5. INTEGRÁLNÍ POČET

V této kapitole se budeme zabývat integrováním funkcí, tedy procesem, který je vzhledem k derivování opačný. Vrátíme se přitom zpět k funkcím jedné reálné proměnné, a integrální počet funkcí dvou a tří proměnných (dvojný, trojný, případně křivkový či plošný integrál) tudíž zůstane stranou naší pozornosti.

Funkcí tak na následujících stranách budeme rozumět reálnou funkci jedné reálné proměnné.

5.1 Primitivní funkce

Definice. *Nechť funkce f je definována na otevřeném intervalu I a existuje funkce F taková, že pro všechna $x \in I$ platí $F'(x) = f(x)$. Potom říkáme, že funkce F je na intervalu I* ***primitivní funkcí*** *k funkci f.*

Poznámky.

(i) Na rozdíl od derivování, kde existuje také pojem derivace v bodě, mluvíme o primitivní funkci výhradně na celém intervalu, a to otevřeném (tj. na intervalech typu $(-\infty, +\infty)$, $(-\infty, a)$, $(a, +\infty)$ nebo (a, b), kde $a, b \in \mathcal{R}$, $a < b$).

(ii) Primitivní funkci k funkci $f(x)$ bývá zvykem označovat zápisem $F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x$ a hovořit o ní jakožto o ***neurčitém integrálu*** funkce f (symbol $\mathrm{d}x$ stojící za symbolem integrálu a označením integrované funkce určuje, podle které proměnné se integruje).

(iii) Integrací (integrováním) tedy rozumíme postup nalezení primitivní funkce (tzn. funkce, jejímž derivováním získáme danou původní funkci).

(iv) Primitivní funkce $F(x)$ má v každém bodě uvažovaného intervalu vlastní derivaci (rovnou $f(x)$), a je tudíž funkcí spojitou.

(v) Jelikož vztah $F(x) = \int f(x)\,dx$ odpovídá rovnosti $F'(x) = f(x)$, pro diferencovatelnou funkci f (na otevřeném intervalu I) platí: $\int f'(x)\,dx = f(x)$.

(vi) O funkci, která má na otevřeném intervalu funkci primitivní, říkáme, že je na tomto intervalu integrovatelná.

Věta. *Nechť f je spojitá funkce na otevřeném intervalu I. Pak funkce f má na intervalu I primitivní funkci.*

Poznámky.

(i) Uvedené tvrzení nelze obrátit. To znamená, že pokud funkce f má na intervalu I funkci primitivní, nemusí být nutně funkcí spojitou na I (jinými slovy: derivace funkce, existuje-li, nemusí být funkce spojitá).
Všechny funkce, které jsou derivacemi, tak tvoří širší množinu (nadmnožinu), než je množina spojitých funkcí (na otevřeném intervalu).

(ii) Je-li funkce f definována na uzavřeném (či polouzavřeném) intervalu, je docela dobře možné uvažovat její primitivní funkci F i na intervalu tohoto druhu — platnost rovnosti $F' = f$ pak samozřejmě požadujeme navíc i v krajních bodech takového intervalu (derivací funkce F v krajním bodě uzavřeného intervalu přitom máme na mysli příslušnou jednostrannou derivaci).
Z hlediska aplikací primitivních funkcí, tj. pro zavedení pojmu určitého Newtonova integrálu, je však podstatná existence primitivní funkce právě na otevřeném intervalu (jak uvidíme později).
Nicméně: je-li funkce f spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$ ($a, b \in \mathcal{R}$, $a < b$), existuje funkce F taková, že $F'_+(a) = f(a)$, $F'_-(b) = f(b)$ a pro všechna $x \in (a, b)$ je $F'(x) = f(x)$. Funkce F je pak také na celém uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$ funkcí spojitou (v bodě a zprava, v bodě b zleva).

Je-li $F(x)$ primitivní funkcí k funkci $f(x)$ (na otevřeném intervalu I), je primitivní funkcí k $f(x)$ také každá funkce tvaru $F(x) + c$, kde c je reálná konstanta (podle pravidla o derivování součtu je $\big(F(x) + c\big)' = F'(x) + c' = f(x) + 0 = f(x)\big)$.

Z druhé strany, jestliže $F(x)$, $G(x)$ jsou dvě primitivní funkce k dané funkci $f(x)$ (na otevřeném intervalu I), je $\big(G(x) - F(x)\big)' = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$. Tj. rozdíl funkcí $G - F$ má v každém bodě otevřeného intervalu I nulovou derivaci a podle tvrzení uvedeného v samém závěru třetí kapitoly se jedná o konstantní funkci. Je tedy $G - F = c$ pro vhodné $c \in \mathcal{R}$, neboli $G(x) = F(x) + c$.

Existence primitivní funkce k dané funkci $f(x)$ na otevřeném intervalu I tak není jednoznačná. Všechny primitivní funkce jsou však tvaru $F(x) + c$, kde $F' = f$ a c je reálné číslo. Říkáme proto, že primitivní funkce je určena jednoznačně až na integrační konstantu, což vystihujeme zápisem $\int f(x)\,dx = F(x) + c$.

Příklady.

(a) Protože pro $g(x) = x$, $x \in \mathcal{R}$, platí $g'(x) = 1$, je $g(x) = x$ jednou z primitivních funkcí ke konstantní funkci $f(x) = 1$ (na intervalu $(-\infty, +\infty)$, ale i na intervalu $(0, +\infty)$ apod.). Užijeme-li symbolu neurčitého integrálu, lze tento fakt zapsat vztahem $\int 1\,\mathrm{d}x = x + c$. Podobně pro $h(x) = -x$, $x \in \mathcal{R}$, je $h'(x) = -1$, takže na $(-\infty, +\infty)$ (ale třeba i na $(-\infty, 0)$ apod.) je $\int(-1)\,\mathrm{d}x = -x + c$.

(b) Funkci, která nemá na intervalu funkci primitivní, je (s ohledem na větu výše) nutno hledat mezi funkcemi nespojitými.
Uvažujme kupříkladu funkci $\mathrm{sgn}(x)$, $x \in \mathcal{R}$. Jelikož $\mathrm{sgn}(x) = 1$ pro $x > 0$ a $\mathrm{sgn}(x) = -1$ pro $x < 0$, je na $(0, +\infty)$ primitivní funkcí funkce $g(x) = x + c_1$ a na $(-\infty, 0)$ funkce $h(x) = -x + c_2$ (c_1, c_2 zde značí integrační konstanty).
Pokud by měla k funkci $\mathrm{sgn}(x)$ existovat primitivní funkce na celém $\mathcal{R}$, musela by to tedy být taková spojitá (viz dříve uvedená poznámka (iv)!) funkce $F(x)$, pro kterou je $F(x) = g(x)$ na $(0, +\infty)$ a $F(x) = h(x)$ na $(-\infty, 0)$. V bodě nula z důvodu spojitosti funkce F přitom musí platit vztah $F(0) = \lim\limits_{x\to 0} F(x) = \lim\limits_{x\to 0_+} g(x) = \lim\limits_{x\to 0_-} h(x)$, tj. $F(0) = \lim\limits_{x\to 0_+} (x + c_1) = \lim\limits_{x\to 0_-} (-x + c_2)$, což může nastat jedině pro $c_1 = c_2$.
Šanci být primitivní funkcí k funkci $\mathrm{sgn}(x)$ na intervalu $(-\infty, +\infty)$ má tedy pouze funkce $F(x) = \begin{cases} x+c, & \text{pro } x > 0; \\ c, & \text{pro } x = 0; \\ -x+c, & \text{pro } x < 0, \end{cases}$ neboli funkce $F(x) = |x| + c$, $x \in \mathcal{R}$, $c \in \mathcal{R}$.
Rovnost $F'(x) = \mathrm{sgn}(x)$ však na celém $\mathcal{R}$ nemůže být splněna, neboť v nule, jak víme, derivace absolutní hodnoty neexistuje. Funkce $\mathrm{sgn}(x)$ je tak příkladem funkce, která na intervalu $(-\infty, +\infty)$ primitivní funkci nemá.
(Ty nespojité funkce, které mají na otevřeném intervalu neurčitý integrál, jsou funkce značně komplikovaného průběhu.)

Otázkou nyní je, jak neurčitý integrál dané (a v našem případě spojité) funkce najít a k čemu to může být dobré.

Zatímco o využití integrálního počtu se budeme zajímat v pozdějších partiích věnovaných určitému integrálu, obraťme nyní pozornost k metodám, kterými se v některých případech (ne ve všech!) dají primitivní funkce stanovit. Proces integrace je totiž nepoměrně náročnější než derivování, a ne každou primitivní funkci, i když existuje, dokážeme pomocí známých elementárních funkcí — za použití konečného počtu operací součtu, součinu, skládání aj. — vyjádřit. (Jako příklad bývá v této souvislosti často uváděn $\int \exp(-x^2)\,\mathrm{d}x$; tento neurčitý integrál je možné zapsat ve tvaru nekonečné mocninné řady.)

S tím pak souvisí i neexistence obecně platného postupu, podle kterého by šlo integraci provést (a to je oproti derivování též značný rozdíl). Různé typy funkcí se dají integrovat různými způsoby (někdy lze rozdílné integrační postupy aplikovat i na tu samou funkci), přičemž jejich volba a následný výpočet jsou především věcí určité zkušenosti s touto problematikou. Správnost výsledku je však v každém případě možné ověřit zderivováním výsledné funkce.

5.2 Přímá integrace

Při hledání primitivní funkce je základní snahou převést integrovanou funkci na tvar, o kterém víme, derivací jaké funkce je (nebo na tvar, jejž lze již standardně integrovat). Vycházíme přitom z toho, že známe derivace jednotlivých elementárních funkcí, a tak máme k dispozici následující vztahy, které z těchto derivací bezprostředně vyplývají:

$$\int 0\,\mathrm{d}x = c\,,\quad x \in \mathcal{R}\,; \qquad \int 1\,\mathrm{d}x = x + c\,,\quad x \in \mathcal{R}\,;$$

$$\int x^n\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{n+1}\cdot x^{n+1} + c\,,\quad n \in \mathcal{N},\ x \in \mathcal{R}\,;$$

$$\int x^k\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{k+1}\cdot x^{k+1} + c\,,\quad -2 \geq k \in \mathcal{Z},\ x \in (-\infty, 0) \text{ nebo } x \in (0, +\infty)\,;$$

$$\int x^a\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{a+1}\cdot x^{a+1} + c\,,\quad a \in \mathcal{R} - \{-1\},\ x \in (0, +\infty)\,;$$

$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln x + c\,,\quad x \in (0, +\infty)\,; \qquad \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln(-x) + c\,,\quad x \in (-\infty, 0)\,;$$

$$\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + c\,,\quad x \in \mathcal{R}\,; \qquad \int a^x\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{\ln a}\cdot a^x + c\,,\quad 1 \neq a > 0,\ x \in \mathcal{R}\,;$$

$$\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + c\,,\quad x \in \mathcal{R}\,; \qquad \int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + c\,,\quad x \in \mathcal{R}\,;$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \operatorname{tg} x + c\,,\quad x \in (-\tfrac{\pi}{2} + k\pi, \tfrac{\pi}{2} + k\pi),\ k \in \mathcal{Z}\,;$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = -\operatorname{cotg} x + c\,,\quad x \in (k\pi, \pi + k\pi),\ k \in \mathcal{Z}\,;$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin x + c = -\arccos x + c\,,\quad x \in (-1, 1)\,;$$

$$\int \frac{1}{1 + x^2}\,\mathrm{d}x = \operatorname{arctg} x + c = -\operatorname{arccotg} x + c\,,\quad x \in \mathcal{R}\,.$$

Poznámky.

(i) Namísto $\int 1\,\mathrm{d}x$, resp. $\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ píšeme pouze $\int \mathrm{d}x$, resp. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x}$ apod.

(ii) Derivací funkce $F(x) = \frac{1}{n+1}\cdot x^{n+1}$, $n \in \mathcal{N}$, $x \in (-\infty, +\infty)$, opravdu dostáváme rovnost $F'(x) = \dfrac{1}{n+1}\cdot(n+1)\cdot x^n = x^n$ atd.

(iii) Skutečnost, že $\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln x + c$ pro $x > 0$ a $\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln(-x) + c$ pro $x < 0$ zapisujeme krátce $\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + c$. Absolutní hodnotu vystupující v primitivní funkci pak odstraňujeme podle toho, na kterém intervalu se pohybujeme.

(iv) Protože $\arcsin x$ a $-\arccos x$ jsou dvě primitivní funkce k funkci $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, je jejich rozdíl na intervalu $(-1,1)$ roven konstantní funkci: $\arcsin x + \arccos x = c$ $(c \in \mathcal{R})$. Hodnotu této konstanty zjistíme např. dosazením nuly do levé strany uvedené rovnosti, tj. $\arcsin 0 + \arccos 0 = 0 + \frac{\pi}{2} = c$. Protože funkce $\arcsin x$ i $\arccos x$ jsou funkce, které jsou spojité dokonce na uzavřeném intervalu $\langle -1,1\rangle$, lze platnost zmíněné rovnosti rozšířit na tento celý interval. Je tedy $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ pro $x \in \langle -1,1\rangle$.

(v) Podobně musí na $\mathcal{R}$ platit rovnost $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x = c$. Pro $x = 0$ je v tomto případě $\operatorname{arctg} 0 + \operatorname{arccotg} 0 = 0 + \frac{\pi}{2} = c$, což dává již dříve uvedený součtový vzorec $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x = \frac{\pi}{2}$, $x \in \mathcal{R}$.
(Za pomoci derivací je tak možno dokazovat platnost některých vzorců.)

(vi) Může se stát, že různými integračními postupy dostaneme odlišné primitivní funkce (často je tato různost pouze formální a jeden tvar se dá na druhý jednoduše převést vhodnou úpravou). V případě, že výsledky nejsou chybné, liší se obě primitivní funkce nejvýše integrační konstantou. Integrováním tak můžeme — jako vedlejší produkt — některé vzorce odvodit.

(vii) V tuto chvíli ještě nedokážeme nic říci o tom, jak na příslušných otevřených intervalech vypadají primitivní funkce k funkcím $\ln x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arccotg} x$.

Příklady.

(a) $\int x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3 + c$, $x \in \mathcal{R}$; $\int x^7\,dx = \frac{1}{8}x^8 + c$, $x \in \mathcal{R}$.

(b) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2} = \int x^{-2}\,dx = \frac{x^{-1}}{-1} + c = -\frac{1}{x} + c$, $x \in (-\infty,0)$ nebo $x \in (0,+\infty)$;

$\displaystyle\int \frac{dx}{x^5} = \int x^{-5}\,dx = \frac{x^{-4}}{-4} + c = -\frac{1}{4x^4} + c$, $x \in (-\infty,0)$ nebo $x \in (0,+\infty)$.

(c) $\displaystyle\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \tfrac{2}{3}x\sqrt{x} + c$, $x \in (0,+\infty)$;

$\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int x^{-\frac{1}{2}}\,dx = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = 2\sqrt{x} + c$, $x \in (0,+\infty)$.

(d) $\displaystyle\int 2^x\,dx = \frac{1}{\ln 2}\cdot 2^x + c$, $x \in \mathcal{R}$.

(e) $\displaystyle\int (1+\operatorname{tg}^2 x)\,dx = \int \Big(1+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\Big)\,dx = \int \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}\,dx = \int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x + c$, $x \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathcal{Z}$.

Předpokládejme, že funkce f, g jsou na otevřeném intervalu I integrovatelné, $\alpha, \beta \in \mathcal{R}$.
Potom platí: $\displaystyle\int \big(\alpha f(x) \pm \beta g(x)\big)\,dx = \alpha \int f(x)\,dx \pm \beta \int g(x)\,dx$.
Tato rovnost je jednoduchým důsledkem pravidla o derivaci součtu či rozdílu funkcí a o derivování funkce násobené konstantou. Označíme-li F, resp. G primitivní funkci k f, resp. g (na intervalu I), je pravá strana uvedeného vztahu rovna $\alpha F(x) \pm \beta G(x) + c$, a levá též: na uvažovaném intervalu je totiž $\big(\alpha F(x) \pm \beta G(x) + c\big)' = \alpha F'(x) \pm \beta G'(x) = \alpha f(x) \pm \beta g(x)$.

Právě uvedený vzorec (integrování funkcí má tedy jako derivování vlastnost linearity) můžeme také zařadit k přímým integračním postupům. S jeho pomocí již dokážeme najít nejen primitivní funkci k libovolnému polynomu, ale zintegrovat i několik dalších funkcí.

Příklady.

(a) $\int(4x^3+6x^2-6x+3)\,\mathrm{d}x = 4\int x^3\,\mathrm{d}x + 6\int x^2\,\mathrm{d}x - 6\int x\,\mathrm{d}x + 3\int \mathrm{d}x =$
$= 4\dfrac{x^4}{4} + 6\dfrac{x^3}{3} - 6\dfrac{x^2}{2} + 3x + c = x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 3x + c\,,\ x \in \mathcal{R}.$

(b) $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x^2}{x}\,\mathrm{d}x + \int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \int x\,\mathrm{d}x + \int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{x^2}{2} + \ln|x| + c\,,\ x \in (-\infty,0)$
nebo $x \in (0,+\infty)$.

(c) $\displaystyle\int \frac{2x-3\sqrt{x}}{x^3}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2}{x^2}\,\mathrm{d}x - \int \frac{3\sqrt{x}}{x^3}\,\mathrm{d}x = 2\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2} - 3\int x^{\frac{1}{2}-3}\,\mathrm{d}x =$
$\displaystyle = 2\int x^{-2}\,\mathrm{d}x - 3\int x^{-\frac{5}{2}}\,\mathrm{d}x = 2\frac{x^{-1}}{-1} - 3\frac{x^{-\frac{3}{2}}}{-\frac{3}{2}} + c = \frac{-2}{x} + \frac{2}{x^{\frac{3}{2}}} + c = \frac{2}{x}\Big(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1\Big) + c,$
$x \in (0,+\infty)$.

(d) $\displaystyle\int \operatorname{cotg}^2 x\,\mathrm{d}x = \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \Big(\frac{1}{\sin^2 x} - 1\Big)\,\mathrm{d}x =$
$\displaystyle = \int \frac{1}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x - \int \mathrm{d}x = -\operatorname{cotg} x - x + c\,,\ x \in (k\pi, \pi + k\pi),\ k \in \mathcal{Z}.$

(e) $\displaystyle\int \frac{2x^3-3x^2+2x-2}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2x(x^2+1)-3(x^2+1)+1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x =$
$\displaystyle = \int 2x\,\mathrm{d}x - \int 3\,\mathrm{d}x + \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} = x^2 - 3x + \operatorname{arctg} x + c\,,\ x \in \mathcal{R}.$

Další elementární nástroj pro integraci funkcí poskytuje následující fakt: je-li na jistém otevřeném intervalu $F(x)$ primitivní funkcí k $f(x)$, $a, b \in \mathcal{R}$, $a \neq 0$, pak na příslušném (závisejícím na hodnotách a, b) otevřeném intervalu platí: $\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{a} \cdot F(ax+b)$.

Ověřit platnost této rovnosti znamená zderivovat její pravou stranu (jako složenou funkci): $\Big(\dfrac{1}{a} \cdot F(ax+b)\Big)' = \dfrac{1}{a} \cdot F'(ax+b) \cdot a = F'(ax+b) = f(ax+b)$ — a to je skutečně funkce integrovaná. (Podstatné je, že argument integrované funkce f je lineární výraz v proměnné x. Například pro kvadratický výraz v této proměnné je uvedená formule nepoužitelná.)

Příklady.

(a) Polynom $(2x+5)^{12}$ je jistě možno rozvést podle binomické věty a poté integrovat člen po členu, jednodušší je ale užít právě uvedeného vztahu (zde je $a = 2$, $b = 5$):
$\int(2x+5)^{12}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{13}(2x+5)^{13} + c = \frac{1}{26}(2x+5)^{13} + c\,,\ x \in \mathcal{R}.$

(b) $\int \sin(1-5x)\,\mathrm{d}x = \big(-\frac{1}{5}\big)\big(-\cos(1-5x)\big) + c = \frac{1}{5}\cos(1-5x) + c\,,\ x \in \mathcal{R}.$
(V tomto případě bylo $a = -5$, $b = 1$.)

(c) Následující integrál je zvláště důležitý (k jeho výpočtu využíváme vztahu pro kosinus dvojnásobného úhlu):
$\displaystyle\int \cos^2 x\,\mathrm{d}x = \int \frac{\cos 2x + 1}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \cos 2x\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int \mathrm{d}x = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2}\sin 2x + \tfrac{1}{2}x + c =$
$= \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + c\,,\ x \in \mathcal{R}.$
(Zde je $a = 2$ a absolutní člen $b = 0$.)

Dále: $\int \sin^2 x\,\mathrm{d}x = \int (1-\cos^2 x)\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{d}x - \int \cos^2 x\,\mathrm{d}x = x - (\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x) + c =$
$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + c\,,\quad x \in \mathcal{R}$.

(d) Použijeme-li vzorce pro sinus dvojnásobného úhlu, snadno zjistíme, že pro $x \in \mathcal{R}$ je $\int \sin x \cos x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int 2\sin x\cos x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \sin 2x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(-\frac{1}{2}\cos 2x) + c = -\frac{1}{4}\cos 2x + c\,.$

(e) Spočtěme integrál $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2}$, kde a je kladný parametr a $x \in (-\infty, +\infty)$.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2} = \int \frac{\mathrm{d}x}{a^2\left(1+\frac{x^2}{a^2}\right)} = \frac{1}{a^2}\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{1}{a^2}\frac{1}{\frac{1}{a}}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + c = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + c\,.$$

(Koeficient, kterým je násobená proměnná x, je zde roven a^{-1}, zatímco absolutní člen je nulový.)

O správnosti výpočtu je dobré přesvědčit se zderivováním výsledné funkce:

$$\left(\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + c\right)' = \frac{1}{a}\frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}\cdot\frac{1}{a} = \frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{x^2}{a^2}} = \frac{1}{a^2+x^2}\,,$$ což také mělo vyjít.

(f) Podobně pro $a > 0$, $x \in (-a, a)$ je $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} =$

$$= \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}} = \frac{1}{a}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \frac{1}{a}\frac{1}{\frac{1}{a}}\arcsin\frac{x}{a} + c = \arcsin\frac{x}{a} + c\,.$$

(g) Na intervalu $(-\infty, +\infty)$ platí: $\int \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = -\mathrm{e}^{-x} + c$; $\int \mathrm{e}^{-5x}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{5}\mathrm{e}^{-5x} + c$; $\int 3^{1-2x}\,\mathrm{d}x = \left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{\ln 3}\cdot 3^{1-2x} + c = -\frac{1}{\ln 9}\cdot 3^{1-2x} + c\,.$

(h) Je $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x-1} = \ln(x-1) + c$ pro $x > 1$, $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x-1} = \ln(1-x) + c$ pro $x < 1$. To opět můžeme vyjádřit stručněji jako $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x-1} = \ln|x-1| + c$. Pozor:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1-x} = -\int \frac{\mathrm{d}x}{x-1} = -\ln|x-1| + c = -\ln|1-x| + c \quad \text{na } (-\infty, 1) \text{ nebo na } (1, +\infty).$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{2-3x} = -\frac{1}{3}\ln|2-3x| + c \quad \text{na } (-\infty, \tfrac{2}{3}) \text{ nebo na } (\tfrac{2}{3}, +\infty).$$

Poslední pomůckou, která sice již spadá do substitučních metod (ostatně jako vztah předchozí), ale umožňuje v řadě případů okamžité určení primitivní funkce, je založena na vyjádření tzv. logaritmické derivace. Na otevřeném intervalu, kde $f(x) > 0$, je

$$(\ln f(x))' = \frac{f'(x)}{f(x)}\,,\quad \text{takže i} \quad \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln f(x) + c\,.$$

(Pro intervaly, kde $f(x) < 0$, používáme opět konvence s absolutní hodnotou.)

Pro použití uvedeného vztahu je důležité rozpoznat — případně až na multiplikativní konstantu — v integrovaném výrazu funkci (vystupující ve jmenovateli) a její derivaci (v čitateli výrazu).

Příklady.

(a) $\displaystyle\int \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\ln|1+x^2| + c = \tfrac{1}{2}\ln(1+x^2) + c\,,\quad x \in \mathcal{R}$

(výraz $1 + x^2$ je totiž na celém $\mathcal{R}$ kladný).

(b) Platí též $\displaystyle\int \frac{2x}{x^2}\,\mathrm{d}x = \ln(x^2)+c = 2\ln|x|+c = 2\int \frac{\mathrm{d}x}{x}$ pro $x \in (-\infty, 0)$ nebo $x \in (0, +\infty)$.

(c) $\displaystyle\int \frac{7-3x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{7}{1+x^2}\,\mathrm{d}x - 3\int \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = 7\operatorname{arctg} x - \tfrac{3}{2}\ln(1+x^2) + c\,,\quad x \in \mathcal{R}.$

$\displaystyle\int \operatorname{tg} x\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x = -\int \frac{-\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x = -\ln|\cos x|$ na $(-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi)$, $k \in \mathcal{Z}$.

$\displaystyle\int \operatorname{cotg} x\,\mathrm{d}x = \int \frac{\cos x}{\sin x}\,\mathrm{d}x = \ln|\sin x|$ na intervalech $(k\pi, \pi + k\pi)$, $k \in \mathcal{Z}$.

(d) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x\cos x} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x \cdot \frac{\sin x}{\cos x}} = \int \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\operatorname{tg} x}\,\mathrm{d}x = \ln|\operatorname{tg} x| + c$ na intervalech typu

$(k\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}+k\frac{\pi}{2})$, $k \in \mathcal{Z}$. Odtud lze (využitím vztahu pro sinus dvojnásobného argumentu)

spočítat i $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x}$, tentokrát pro $x \in (k\pi, \pi + k\pi)$, $k \in \mathcal{Z}$:

je $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x} = \int \frac{\mathrm{d}x}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}\frac{1}{\frac{1}{2}}\ln|\operatorname{tg}\frac{x}{2}| + c = \ln|\operatorname{tg}\frac{x}{2}| + c\,.$

Protože $\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$, je také $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin(\frac{\pi}{2} - x)} = -\ln\left|\operatorname{tg}\frac{\frac{\pi}{2} - x}{2}\right| + c =$

$= -\ln|\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2})| + c = \ln|\operatorname{cotg}(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4})| + c\,,$ kde $x \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, $k \in \mathcal{Z}$.

Zde jsme při úpravách použili vztahu $-\ln\dfrac{A}{B} = \ln\dfrac{B}{A}$ (platícího např. pro $A, B > 0$) a sudosti absolutní hodnoty funkce kotangens.

5.3 Metoda per partes

Zatímco formule pro derivaci součtu (rozdílu) funkcí jsme využili k přímé integraci, je metoda ***per partes*** (integrace „po částech") odvozena ze vzorečku, podle kterého se derivuje součin funkcí.

Označme $u(x)$, $v(x)$ dvě diferencovatelné funkce na otevřeném intervalu I. Poněvadž pro derivaci jejich součinu platí $\big(u(x)\cdot v(x)\big)' = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x)$, vyplývá odtud ihned, že $u(x)\cdot v(x) = \int \big(u(x)\cdot v(x)\big)'\,\mathrm{d}x = \int \big(u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x)\big)\,\mathrm{d}x$, z čehož dostáváme vztah

$$\int u(x)\cdot v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)\cdot v(x) - \int u'(x)\cdot v(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Dokážeme-li nyní spočítat jeden z integrálů vystupujících v této rovnosti, jsme podle ní schopni vypočíst i integrál druhý.

Příklady.

(a) Uvažujme funkce $u(x) = x$, $v(x) = \sin x$. Protože $u'(x) = 1$, $v'(x) = \cos x$, dostáváme integrací per partes: $\int x \cos x \, dx = x \sin x - \int 1 \cdot \sin x \, dx = x \sin x + \cos x + c$, $x \in \mathcal{R}$.

(b) Podobně pro výpočet integrálu $\int x \sin x \, dx$ zvolíme $u = x$, $v' = \sin x$, takže $u' = 1$ a $v = -\cos x$. Poté pro $x \in \mathcal{R}$ dostaneme:
$\int x \sin x \, dx = x(-\cos x) - \int 1 \cdot (-\cos x) \, dx = -x \cos x + \int \cos x \, dx = -x \cos x + \sin x + c$.
V takovýchto příkladech je třeba správně rozhodnout, kterou ze vzájemně násobených funkcí vystupujících v integrálu prohlásit za funkci nederivovanou (tj. $u(x)$) a kterou za funkci derivovanou (tj. $v'(x)$). Pokud bychom v tomto příkladu volili naopak $u = \sin x$, $v' = x$, potom je $u' = \cos x$ a $v = \frac{1}{2}x^2$, a pro hledaný neurčitý integrál dostáváme: $\int x \sin x \, dx = \frac{1}{2}x^2(\sin x) - \int \frac{1}{2}x^2 \cdot \cos x \, dx$. Ihned je vidět, že tento postup k cíli nepovede, protože namísto abychom mocninu x snížili, a tento člen tak z integrálu odstranili, došlo k jejímu zvýšení.
V případech, kdy není jasné, kterou z možností při integraci per partes zvolit, je samozřejmě možné (a žádoucí) zkusit možnosti všechny. (I když k cíli nakonec nemusí vést žádná.)

(c) Zcela analogickým způsobem se metoda per partes používá i k výpočtu integrálů typu $\int x^n e^{ax} \, dx$, kde $n \in \mathcal{N}$, $a \neq 0$. Volíme zde $u = x^n$, $v' = e^{ax}$, a protože $u' = nx^{n-1}$, $v = \frac{1}{a} e^{ax}$, máme $\int x^n e^{ax} \, dx = \frac{1}{a}x^n e^{ax} - \frac{n}{a} \int x^{n-1} e^{ax} \, dx$.
Tím jsme výpočet daného integrálu převedli na integrál stejného typu, ve kterém se ale x vyskytuje v mocnině o jednu nižší. Použijeme-li tudíž tuto metodu n-krát za sebou (vždy při stejné volbě e^{ax} jako derivované funkce a mocniny x^k, $k = 1, 2, \ldots, n$, jako funkce nederivované), dokážeme mocninu x z neurčitého integrálu zcela odstranit a exponenciální funkci nakonec snadno zintegrujeme.

(d) Zkusme aplikovat metodu per partes na integrál $\int \sin x \cos x \, dx$, který jsme spočítali již v minulém oddílu. Například pro $u = \sin x$, $v' = \cos x$, je $u' = \cos x$, $v = \sin x$, takže $\int \sin x \cos x \, dx = \sin x \cdot \sin x - \int \cos x \sin x \, dx$.
Zdálo by se, že převedením hledaného integrálu na ten samý integrál si mnoho nepomůžeme. Ale zde tomu tak není: na uvedený vztah se můžeme dívat jako na rovnici pro neznámou primitivní funkci. Označíme-li tedy $J = \int \sin x \cos x \, dx$, je $J = \sin^2 x - J$, tj. $2J = \sin^2 x$ a $J = \int \sin x \cos x \, dx = \frac{1}{2} \sin^2 x + c$, $x \in \mathcal{R}$.
Přímou integrací jsme však obdrželi (alespoň na pohled) jiný vztah: $J = \int \sin x \cos x \, dx = -\frac{1}{4} \cos 2x + c$. Jsou-li ale oba výsledky správné, musí se tyto primitivní funkce lišit pouze aditivní konstantou. A tak tomu skutečně je: $-\frac{1}{4} \cos 2x = -\frac{1}{4}(1 - 2\sin^2 x) = \frac{1}{2} \sin^2 x - \frac{1}{4}$.

(e) Stejným „trikem“, tj. vytvořením rovnice pro hledaný integrál, lze pomocí metody per partes najít primitivní funkci k funkci $e^x \sin x$ (v tomto případě se totiž derivováním ani exponenciální, ani goniometrické funkce nezbavíme).
Zvolíme-li např. $u = e^x$, $v' = \sin x$ (v tuto chvíli jsou obě možnosti stejně dobré), je $u' = e^x$, $v = -\cos x$, takže $\int e^x \sin x \, dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x \, dx$.
Použijeme-li nyní metody per partes ještě jednou, a zde je již nutné za nederivovanou funkci opět volit funkci exponenciální, tj. $u = e^x$, $v' = \cos x$ a $u' = e^x$, $v = \sin x$, dostaneme: $\int e^x \sin x \, dx = -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x \, dx$.
Označíme-li $J = \int e^x \sin x \, dx$, je $J = e^x(\sin x - \cos x) - J$, tzn. $2J = e^x(\sin x - \cos x)$, odkud $J = \int e^x \sin x \, dx = \frac{1}{2} e^x(\sin x - \cos x) + c$, $x \in \mathcal{R}$.

(f) Zvláště významné je použití metody per partes pro integraci elementárních funkcí $\ln x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arccotg} x$, $\arcsin x$, $\arccos x$. Postup je ve všech těchto případech stejný. Integrovanou elementární funkci násobíme konstantní funkcí rovnou jedné — a tuto konstantu bereme jako funkci derivovanou, abychom zderivováním dané elementární funkce získali integrál, který bude možno spočítat.

Je tedy např. $\int \ln x \, dx = \int 1 \cdot \ln x \, dx$, kde pokládáme $u = \ln x$, $v' = 1$, a tedy $u' = \frac{1}{x}$, $v = x$. Další postup je pak již zcela jasný: $\int \ln x \, dx = x \ln x - \int \frac{1}{x} \cdot x \, dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + c$, $x \in \mathcal{R}^+$.

(g) Také integrál $\int x^2 \operatorname{arctg} x \, dx$ řešíme podobně: za nederivovanou funkci volíme $\operatorname{arctg} x$, tj. $u = \operatorname{arctg} x$, $v' = x^2$, a tudíž $u' = \dfrac{1}{1+x^2}$, $v = \frac{1}{3}x^3$. Dostáváme tak:

$$\int x^2 \operatorname{arctg} x \, dx = \tfrac{1}{3}x^3 \operatorname{arctg} x - \frac{1}{3} \int \frac{x^3}{1+x^2} \, dx = \tfrac{1}{3}x^3 \operatorname{arctg} x - \frac{1}{3} \int \left(x - \frac{x}{1+x^2} \right) dx =$$

$$= \tfrac{1}{3}x^3 \operatorname{arctg} x - \frac{1}{3} \int x \, dx + \frac{1}{3} \int \frac{x}{1+x^2} \, dx = \tfrac{1}{3}x^3 \operatorname{arctg} x - \tfrac{1}{6}x^2 + \tfrac{1}{6} \ln(1+x^2) + c, \; x \in \mathcal{R}.$$

5.4 Integrování racionálních lomených funkcí

Racionální lomené funkce jsou třídou funkcí, kde obecný postup, jak nalézt primitivní funkci, existuje. To je důležité i z toho důvodu, že řadu integrálů (jak uvidíme v následujícím oddílu) je možné substitucí převést právě na integraci těchto funkcí.

Protože s některými příklady integrování racionálních lomených funkcí jsme se již setkali — například $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \ln x + c$, $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + c$, $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + c$ — můžeme očekávat, že jako primitivní funkce se tu budou uplatňovat zejména logaritmická funkce, arkustangens (nebo arkuskotangens) a funkce mocninná.

Integraci racionálních lomených funkcí je možno rozložit do několika kroků:
— jedná-li se o funkci, která není ryze lomená, je v prvé řadě nutné částečné vydělení jejího čitatele jmenovatelem;
— poté následuje rozklad takto získané ryze lomené racionální funkce na parciální zlomky (ne vždy je ale pro vlastní integraci nutný);
— v poslední fázi pak integrujeme jednotlivé členy tohoto rozkladu.

Jelikož v rozkladu racionální lomené funkce se vyskytují zlomky několika tvarů (pokud nebereme v úvahu polynom, který vznikne částečným vydělením neryze lomené funkce — jeho integrace je ale bezproblémová), stačí znát integrační postup jen pro tyto případy. Těmi jsou:

1. integrál typu $\displaystyle\int \frac{A}{x - x_0} \, dx$, kde $0 \neq A \in \mathcal{R}$, $x_0 \in \mathcal{R}$;

2. integrál typu $\displaystyle\int \frac{A}{(x-x_0)^k}\,\mathrm{d}x$, kde $0 \neq A \in \mathcal{R}$, $x_0 \in \mathcal{R}$, $2 \le k \in \mathcal{N}$;

3. integrál typu $\displaystyle\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+d}\,\mathrm{d}x$, kde $A, B, a, b, d \in \mathcal{R}$, $a > 0$, $b^2 < 4ad$ (tj. kvadratický trojčlen je v reálném oboru nerozložitelný a díky $a > 0$ nabývá jen kladných hodnot; v příkladech, kde by bylo a záporné, je možné zlomek rozšířit číslem minus jedna);

4. integrál typu $\displaystyle\int \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+d)^k}\,\mathrm{d}x$, kde opět $A, B, a, b, d \in \mathcal{R}$, $b^2 < 4ad$, $2 \le k \in \mathcal{N}$.

Vyřešit první dva typy neurčitých integrálů již umíme: je $\displaystyle\int \frac{A}{x-x_0}\,\mathrm{d}x = A \cdot \ln|x-x_0| + c$ a $\displaystyle\int \frac{A}{(x-x_0)^k}\,\mathrm{d}x = A\int (x-x_0)^{-k}\,\mathrm{d}x = A \cdot \frac{(x-x_0)^{-k+1}}{-k+1} + c = \frac{A}{1-k} \cdot \frac{1}{(x-x_0)^{k-1}} + c$, a to buď pro $x \in (-\infty, x_0)$ nebo pro $x \in (x_0, +\infty)$.

Integrály uvedené pod bodem 3. jsme již pro některé speciální hodnoty konstant také počítali. V obecném případě se postupuje takto: výraz v čitateli upravíme tak, aby obsahoval derivaci jmenovatele, tj.

$$\frac{Ax+B}{ax^2+bx+d} = \frac{\frac{A}{2a}(2ax+b) + B - \frac{Ab}{2a}}{ax^2+bx+d};$$

potom bude

$$\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+d}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\frac{A}{2a}(2ax+b)}{ax^2+bx+d}\,\mathrm{d}x + \int \frac{B - \frac{Ab}{2a}}{ax^2+bx+d}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{A}{2a}\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+d}\,\mathrm{d}x + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right)\int \frac{\mathrm{d}x}{ax^2+bx+d};$$

zintegrovat první výraz potíže nečiní, platí $\displaystyle\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+d}\,\mathrm{d}x = \ln(ax^2+bx+d) + c$, $x \in \mathcal{R}$, a tak zbývá dopočítat $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{ax^2+bx+d}$; ten povede na funkci arkustangens, neboť je roven $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\left(\sqrt{a}x + \frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2 + \left(d - \frac{b^2}{4a}\right)} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\left(\sqrt{a}x + \frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2 + D}$, kde jsme kladný výraz $\left(d - \frac{b^2}{4a}\right)$ označili jako D;

s integrálem typu $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2}$ jsme se ale již setkali (v části nazvané přímá integrace), je tudíž $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\left(\sqrt{a}x + \frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2 + \left(\sqrt{D}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \frac{1}{\sqrt{D}} \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{a}x + \frac{b}{2\sqrt{a}}}{\sqrt{D}}\right) + c$, neboli

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{ax^2+bx+d} = \frac{1}{\sqrt{aD}} \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{ax + \frac{1}{2}b}{\sqrt{aD}}\right) + c, \quad \text{kde } D = \left(d - \frac{b^2}{4a}\right),\ x \in \mathcal{R}.$$

(Na příkladu bude ovšem uvedený postup zřejmější.)

Integrály patřící pod bod 4. necháme stranou naší pozornosti. Nastíníme pouze základní ideu, kterak se dají nalézt.

Naprosto stejnou úpravou čitatele zlomku jako byla provedena výše získáme (až na multiplikativní konstantu) integrály $\displaystyle\int \frac{2ax+b}{(ax^2+bx+d)^k}\,\mathrm{d}x$ a $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(ax^2+bx+d)^k}$. Zatímco první z nich lze snadno řešit substitucí (jak uvidíme později), výpočet druhého probíhá takto: pomocí metody per partes je možné odvodit rekurentní vztah, podle kterého lze integrál $\int \frac{dx}{(ax^2+bx+d)^k}$ převést na integrál $\int \frac{dx}{(ax^2+bx+d)^{k-1}}$; postupnou aplikací tohoto vztahu tak nakonec můžeme dojít až k integrálu z bodu 3., jehož řešení jsme již probírali.

Příklady.

(a) Při výpočtu integrálu $\int \frac{2x^3-x^2-x+1}{x^2-1}\,dx$ je zapotřebí nejprve integrovanou funkci částečně podělit, tj. $\int \frac{2x^3-x^2-x+1}{x^2-1}\,dx = \int \left(2x-1+\frac{x}{x^2-1}\right) dx$.

To se dále rovná: $\int 2x\,dx - \int dx + \int \frac{x}{x^2-1}\,dx = x^2 - x + \frac{1}{2}\ln|x^2-1| + c$, kde x uvažujeme na některém z otevřených intervalů $(-\infty,-1)$, $(-1,1)$, $(1,+\infty)$.

Tento příklad ilustruje, že ne vždy je nutné rozklad na parciální zlomky provádět: výraz $\frac{x}{x^2-1}$ má totiž v čitateli, až na multiplikativní konstantu, derivaci jmenovatele, a primitivní funkci tak lze psát přímo.

I rozkladem se ovšem dojde k témuž výsledku: $\int \frac{x}{x^2-1}\,dx = \int \left(\frac{\frac{1}{2}}{x+1}+\frac{\frac{1}{2}}{x-1}\right) dx =$
$= \frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{1}{2}\ln|x-1| + c = \frac{1}{2}\ln|(x+1)(x-1)| + c = \frac{1}{2}\ln|x^2-1| + c.$

(b) Jiné je to ale s neurčitým integrálem $\int \frac{dx}{x^2-1}$, zde je rozkladu třeba:

$$\int \frac{dx}{x^2-1} = \int \left(\frac{-\frac{1}{2}}{x+1}+\frac{\frac{1}{2}}{x-1}\right) dx = -\tfrac{1}{2}\ln|x+1| + \tfrac{1}{2}\ln|x-1| + c = \tfrac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + c,$$

kde opět $x \in (-\infty,-1)$ nebo $x \in (-1,1)$ nebo $x \in (1,+\infty)$.

(c) Výše vyložený integrační postup pro integrály zahrnované pod bod 3. předveďme na příkladu $\int \frac{x-3}{x^2+2x+5}\,dx$ (ve jmenovateli je skutečně nerozložitelný kvadratický trojčlen).

Nejprve úprava čitatele: $\int \frac{x-3}{x^2+2x+5}\,dx = \int \frac{\frac{1}{2}(2x+2)-4}{x^2+2x+5}\,dx =$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+5}\,dx - \int \frac{4}{x^2+2x+5}\,dx = \tfrac{1}{2}\ln(x^2+2x+5) - 4\int \frac{dx}{x^2+2x+5}.$$

Úprava jmenovatele zbývajícího integrálu pak dává:

$$\int \frac{dx}{x^2+2x+5} = \int \frac{dx}{(x+1)^2+4} = \int \frac{dx}{(x+1)^2+2^2} = \tfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2} + c.$$

Celkem je tedy: $\int \frac{x-3}{x^2+2x+5}\,dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+5) - 2\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2} + c,\ x \in \mathcal{R}.$

(Přesvědčit se zderivováním výsledku o správnosti integrace je v takovýchto příkladech zcela na místě.)

(c) Zintegrujme $\int \frac{5x^3-5x^2+x+2}{x^4-x^3-2x^2}\,dx$. Po rozkladu racionální ryze lomené funkce na parciální zlomky dostaneme $\int \frac{5x^3-5x^2+x+2}{x^4-x^3-2x^2}\,dx = \int \left(\frac{2}{x-2}+\frac{3}{x+1}-\frac{1}{x^2}\right) dx$, a to je dále rovno $2\ln|x-2| + 3\ln|x+1| + \frac{1}{x} + c$. Získanou primitivní funkci přitom uvažujeme na jednom z otevřených intervalů $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 2)$, $(2, +\infty)$.

5.5 Substituční metoda

Posledním postupem, kterého se při výpočtu neurčitých integrálů často používá, je ***substituční metoda***. Je odvozena z pravidla pro derivování složené funkce.

Představme si, že řešíme integrál tvaru $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x$, kde f je spojitá a φ diferencovatelná funkce. Pokud umíme najít primitivní funkci k funkci f, označme ji F, jsme prakticky hotovi: hledaným integrálem (na vhodném otevřeném intervalu) bude funkce $F(\varphi(x))$, o čemž se lze snadno přesvědčit jejím zderivováním — je $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(F(\varphi(x))\Big) = F'(\varphi(x))\cdot\varphi'(x) = f(\varphi(x))\varphi'(x)$.

Výpočet integrálu $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x$ tedy závisí na tom, najdeme-li $\int f(z)\,\mathrm{d}z$. A převedení jednoho integrálu na druhý se děje právě substitucí $\varphi(x) = z$. Kromě nahrazení funkce $\varphi(x)$ novou integrační proměnnou z je však při této substituci nutné nahradit i výraz $\varphi'(x)\,\mathrm{d}x$ výrazem $\mathrm{d}z$ (dále budeme totiž integrovat podle této nové proměnné).

Z čeho vztah $\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}z$ vyplývá? Hledíme-li na rovnost $z=\varphi(x)$ jako na funkční závislost mezi proměnnými z, x, můžeme tuto funkci z podle její proměnné x derivovat. Tím formálně dostaneme rovnost $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \varphi'(x)$, odkud vynásobením $\mathrm{d}x$ zmíněný výraz $\mathrm{d}z = \varphi'(x)\,\mathrm{d}x$ „odvodíme“. (Uvedený vztah se často označuje jako diferenciál funkce $z = \varphi(x)$. Vyjadřuje její přírůstek v závislosti na změně hodnoty nezávisle proměnné x.)

Rovnosti $\int f(z)\,\mathrm{d}z = \int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x$, $z=\varphi(x)$, lze ale naopak využít i k převedení integrálu z funkce proměnné z na neurčitý integrál z funkce nové proměnné x. Ten sice vypadá na pohled komplikovaněji, ale v některých případech to je právě on, který se dá spočítat.

Při obou substitucích je po nalezení primitivní funkce nutné vrátit se zpátky k původní proměnné, což v druhém případě znamená dosazení $x = \varphi^{-1}(z)$ (zde φ^{-1} značí funkci k φ inverzní; ta existuje, pokud je $\varphi(x)$ funkce ryze monotónní).

Samozřejmě, že ne každý integrál musí být substituční metodou řešitelný. Pro určité typy funkcí se používají určité substituce — někdy se dá dokonce různých substitucí užít i k integraci jediné funkce. Kdy a jakou substituci zvolit je pak opět věcí praktické zkušenosti s počítáním integrálů a z ní vyplývající schopnosti rozeznat, že například integrovaný výraz obsahuje funkci včetně její derivace, jež je multiplikativně(!) spojena s integračním symbolem $\mathrm{d}x$. (V řadě případů je potom před použitím substituční metody zapotřebí nejprve provést vhodné úpravy.)

Příklady.

(a) Integrál $\int(2x-1)^8\,dx$ umíme zintegrovat přímo, a to díky lineární substituci $2x-1=z$. Protože $\frac{dz}{dx}=2$, je $dz=2\,dx$, což po dosazení do původního integrálu dává:
$\int(2x-1)^8\,dx=\frac{1}{2}\int(2x-1)^8\cdot 2\,dx=\frac{1}{2}\int z^8\,dz=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{9}\cdot z^9+c=\frac{1}{18}(2x-1)^9+c\,,\ x\in\mathcal{R}\,.$

(b) Integrujme funkci $\dfrac{1}{4x^2+3x+1}$ (ve jmenovateli je nerozložitelný kvadratický trojčlen).
Nejprve obvyklá úprava: $\displaystyle\int\frac{dx}{4x^2+3x+1}=\int\frac{dx}{(2x+\frac{3}{4})^2+\frac{7}{16}}$. Nyní použijeme takové lineární substituce, abychom po dosazení mohli z obou členů jmenovatele vytknout $\frac{7}{16}$, tedy: $2x+\frac{3}{4}=\frac{\sqrt{7}}{4}t$, odkud $t=\frac{1}{\sqrt{7}}(8x+3)$ a $dt=\frac{8}{\sqrt{7}}\,dx$, neboli $dx=\frac{\sqrt{7}}{8}\,dt$.

Počítaný integrál tak bude dále roven: $\displaystyle\int\frac{\frac{\sqrt{7}}{8}\,dt}{\left(\frac{\sqrt{7}}{4}t\right)^2+\frac{7}{16}}=\frac{\sqrt{7}}{8}\int\frac{dt}{\frac{7}{16}t^2+\frac{7}{16}}=$

$\displaystyle=\frac{\sqrt{7}}{8}\cdot\frac{16}{7}\cdot\int\frac{dt}{t^2+1}=\frac{2\sqrt{7}}{7}\cdot\operatorname{arctg}t+c=\frac{2\sqrt{7}}{7}\cdot\operatorname{arctg}\frac{8x+3}{\sqrt{7}}+c\,,\ x\in\mathcal{R}\,.$

(c) Podobně jsme již substituční metodu používali při řešení integrálů tvaru $\displaystyle\int\frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$. Zde je potřeba položit $z=f(x)$, $dz=f'(x)\,dx$, což zadaný integrál převádí na tvar $\displaystyle\int\frac{dz}{z}$. Odtud pak dostaneme výslednou primitivní funkci $\ln|z|+c=\ln|f(x)|+c$.
Konkrétně pro již uváděný integrál z goniometrické funkce kotangens bude (pokládáme $\sin x=t$, $\cos x\,dx=dt$): $\displaystyle\int\frac{\cos x}{\sin x}\,dx=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+c=\ln|\sin x|+c$ na intervalech $(k\pi,\pi+k\pi)$, $k\in\mathcal{Z}$.

(d) Integrál $\displaystyle\int\frac{6x+1}{(3x^2+x+2)^7}\,dx$ můžeme nalézt substitucí $3x^2+x+2=t$, $(6x+1)\,dx=dt$.
Je totiž: $\displaystyle\int\frac{6x+1}{(3x^2+x+2)^7}\,dx=\int\frac{dt}{t^7}=\int t^{-7}\,dt=-\frac{1}{6}t^{-6}=\frac{-\frac{1}{6}}{(3x^2+x+2)^6}\,,\ x\in\mathcal{R}\,.$

(e) Pro integraci $\displaystyle\int\frac{e^{2x}}{e^x+3}\,dx$ použijeme po drobné úpravě substituce $e^x=t$ (z čehož $e^x\,dx=dt$) : $\displaystyle\int\frac{e^x}{e^x+3}\,e^x\,dx=\int\frac{t}{t+3}\,dt=\int\frac{t+3-3}{t+3}\,dt=\int dt-3\int\frac{dt}{t+3}=$
$=t-3\ln|t+3|+c=e^x-3\ln(e^x+3)+c\,,\ x\in\mathcal{R}\,.$

(f) Integrál $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx$ lze převést na integrování racionální lomené funkce položením $\sqrt{x}=z$, což dává $\frac{dz}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$, tj. $\frac{dz}{dx}=\frac{1}{2z}$, neboli $dx=2z\,dz$.
(Píšeme-li ovšem $x=z^2$, můžeme tuto rovnost odvodit naopak derivováním $\frac{dx}{dz}=2z$.)
Po dosazení tak budeme mít: $\displaystyle\int\frac{z}{1+z}\,2z\,dz=2\int\frac{z^2}{z+1}\,dz=2\int\left(z-1+\frac{1}{z+1}\right)dz=$
$\displaystyle=2\int z\,dz-2\int dz+2\int\frac{dz}{z+1}=z^2-2z+2\ln|z+1|+c=x-2\sqrt{x}+2\ln(\sqrt{x}+1)+c\,,$
kde $x\in(0,+\infty)$.

(g) V dosud uvedených příkladech (snad s výjimkou posledního příkladu (f)) se vždy za funkci proměnné x substituovala nová proměnná (tj. $\varphi(x)=z$). Substituci v opačném směru, to znamená za x dosadit funkci nové proměnné (tj. $x=g(z)$), budeme demonstrovat nyní.

Integrál $\int \sqrt{r^2-x^2}\,\mathrm{d}x$, kde r je kladný parametr, spočítáme substitucí $x = r\cdot\sin z$ (místo funkce sinus by šel použít i kosinus). Protože primitivní funkci hledáme pro $x \in (-r, r)$, uvažujeme z na intervalu $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, kde je funkce sinus ryze monotónní. Jelikož $\mathrm{d}x = r\cos z\,\mathrm{d}z$ a na $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ je $\cos z > 0$, můžeme psát:

$$\int \sqrt{r^2-x^2}\,\mathrm{d}x = \int \sqrt{r^2-r^2\sin^2 z}\cdot r\cos z\,\mathrm{d}z = \int r^2\cos z\sqrt{1-\sin^2 z}\,\mathrm{d}z =$$
$$= \int r^2\cos z\sqrt{\cos^2 z}\,\mathrm{d}z = r^2\int \cos z\cdot|\cos z|\,\mathrm{d}z = r^2\int\cos^2 z\,\mathrm{d}z = \tfrac{1}{2}r^2(z+\tfrac{1}{2}\sin 2z)+c\,.$$

(Poslední integrál jsme již spočítali přímo použitím vztahu pro kosinus dvojnásobného argumentu.)

Nyní zbývá jenom zpátky dosadit: protože $x=r\sin z$, $z\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$, je $z=\arcsin\frac{x}{r}$ a

$$\int\sqrt{r^2-x^2}\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}r^2(\arcsin\tfrac{x}{r}+\tfrac{1}{2}\sin(2\arcsin\tfrac{x}{r}))+c =$$
$$= \tfrac{1}{2}r^2(\arcsin\tfrac{x}{r}+\sin\arcsin\tfrac{x}{r}\cdot\cos\arcsin\tfrac{x}{r})+c =$$
$$= \tfrac{1}{2}r^2\Big(\arcsin\tfrac{x}{r}+\tfrac{x}{r}\cdot\sqrt{1-\tfrac{x^2}{r^2}}\Big)+c = \frac{r^2}{2}\arcsin\tfrac{x}{r}+\tfrac{x}{2}\sqrt{r^2-x^2}+c\,.$$

Při úpravách jsme použili vztahů $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$, $\sin\arcsin\frac{x}{r} = \frac{x}{r}$ (složení inverzních funkcí dává funkci identickou) a $\cos\arcsin\frac{x}{r} = \sqrt{1-\frac{x^2}{r^2}}$ (platnost této rovnosti lze prokázat například takto: označíme-li $\arcsin\frac{x}{r} = w$, je $w \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, takže platí $\cos w = \sqrt{1-\sin^2 w}$; ale to je již ověřovaná rovnost, neboť $\sin w = \sin\arcsin\frac{x}{r} = \frac{x}{r}$).

(h) Integrály tvaru $\int \sin^m x\cos^n x\,\mathrm{d}x$, kde $m, n \in \mathcal{N}$, se dají řešit substitucí, jestliže je jedno z čísel m, n liché. Pro liché m přitom pokládáme $\cos x = t$, pro liché n užijeme substituce $\sin x = t$ (jsou-li lichá obě čísla, vedou k cíli přirozeně obě substituce).

Například $\int\sin^5 x\cos^2 x\,\mathrm{d}x$ spočteme dosazením $\cos x = t$, $-\sin x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$:
$\int\sin^5 x\cos^2 x\,\mathrm{d}x = -\int\sin^4 x\cos^2 x\cdot(-\sin x)\,\mathrm{d}x = -\int(1-\cos^2 x)^2\cos^2 x\cdot(-\sin x)\,\mathrm{d}x =$ $= -\int(1-t^2)^2 t^2\,\mathrm{d}t = -\int(t^2-2t^4+t^6)\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{3}t^3+\frac{2}{5}t^5-\frac{1}{7}t^7+c$, což po návratu k původní proměnné dává $-\frac{1}{3}\cos^3 x+\frac{2}{5}\cos^5 x-\frac{1}{7}\cos^7 x+c$, $x \in \mathcal{R}$.

Primitivní funkci k součinu $\sin x\cos x$, kterou jsme dokázali najít jak přímo, tak i užitím metody per partes, je tedy možno spočítat i substitucí.

Vystupují-li sinus i kosinus v uvažovaném integrálu v sudé mocnině, lze tento integrál převést na integraci součtu sudých mocnin jen jedné z těchto funkcí. K nalezení primitivních funkcí k sudým mocninám funkce sinus či kosinus je pak možno pomocí metody per partes odvodit rekurentní vztah, který umožňuje postupné snížení této mocniny v počítaných integrálech až na mocninu druhou. A určit v konečné fázi integrály $\int\sin^2 x\,\mathrm{d}x$, $\int\cos^2 x\,\mathrm{d}x$ pro nás již problémem není.

(i) Neurčité integrály z funkcí, v nichž vystupují funkce goniometrické (a které se nedají vyřešit jednoduchou substitucí $\sin x = t$, resp. $\cos x = t$), lze často počítat substitucí $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$. Obvykle tak jejím použitím daný integrál převádíme na integrál z racionální lomené funkce, který se dá vždy nalézt (i když mnohdy velice obtížně).

Nalistujeme-li zpátky v textu partii o goniometrických funkcích (kapitola elementární funkce), jsou v ní odvozeny vztahy

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}},\quad \cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}},\quad x \neq \pi + 2k\pi,\ k \in \mathcal{Z}.$$

Z nich vyplývá dosazení $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$. Zbývá ještě nahradit $\mathrm{d}x$: je

$\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\cdot\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}\left(\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}+1\right) = \frac{1}{2}(t^2+1)$, odkud $\mathrm{d}x = \dfrac{2}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$.

Jednodušší je ale tento postup: z rovnosti $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = t$, $x \in (-\pi,\pi)$, plyne $x = 2\operatorname{arctg} t$, tj. $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \dfrac{2}{1+t^2}$, a požadovanou rovnost máme ihned.

(Na tomto příkladu je dobře vidět, že hranice mezi oběma typy substitucí nemusí být nikterak ostrá — v řadě případů vlastně ani nerozlišujeme, podle které postupujeme.)

Aplikujme tento způsob výpočtu primitivní funkce na integrál $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{2+\cos x+\sin x}$.

Po dosazení bude $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{2+\cos x+\sin x} = \int\frac{\frac{2}{1+t^2}}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}+\frac{2t}{1+t^2}}\,\mathrm{d}t = \int\frac{2}{2+2t^2+1-t^2+2t}\,\mathrm{d}t =$

$\displaystyle = \int\frac{2}{t^2+2t+3}\,\mathrm{d}t = 2\int\frac{\mathrm{d}t}{(t+1)^2+2} = \sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{t+1}{\sqrt{2}} + c\,.$

Do získaného výrazu je pak nakonec potřeba ještě za t zpátky dosadit $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$ (primitivní funkce by přitom měla existovat pro $x \in \mathcal{R}$) a výsledek se případně pokusit upravit.

(j) Integrál $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin x}$ jsme již dříve odvozovali přímo, a šlo by zde i substituovat $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = t$:

$\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin x} = \int\frac{\frac{2}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}}\,\mathrm{d}t = \int\frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln|t| + c = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + c,\ x \in (k\pi, \pi + k\pi),\ k \in \mathcal{Z}.$

Možný je ale i tento postup: $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin x} = \int\frac{\sin x}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \int\frac{\sin x}{1-\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$ a substitucí $\cos x = z$ přejdeme k integrování racionální lomené funkce.

(k) Integrál $\displaystyle\int\sqrt{x^2+x-2}\,\mathrm{d}x$ řešíme tzv. Eulerovou substitucí $\sqrt{x^2+x-2} = t + x$.

Odtud umocněním dostaneme rovnost $x^2+x-2 = t^2+2tx+x^2$, tedy $x-2tx = t^2+2$, tj. $x = \dfrac{t^2+2}{1-2t}$. Pro $\mathrm{d}x$ pak platí:

$$\mathrm{d}x = \frac{2t(1-2t)-(t^2+2)\cdot(-2)}{(1-2t)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{2t-4t^2+2t^2+4}{(1-2t)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{-2t^2+2t+4}{(1-2t)^2}\,\mathrm{d}t\,.$$

Uvažovaný typ integrálu tak lze touto substitucí opět převést na integrování funkce racionální lomené, v našem případě konkrétně na $\displaystyle\int\left(t+\frac{t^2+2}{1-2t}\right)\cdot\frac{-2t^2+2t+4}{(1-2t)^2}\,\mathrm{d}t =$

$\displaystyle = \int\frac{(t-2t^2+t^2+2)\cdot 2(-t^2+t+2)}{(1-2t)^3}\,\mathrm{d}t = \int\frac{2(-t^2+t+2)^2}{(1-2t)^3}\,\mathrm{d}t\,.$

Pracnost dalšího postupu (tj. částečné vydělení funkce, rozklad na parciální zlomky a jejich následná integrace) je ovšem více než zřejmá.