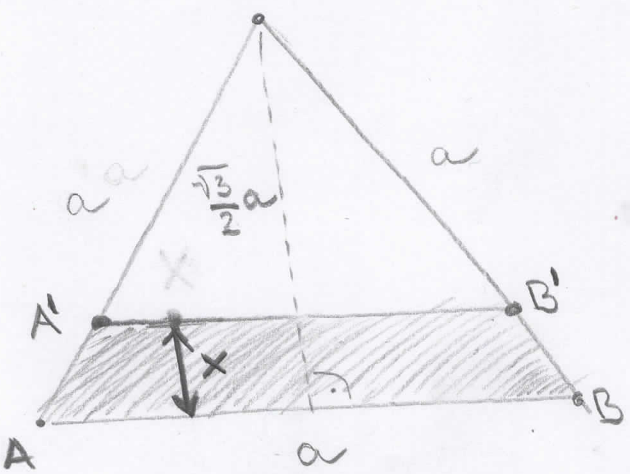
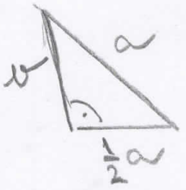
V lese tvaru rovnostranného trojúhelníku o straně a se ztratilo dítě. Určete rozdělení náhodné veličiny udávající vzdálenost dítěte od pevně zvolené strany trojúhelníku.




Z Pythagorovy věty:

$$v = \sqrt{a^2 - \left(\tfrac{1}{2}a\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

$X$ ... vzdálenost dítěte od dané strany

$x$ ... vzdálenost bodu trojúhelníku od dané strany

$$x \in \left\langle 0, \frac{\sqrt{3}}{2}a \right\rangle$$

Distribuční funkce této náhodné veličiny $X$ je:

$$F(x) = P[X \le x] = \frac{\text{obsah lichoběžníku } ABB'A'}{\text{obsah trojúhelníku } ABC} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\cdot\left(a + a - \frac{2}{\sqrt{3}}x\right)\cdot x}{\frac{1}{2}\cdot a\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a} = \frac{\left(2a - \frac{2}{\sqrt{3}}x\right)\cdot x}{\frac{\sqrt{3}}{2}a^2} = x\cdot\left(\frac{4}{\sqrt{3}a} - \frac{4x}{3a^2}\right)$$

pro $x \in \left\langle 0, \frac{\sqrt{3}}{2}a \right\rangle$

Z podobnosti trojúhelníků $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C$

plyne: $|AB| : \frac{\sqrt{3}}{2}a = |A'B'| : \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a - x\right)$

$$\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{|A'B'|}{\frac{\sqrt{3}}{2}a - x} \Rightarrow \boxed{|A'B'| = a - \frac{2}{\sqrt{3}}x}$$

Je zřejmé, že $F(0) = 0$ a $F\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right) = 1$.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ x\cdot\left(\frac{4}{\sqrt{3}a} - \frac{4}{3a^2}x\right), & 0 < x \le \frac{\sqrt{3}}{2}a \\ 1, & x > \frac{\sqrt{3}}{2}a \end{cases}$$