Zkouška z Diferenciální geometrie křivek a ploch

30. června 2015

1. Základní definice a věty *(celkem 10 bodů, na známku dobře alespoň 8 bodů)*
   (a) Definujte geodetickou křivost křivky na ploše. *(3 bodů)*
   (b) Definujte tečný vektor a tečný prostor k ploše v bodě. *(4 bodů)*
   (c) Definujte tečné zobrazení k zobrazení mezi plochami. *(3 body)*
2. Početní část *(celkem 36 bodů, na postup k ústní části alespoň 20 bodů)*
   (a) Mějme křivku $\mathbf{c}(t) = \left(e^{2+t^2}, e^{t^2}, t\right)$, $t \in (-1, 2)$.
      i. Najděte křivost a torzi křivky $\mathbf{c}(t)$ v obecném bodě. *(4 body)*
      ii. Najděte Frenétův repér v bodě $\mathbf{c}(0)$. *(4 body)*
   (b) Je dána plocha s jedinou mapou $\mathbf{p}(u, v) = (u\cos v, u\sin v, uv)$, $u \in (0, 4)$, $v \in (0, 8)$.
      i. Vypočtěte první základní formu plochy. *(2 body)*
      ii. Jak závisí *cos* úhlu parametrických křivek $\mathbf{c}_1 : u = k_1$ a $\mathbf{c}_2 : v = k_2$ v jejich průsečíku na konstantách $k_1 \in (0, 4)$ a $k_2 \in (0, 8)$. *(4 body)*
      iii. Popište tečnou rovinu v bodě $\mathbf{p}(2, \frac{\pi}{2})$. *(2 body)*
      iv. Vypočtěte Gaussovu a střední křivost v obecném bodě. *(6 bodů)*
      v. Vypočtěte hlavní směry a křivosti v bodě $\mathbf{p}(\sqrt{2}, \sqrt{2})$. *(4 body)*
      vi. Rozhodněte zda každým bodem plochy prochází alespoň jedna úsečka ležící na ploše. Svoje rozhodnutí odůvodněte. *(2 body)*
      vii. Zjistěte, zda křivky $\mathbf{c}_1$ a $\mathbf{c}_2$ jsou hlavní, asymptotické či geodetické. *(4 body)*
   (c) Označme $P = (0, 0)$, počátek souřadnic v rovině. Obraz křivky $\mathbf{c}$ je popsán jako množina všech bodů v rovině, které splňují následující vlastnost. Pro každé $A \in \langle \mathbf{c} \rangle$ úsečka AP protne přímku s rovnicí $y = 1$ v bodě B a platí, že délka úsečky AB je rovna 1. Nalezněte parametrizaci křivky $\mathbf{c}$. *(4 body)*
3. Věty a důkazy *(celkem 16 bodů, na postup k ústní části alespoň 8 bodů)*
   (a) Uveďte a dokažte Meusnierovu větu. [Tedy větu o křivosti křivky na ploše v závislosti na úhlu mezi $\mathbf{n}$ a $\mathbf{N}$]. *(8 bodů)*
   (b) Formulujte a dokažte isoperimetrickou nerovnost. [Neuvádějte žádné definice ani důkazy lemmat] *(8 bodů)*

Zkouška z Diferenciální geometrie křivek a ploch

22. května 2015

1. Základní definice a věty *(celkem 10 bodů, na postup k ústní části alespoň 8 bodů)*

   (a) Definujte tečný vektor a tečný prostor k ploše v bodě a dále definujte tečné zobrazení. *(6 bodů)*

   (b) Definujte geodetickou křivost křivky na ploše. *(2 body)*

   (c) Formulujte Gauss-Bonnetovu větu pro kompaktní plochy (vztah mezi integrálem z Gaussovy křivosti a Eulerovou charakteristikou). *(2 body)*

2. Početní část *(celkem 36 bodů, na postup k ústní části alespoň 20 bodů)*

   (a) Mějme parametrizovanou křivku $\mathbf{c}(t) = \left(\frac{1}{3}(1+t)^{\frac{3}{2}}, \frac{1}{3}(1-t)^{\frac{3}{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}t\right)$, $t \in (-1,1)$

      i. Najděte křivost a torzi $\mathbf{c}(t)$ v obecném bodě. *(4 body)*

      ii. Najděte Frenétův repér v bodě $\mathbf{c}(0)$. *(3 body)*

      iii. Reparametrizujte křivku obloukem. *(1 bod)*

   (b) Je dána plocha s jedinou mapou $\mathbf{p}(u,v) = (v\cos u, v\sin u, 2\sin u)$, $u \in (0,\pi)$, $v \in (0,\infty)$

      i. Vypočtěte první základní formu plochy a délku následující křivky na ploše

      $$\mathbf{c}_1(t) = \mathbf{p}(t, 4\cos^2 t),\ \ t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

      Stačí sestavit integrál, nemusíte ho dopočítávat. *(4 body)*

      ii. Vypočtěte úhel křivek $\mathbf{c}_2(t) = \mathbf{p}(t, \sin t)$, $t \in (0,\pi)$ a $\mathbf{c}_3(t) = \mathbf{p}(t, \frac{1}{2})$, $t \in (0,\pi)$ v jejich průsečíku. *(3 body)*

      iii. Popište tečnou rovinu v bodě $\mathbf{p}(0,0)$. *(2 body)*

      iv. Vypočtěte střední a Gaussovu křivost v obecném bodě. *(4 body)*

      v. Vypočtěte hlavní směry a hlavní křivosti plochy v okaždém bodě, pro který je $u = \frac{\pi}{2}$. *(4 body)*

      vi. Zjistěte zda křivka $\mathbf{p}(\frac{\pi}{2}, t)$ je hlavní, asymptotická či geodetická. *(4 body)*

      vii. S využitím Meusnierovy věty a Eulerova vzorce určete v bodě $(0,2,2)$ křivost průniku plochy s rovinou $2x + y - z = 0$. *(3 body)*

   (c) Parametrizujte množinu všech bodů X v rovině, které mají následující vlastnost. Existuje bod A na ose x a bod B na ose $y$takové, že úsečka AB má délku d a bod X na této úsečce leží v jedné třetině, blíže k bodu A. (4 body)

3. Věty a důkazy *(celkem 16 bodů, na postup k ústní části alespoň 8 bodů)*

   (a) Uveďte a dokažte Frenetovy vzorce. *(8 bodů)*

   (b) Definujte druhou fundamentální formu plochy, dokažte korektnost definice a odvoďte její matici. *(8 bodů)*

Zkouška z Diferenciální geometrie křivek a ploch

3. června 2015

1. Základní definice a věty *(celkem 10 bodů, na postup k ústní části alespoň 8 bodů)*

   (a) Definujte křivost parametrizované křivky a inflexní bod. *(3 body)*

   (b) Definujte eliptické, parabolické a hyperbolické body na ploše. *(3 body)*

   (c) Definujte první fundamentální formu plochy a uveďte její matici. *(4 body)*

2. Početní část *(celkem 36 bodů, na postup k ústní části alespoň 20 bodů)*

   (a) Mějme parametrizovanou křivku

   $$\mathbf{c}(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t, \frac{1}{\sqrt{2}}\cos t, \sin t\right), \quad t \in (0, 2\pi).$$

   i. Najděte křivost a torzi $\mathbf{c}(t)$ v obecném bodě. *(3 body)*

   ii. Najděte Frenétův repér v obecném bodě. *(3 body)*

   iii. Reparametrizujte křivku obloukem. *(1 bod)*

   iv. Vypočtěte délku křivky. *(1 bod)*

   (b) Je dána plocha s jedinou mapou

   $$\mathbf{p}(u, v) = (a\cos u \sinh v, a \sin u \sinh v, au), \quad u \in (-\pi, \pi), v \in \mathbb{R},$$

   kde $a > 0$ je parametr.

   i. Vypočtěte první základní formu plochy a délku následující křivky na ploše

   $$\mathbf{c}_1(t) = \mathbf{p}(t, 1 - t), \quad t \in (-\pi, \pi).$$

   (4 body)

   ii. Definujme dále

   $$\mathbf{c}_2(t) = \mathbf{p}(t, 0),\ t \in (-\pi, \pi) \quad \text{a} \quad \mathbf{c}_3(t) = \mathbf{p}(0, t),\ t \in (-\pi, \pi).$$

   Nalezněte všechny průsečíky alespoň dvou křivek $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3$ a spočtěte v nich jejich úhel. *(4 body)*

   iii. Vypočtěte střední a Gaussovu křivost v obecném bodě. *(4 body)*

   iv. Vypočtěte hlavní směry a hlavní křivosti plochy v obecném bodě. *(4 body)*

   v. Nalezněte všechny asymptotické křivky na ploše. *(4 body)*

   vi. Existuje přímka, která celá leží na ploše a prochází bodem $(-1, 0, 0)$? Jak je to v obecném bodě plochy? *(4 body)*

   (c) Parametrizujte množinu všech bodů X v rovině, které mají následující vlastnost. Existuje bod A na ose x a bod B na ose y takové, že úsečka AB má délku d a bod X na této úsečce leží a má od bodu A dvakrát větší vzdálenost než od bodu B. *(4 body)*

3. Věty a důkazy *(celkem 16 bodů, na postup k ústní části alespoň 8 bodů)*

   (a) Uveďte a dokažte vzorce pro výpočet křivosti a torze křivky v obecné parametrizaci. *(8 bodů)*

   (b) Definujte geodetiku na ploše a uveďte a dokažte větu o souvislosti s křivkou, která má nulovou geodetickou křivostí. *(8 bodů)*