R}$ — obecně $(a^x)' = (\mathrm{e}^{x \ln a})' = a^x \cdot \ln a\,,\ a > 0, x \in \mathcal{R}\,;$

$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}\,,\ x \in \mathcal{R}^+$ — obecně $(\log_a x)' = \left(\dfrac{\ln x}{\ln a}\right)' = \dfrac{1}{\ln a} \cdot \dfrac{1}{x}\,,\ 1 \neq a > 0, x \in \mathcal{R}^+\,;$

$(\sin x)' = \cos x \ , \ x \in \mathcal{R} \ ;$ $(\cos x)' = -\sin x \ , \ x \in \mathcal{R} \ ;$

$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \ , \ x \in (-1,1) \ ;$ $(\arccos x)' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \ , \ x \in (-1,1) \ ;$

$(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2} \ , \ x \in \mathcal{R} \ ;$ $(\operatorname{arccotg} x)' = \dfrac{-1}{1+x^2} \ , \ x \in \mathcal{R} \ .$

Pravidla pro derivování

Věta. *Nechť f, g jsou funkce diferencovatelné na intervalu I, funkce h nechť je diferencovatelná na množině $f(I)$, k buď reálné číslo. Potom pro $x \in I$ platí:*

$(k \cdot f(x))' = k \cdot f'(x) \ ;$ $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x) \ ;$

$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \ ;$

$\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$ *(v těch bodech, kde $g(x) \neq 0$) ;*

$\Big(h\big(f(x)\big)\Big)' = h'\big(f(x)\big) \cdot f'(x) \ .$

Poznámky.

(i) Jedinečnost funkce $y(x) = \mathrm{e}^x$ spočívá v tom, že pro všechna $x \in \mathcal{R}$ splňuje rovnost $y'(x) = y(x)$. Je tedy řešením jedné z nejzákladnějších diferenciálních rovnic $y' = y$ (neznámou v diferenciální rovnici je funkce; kromě funkce samotné pak v takovéto rovnici vystupují i její derivace).

(ii) Protože pro jakékoliv reálné parametry α, β a libovolné diferencovatelné funkce f, g je $\big(\alpha f(x) + \beta g(x)\big)' = \alpha f'(x) + \beta g'(x)$, má derivování vlastnost linearity (touto vlastností se ostatně může vykázat i vlastní limita funkce).

Příklady.

(a) Derivací konstantní funkce $f(x) = k$, kde $x \in \mathcal{R}$ a k je reálný parametr, je funkce nulová — tj. $f'(x) = 0$ pro každé $x \in \mathcal{R}$.

(b) Podle pravidel o derivaci součtu či rozdílu funkcí a o derivaci funkce násobené konstantou lze derivovat polynomy: například

$$(3x^3 - 5x^2 + 2x - 2)' = (3x^3)' - (5x^2)' + (2x)' - (2)' = 3(x^3)' - 5(x^2)' + 2(x)' - (2)' =$$
$$= 3 \cdot 3x^2 - 5 \cdot 2x + 2 \cdot 1 = 9x^2 - 10x + 2,$$
$$(7x^6 - 15x^3 + 3x^2)' = 42x^5 - 45x^2 + 6x \quad \text{atd.}$$

Výraz $(2x^3 - 1)^7$ je lépe derivovat jako složenou funkci (a nepoužívat k jeho rozvedení binomické věty): zde je $f(x) = 2x^3 - 1$ a funkce h je sedmá mocnina, tudíž

$$\big((2x^3-1)^7\big)' = 7 \cdot (2x^3-1)^6 \cdot (2x^3-1)' = 7(2x^3-1)^6 \cdot 6x^2 = 42x^2(2x^3-1)^6.$$

(c) Racionální lomené funkce se derivují dle pravidla o derivaci podílu funkcí:

$$\left(\frac{x^2}{3x+1}\right)' = \frac{(x^2)' \cdot (3x+1) - x^2 \cdot (3x+1)'}{(3x+1)^2} = \frac{2x \cdot (3x+1) - x^2 \cdot 3}{(3x+1)^2} = \frac{3x^2+2x}{(3x+1)^2}$$

pro $x \neq -\frac{1}{3}$;

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{(1)' \cdot x - 1 \cdot (x)'}{x^2} = \frac{0 \cdot x - 1 \cdot 1}{x^2} = \frac{-1}{x^2} \quad \text{pro } x \neq 0 \text{, anebo též}$$

$\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = (-1) \cdot x^{-2} = \frac{-1}{x^2}$ pro $x \neq 0$.

(d) Podobně, je-li f diferencovatelná a $f(x) \neq 0$, platí $\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = \frac{-f'(x)}{f^2(x)}$.

(e) Je $(\sqrt{x})' = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ pro $x > 0$.

Použijeme-li pravidla o derivování funkce složené, je

$(\sqrt{1-2^x})' = \frac{1}{2\sqrt{1-2^x}} \cdot (-2^x \cdot \ln 2) = \frac{-2^{x-1} \cdot \ln 2}{\sqrt{1-2^x}}$ pro $x \in (-\infty, 0)$.

(f) Derivace funkcí $\operatorname{tg} x$ a $\operatorname{cotg} x$ získáme použitím pravidla o derivaci podílu funkcí:

$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$ pro $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathcal{Z}$;

$(\operatorname{cotg} x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{(-\sin x) \cdot \sin x - \cos x \cdot \cos x}{\sin^2 x} = \frac{-1}{\sin^2 x}$ pro $x \neq k\pi, k \in \mathcal{Z}$.

(g) Pro $f(x) = \ln\sqrt{3x^2+1}$, $x \in \mathcal{R}$, je $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{3x^2+1}} \cdot \frac{6x}{2\sqrt{3x^2+1}} = \frac{3x}{3x^2+1}$.

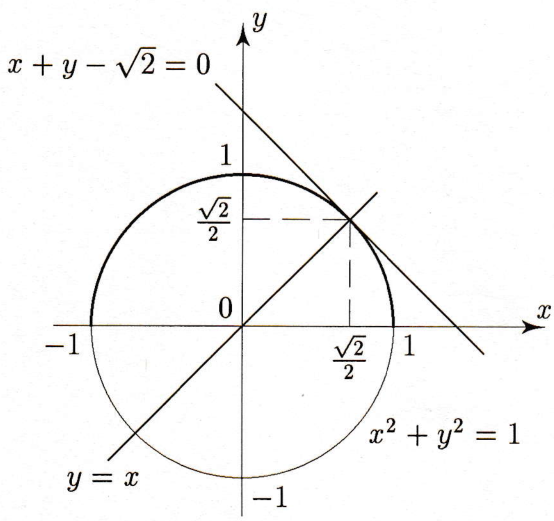
(h) Pro $g(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $x \in \mathcal{R}$, je $g'(x) = h(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$. Tato funkce $g(x)$, resp. $h(x)$ se označuje jako $\cosh x$, resp. $\sinh x$ (hyperbolický kosinus, resp. hyperbolický sinus). Platí: $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$, $(\cosh x)' = \sinh x$, $(\sinh x)' = \cosh x$.

(i) Je $(\arcsin x + \arccos x)' = 0$ pro $x \in (-1, 1)$, stejně jako $(\operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x)' = 0$ pro $x \in \mathcal{R}$.

(j) Jak za pomoci derivací zjistit například rovnici tečny ke kružnici $x^2 + y^2 = 1$ v bodě o souřadnicích $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$?

Rovnicí $x^2 + y^2 = 1$ (jedná se o kružnici se středem v počátku souřadnic a poloměru jedna) je dána funkce proměnné x následujícím způsobem: prvku x je přiřazena taková hodnota y, aby $x^2 + y^2 = 1$ (přičemž je zapotřebí jisté opatrnosti, aby toto přiřazení bylo jednoznačné: je možno např. navíc požadovat jen nezáporné hodnoty y).

Funkce zadaná takovýmto způsobem se nazývá funkce v implicitním tvaru. Do tvaru explicitního, tj. tvaru $y = f(x)$, je možno ji převést řešením rovnice $x^2 + y^2 = 1$ vzhledem k proměnné y. Dostaneme tak: $y = \sqrt{1-x^2}$, $x \in \langle -1, 1 \rangle$, nebo $y = -\sqrt{1-x^2}$, $x \in \langle -1, 1 \rangle$. Grafem obou těchto funkcí jsou půlkružnice — první leží nad osou x, druhá pod ní (až na jejich koncové body (-1,0) a (1,0), ty leží na ose x).



Jelikož máme sestrojit tečnu k dané kružnici v bodě $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$, je třeba pracovat s „horní“ půlkružnicí, tedy s funkcí

$$f(x) = \sqrt{1-x^2}.$$

Protože $f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$, je pro $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $f'(\frac{\sqrt{2}}{2}) = -1$, a hledaná tečna má tudíž rovnici $y - \frac{\sqrt{2}}{2} = (-1) \cdot (x - \frac{\sqrt{2}}{2})$, neboli $x + y - \sqrt{2} = 0$.

Normálou v uvažovaném bodě je potom přímka $y = x$.

(j) Rovnice $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{12}=1$ popisuje elipsu se středem v počátku souřadnic a poloosami $a=4$, $b=2\sqrt{3}$. Její tečnu v bodě $(2,3)$ nalezneme takto:
z rovnice elipsy vyjádříme $y=\pm\sqrt{12(1-\frac{x^2}{16})}$; protože y-ová souřadnice bodu dotyku je kladná, budeme hledat tečnu ke grafu funkce $f(x)=\sqrt{12(1-\frac{x^2}{16})}=\sqrt{12-\frac{3}{4}x^2}$;
je $f'(x)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{-\frac{3}{4}\cdot 2x}{\sqrt{12-\frac{3}{4}x^2}}=\dfrac{-3x}{4\cdot\sqrt{12-\frac{3}{4}x^2}}$, a tedy $f'(2)=\dfrac{-6}{4\sqrt{12-3}}=-\dfrac{1}{2}$; tečna k zadané elipse v bodě $(2,3)$ tak má rovnici $y-3=-\frac{1}{2}(x-2)$, neboli $y=-\frac{1}{2}x+4$.
(Je možné přesvědčit se, že kvadratická rovnice, která vznikne dosazením rovnice tečny do rovnice elipsy, bude mít právě jedno řešení, které odpovídá jedinému společnému bodu těchto dvou útvarů, tj. bodu dotyku $(2,3)$).

Derivace vyšších řádů

Má-li funkce f na intervalu I vlastní derivaci, je na tomto intervalu definována funkce f'.

Derivaci této funkce f' na intervalu I (pokud existuje vlastní) označujeme f'' nebo $\dfrac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}$ a nazýváme druhou derivací funkce f. Pro $a\in I$ je tedy funkční hodnota $f''(a)$ či $\dfrac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(a)$ rovna limitě $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)-f'(a)}{x-a}$.

Dalším derivováním (pokud lze provést) získáme postupně třetí, čtvrtou, atd. až obecně n-tou derivaci funkce f. Značíme je: $f''', f^{(4)},\dots,f^{(n)}$ nebo $\dfrac{\mathrm{d}^3 f}{\mathrm{d}x^3},\dfrac{\mathrm{d}^4 f}{\mathrm{d}x^4},\dots,\dfrac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}$ $(n\in\mathcal{N})$.

Poznámky.

(i) Namísto n-té derivace hovoříme též o derivaci n-tého řádu.
(ii) Označení $f^{(n)}$ je potřeba nezaměňovat s funkcí f^n (tj. n-tou mocninou funkce f)!
(iii) Samotnou funkci f někdy nazýváme nultou derivací (derivací nultého řádu) funkce f.
(iv) Pro množinu spojitých funkcí na intervalu I se užívá označení $\mathcal{C}(I)$. Funkce, které mají na I spojitou první derivaci (v každém bodě I musí být tedy tato derivace vlastní), označujeme $\mathcal{C}^1(I)$. Funkce n-krát, resp. nekonečněkrát spojitě diferencovatelné na I pak analogicky značíme $\mathcal{C}^n(I)$, resp. $\mathcal{C}^\infty(I)$.
Platí relace: $\mathcal{C}(I)=\mathcal{C}^0(I)\supset\mathcal{C}^1(I)\supset\mathcal{C}^2(I)\supset\cdots\supset\mathcal{C}^n(I)\supset\cdots\supset\mathcal{C}^\infty(I)$.

Příklady.

(a) Každý polynom je prvek množiny $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{R})$.
Také $\sin x$, $\cos x$, e^x a řada dalších funkcí jsou prvky z $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{R})$.
(b) Pro $f(x)=x^n$, $n\in\mathcal{N}$, platí:
$f^{(n)}(x)=\big((x^n)'\big)^{(n-1)}=\big(nx^{n-1}\big)^{(n-1)}=\big(n(n-1)x^{n-2}\big)^{(n-2)}=\big(n(n-1)(n-2)\cdots x^2\big)''=$
$=\big(n(n-1)(n-2)\cdots 2x\big)'=n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1=n!$ (čteme *n-faktoriál*).
(c) Polynom $P(x)$ n-tého stupně pak pro $m>n, m\in\mathcal{N}$, nutně na celém $\mathcal{R}$ splňuje rovnost $P^{(m)}(x)=0$.

(d) Pro $y(x) = \sin x$ je $y'(x) = \cos x$ a $y''(x) = (\cos x)' = -\sin x = -y(x)$, $x \in \mathcal{R}$. Funkce $y(x) = \sin x$ je tedy řešením diferenciální rovnice $y'' + y = 0$.

(e) Podobně diferenciální rovnici $y'' + y = 0$ řeší i každá funkce tvaru $y(x) = k \cos x$, kde $x \in \mathcal{R}$ a k je reálná konstanta: je totiž $y''(x) = (-k \sin x)' = -k \cos x$.
Pro $k = 0$ je tak speciálním řešením této rovnice konstantní funkce $y = 0$.

(f) Je-li $f(x) = \mathrm{e}^{kx}$, je $f^{(n)}(x) = k^n \cdot \mathrm{e}^{kx}$ ($x \in \mathcal{R}$, k je reálný parametr);
je-li $f(x) = a^x$, je $f^{(n)}(x) = a^x \cdot (\ln a)^n$ ($x \in \mathcal{R}$, a je kladný parametr).

(g) Je: $(\operatorname{arctg} x)'' = \left(\dfrac{1}{1+x^2}\right)' = \dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}$, $x \in \mathcal{R}$;

$$(\arcsin x)'' = \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)' = \left((1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\right)' = -\tfrac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot (-2x) =$$
$$= \frac{x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1,1);$$

$$(\operatorname{tg} x)'' = \left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)' = \frac{-2\cos x \cdot (-\sin x)}{\cos^4 x} = \frac{2 \sin x}{\cos^3 x}, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathcal{Z};$$

$$(\ln(x^2+x+1))'' = \left(\frac{2x+1}{x^2+x+1}\right)' = \frac{2(x^2+x+1) - (2x+1)(2x+1)}{(x^2+x+1)^2} =$$
$$= \frac{2x^2+2x+2-4x^2-4x-1}{(x^2+x+1)^2} = \frac{-2x^2-2x+1}{(x^2+x+1)^2}, \quad x \in \mathcal{R}.$$

(h) Uveďme jednu z fyzikálních interpretací derivace.

Uvažujme bod pohybující se po číselné ose a označme $X(t)$ jeho polohu v čase t. Derivace funkce $X(t)$ v bodě $t = t_0$, tj. $\dfrac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}(t_0) = \lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{X(t) - X(t_0)}{t - t_0}$, má význam okamžité rychlosti pohybu bodu v čase t_0.

(Jedná-li se o funkci s časovou proměnnou, bývá zvykem derivaci funkce podle této časové proměnné označovat namísto čárkou nahoře za symbolem funkce tečkou nad ním, tedy: $\dfrac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}(t_0) = \dot{X}(t_0)$.)

Je-li $X(t)$ konstantní funkce, setrvává bod na jednom místě, a rychlost jeho pohybu je tudíž nulová.
Pro $X(t) = \alpha t$, kde α je kladný reálný parametr, se jedná o pohyb rovnoměrný přímočarý, jehož rychlost v je rovna $\dot{X}(t) = \alpha$.
Pro $X(t) = \beta t^2$, $\beta > 0$, se jedná o rovnoměrně zrychlený přímočarý pohyb, jehož rychlost v čase t je rovna $v(t) = \dot{X}(t) = 2\beta t$.
Derivací rychlosti podle času, tj. druhou derivací tzv. „dráhy“ podle času, získáme veličinu nazývající se okamžité zrychlení. V posledním případě je konstantní a platí pro něj: $a(t) = \dot{v}(t) = \ddot{X}(t) = 2\beta$.

Podobně jako je např. zrychlení vyjádřením změny rychlosti (za časový úsek), můžeme také na derivaci jakékoliv jiné funkce nahlížet jako na něco, co postihuje změnu její funkční hodnoty.

3.5 L'Hospitalovo pravidlo

S pomocí derivací lze v řadě případů stanovit hodnotu limity funkce. Víme-li například, že derivací funkce $\sin x$ je $\cos x$, je $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - \sin 0}{x - 0} = \sin'(0) = \cos 0 = 1$.

Podobně je $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^0}{x - 0} = 1$, neboť $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$ a $\mathrm{e}^0 = 1$, nebo při využití znalosti derivace přirozeného logaritmu $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(x+1) - \ln 1}{x - 0} = 1$, protože $\big(\ln(x+1)\big)' = \dfrac{1}{x+1}$.

(Tento přístup je však z teoretického hlediska lehce nekorektní v tom, že na základě znalostí uvedených limit bychom měli odvozovat vyjádření derivací uvedených funkcí, a ne naopak.)

Jinou, širší možnost, jak limity podobného typu zjišťovat, dává následující věta.

Věta (l'Hospitalovo pravidlo). *Nechť f, g jsou funkce a $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ nebo $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \pm\infty$. Potom $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, pokud limita na pravé straně existuje (vlastní či nevlastní).*

Poznámky.

(i) Aby limita podílu derivovaných funkcí mohla existovat, je samozřejmě nutné, aby funkce f, g byly na (prstencovém) okolí vyšetřovaného bodu a diferencovatelné.

(ii) Může se stát, že $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ existuje, ale podíl $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ pro $x \to a$ limitu nemá.

(iii) Věta zůstane v platnosti i tehdy, budeme-li místo $x \to a$ všude psát $x \to a+$ nebo $x \to a-$, případně $x \to +\infty$ nebo $x \to -\infty$.

(iv) Uvedené pravidlo lze tedy bezprostředně využít pro limity typu „$\frac{0}{0}$" nebo „$\frac{\infty}{\infty}$" (větu o limitě podílu funkcí v těchto případech samozřejmě nejde aplikovat).

Je-li $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \pm\infty$, je možné $\lim\limits_{x\to a} \big(f(x)\cdot g(x)\big)$ — tedy limitu typu „$0\cdot\infty$" — převést na:

— limitu typu „$\frac{0}{0}$" úpravou $\lim\limits_{x\to a} \big(f(x)\cdot g(x)\big) = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$;

— limitu typu „$\frac{\infty}{\infty}$" úpravou $\lim\limits_{x\to a} \big(f(x)\cdot g(x)\big) = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$

(pokud $f \neq 0$ na nějakém $P_\delta(a)$).

A na tyto limity se pak již l'Hospitalovo pravidlo použít dá.

(v) Je-li $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \pm\infty$, přepíšeme $\lim\limits_{x\to a}\big(f(x)-g(x)\big) = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)g(x)}}$.

Limitu typu „$\infty - \infty$“ tak lze převést na limitu typu $\frac{„0“}{„0“}$, což opět umožňuje l'Hospitalovo pravidlo uplatnit.

Příklady.

(a) Protože $\lim\limits_{x\to 0} \sin x = \lim\limits_{x\to 0} x = 0$, je $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x}{1} = \cos 0 = 1$.

Podobně $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^x}{1} = \mathrm{e}^0 = 1$, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{1}{x+1}}{1} = \dfrac{\frac{1}{0+1}}{1} = 1$.

Stejně tak je i $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$ a $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$.

(Uvedené limity říkají, že pro x „málo“ se lišící od nuly jsou funkční hodnoty $\sin x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{arctg} x$, $\mathrm{e}^x - 1$, $\ln(x+1)$ takřka totožné s hodnotou nezávisle proměnné x.)

(b) Je $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{3x^2+2}{5x^2+2x-1} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{6x}{10x+2} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{6}{10} = \dfrac{3}{5}$.

(c) Platí: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{2x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{2} = +\infty$.

Obecně: je-li $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ libovolný polynom, potom $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{P(x)} = +\infty$ pro $a_n > 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{P(x)} = -\infty$ pro $a_n < 0$.

Pro převrácenou hodnotu takovéto funkce pak samozřejmě v každém případě platí $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{P(x)}{\mathrm{e}^x} = 0$.

(d) Je: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x}}{\ln x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x}}{2} = +\infty$,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln^2 x}{3x-5} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2\ln x \cdot \frac{1}{x}}{3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2\ln x}{3x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2\cdot\frac{1}{x}}{3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{3x} = 0.$$

(e) Z limit uvedených v příkladech (c) a (d) lze usuzovat na „rychlost“, s jakou v nich vystupující funkce rostou do plus nekonečna (pro $x \to +\infty$): funkce exponenciální rostou kvalitativně rychleji než polynomy, které jsou zase kvalitativně rychlejší než funkce logaritmické.
Slovu kvalitativně je třeba rozumět tak, že kupříkladu podíl libovolné logaritmické funkce (navíc v jakékoliv mocnině) a polynomu bude mít v $+\infty$ limitu rovnou nule.

(f) Odtud lze usuzovat i na hodnotu limit typu „$\infty - \infty$“ pro tyto funkce. Bude např. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\mathrm{e}^x - x^{50}\right) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x} - \ln x\right) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln^{30} x - \mathrm{e}^x\right) = -\infty$ apod.

(g) Limitu $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(\ln(2x-1) - \ln(x+1)\big)$ je jistě možné přepsat na tvar

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{\ln(x+1)} - \frac{1}{\ln(2x-1)}}{\frac{1}{\ln(x+1)\cdot\ln(2x-1)}}$$ a při použití l'Hospitalova pravidla

si řádně zaderivovat (navíc s nejasným výsledkem), jednodušší je ale použít jiné úpravy:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\ln(2x-1)-\ln(x+1)\right) = \lim_{x\to+\infty}\ln\frac{2x-1}{x+1}\,.$$

Podle věty o limitě složené funkce je pak toto dále rovno $\ln\Bigl(\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-1}{x+1}\Bigr) = \ln 2\,.$

(h) Jak vypadají limity $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin\frac{1}{x}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}x\sin\frac{1}{x}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\sin\frac{1}{x}$?

Je $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin\frac{1}{x} = \sin\bigl(\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\bigr) = \sin 0 = 0\,.$

Dále je $\lim\limits_{x\to+\infty}x\sin\frac{1}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$, což je podle l'Hospitalova pravidla (jde o limitu typu „$\frac{0}{0}$“) rovno $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cos\frac{1}{x}\cdot(-\frac{1}{x^2})}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to+\infty}\cos\frac{1}{x} = \cos\bigl(\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\bigr) = \cos 0 = 1\,.$

(Ostatně: lze ukázat, že $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x) = \lim\limits_{x\to0+}f(\frac{1}{x})$, takže počítaná limita je rovna $\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{\sin x}{x}$, jejíž rovnost jedné jsme již zmiňovali.)

Konečně, $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\sin\frac{1}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}x\cdot\bigl(x\sin\frac{1}{x}\bigr) = +\infty$ — jedná se o limitu součinu dvou funkcí, z nichž jedna roste do $+\infty$ a druhá má kladnou vlastní limitu.

(i) K určení $\lim\limits_{x\to0+}x\ln x$ je možné použít přepsání na tvar $\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{x}{\frac{1}{\ln x}}$ nebo $\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}}$.

V prvním případě se jedná o limitu typu „$\frac{0}{0}$“, avšak použití l'Hospitalova pravidla zde k cíli nepovede: $\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{x}{\frac{1}{\ln x}} = \lim\limits_{x\to0+}\dfrac{1}{-\frac{\frac{1}{x}}{\ln^2 x}} = \lim\limits_{x\to0+}(-x\ln^2 x)$. Druhý tvar, jde o limitu typu „$\frac{\infty}{\infty}$“, umožňuje výsledku dosáhnout: $\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to0+}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to0+}(-x) = 0\,.$

(j) Čemu se rovná $\lim\limits_{x\to+\infty}\bigl(1+\dfrac{1}{x}\bigr)^x$?

Protože platí $\bigl(1+\dfrac{1}{x}\bigr)^x = \exp\bigl(x\ln(1+\frac{1}{x})\bigr)$, musíme zjistit limitu funkce $x\ln(1+\frac{1}{x})$ pro $x\to+\infty$, a poté použít věty o limitě složené funkce.

Je: $\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln(1+\frac{1}{x}) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to0+}\dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$; nebo též podle l'Hospitalova pravidla pro limity typu „$\frac{0}{0}$“: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\cdot(-\frac{1}{x^2})}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{1+\frac{1}{x}} = 1.$

Hledaná limita je tudíž rovna $\lim\limits_{x\to+\infty}\exp\bigl(x\ln(1+\frac{1}{x})\bigr) = \exp\bigl(\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln(1+\frac{1}{x})\bigr) = \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}.$

Tato skutečnost dává konkrétní návod, jak hodnotu Eulerova čísla na potřebný počet desetinných míst spočítat: zvolíme kupříkladu $x = 100$ a stačí vyčíslit hodnotu výrazu $\bigl(1+\frac{1}{100}\bigr)^{100} = 1{,}01^{100}$ třeba jednoduchým násobením; totéž pak lze provést i pro $x = 10^3$, $x = 10^4$ atd.

(Otázkou však je, jak rychle tyto hodnoty ke své limitě konvergují.)