

# Izomorfní úlohy v kombinatorice

FILIP KONOPKA

# Permutace bez opakování

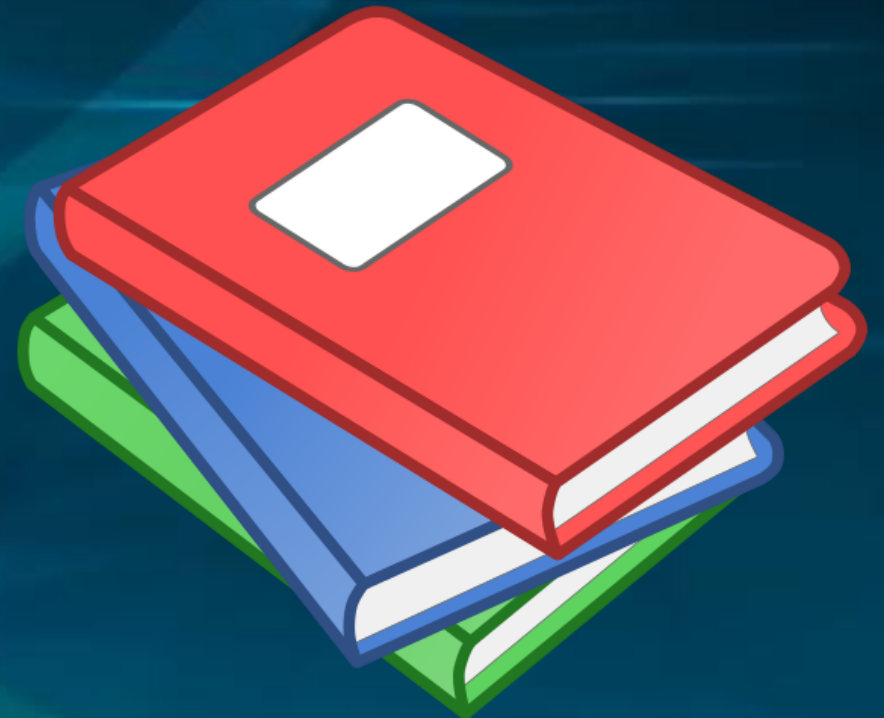
- Kolika způsoby lze uspořádat v poličce 3 různé knihy?



# Permutace bez opakování

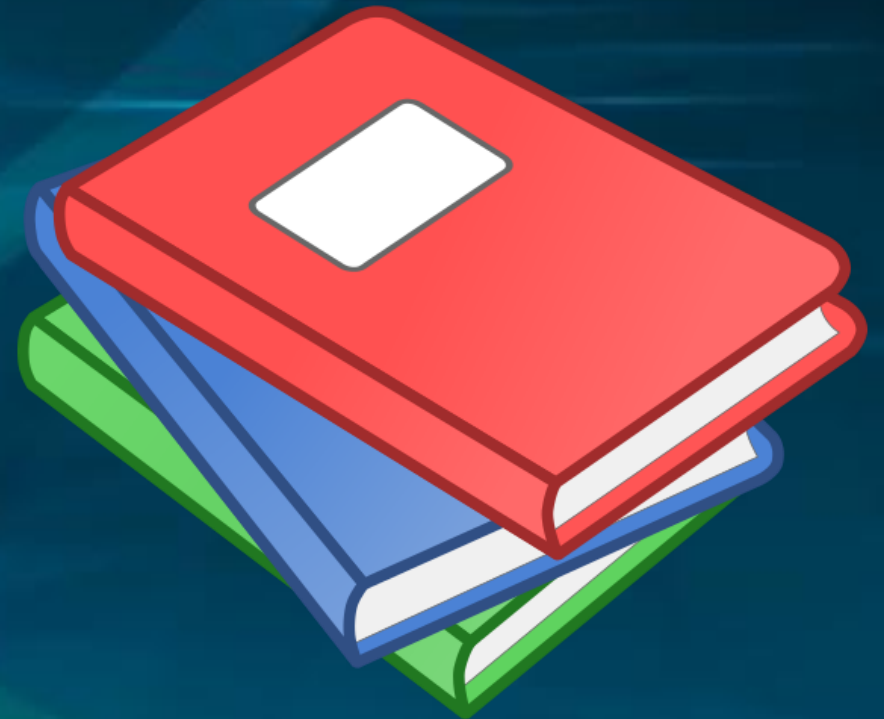
- Kolika způsoby lze uspořádat v poličce 3 různé knihy?
- Kolik různých telefonních čísel lze sestavit z 3 různých číslic?

158, 185, 581, 518, 815, 851



# Permutace bez opakování

- Kolika způsoby lze uspořádat v poličce 3 různé knihy?
- Kolik různých telefonních čísel lze sestavit z 3 různých číslic?  
158, 185, 581, 518, 815, 851
- Kolika způsoby se mohou 3 lidé postavit do fronty?



# Permutace bez opakování



- Kolika způsoby lze uspořádat v polici 3 různé knihy?
- Kolik různých telefonních čísel lze sestavit z 3 různých číslic?

158, 185, 581, 518, 815, 851

- Kolika způsoby se mohou 3 lidé postavit do fronty?
- Máme **3 izolované modely** pro permutace bez opakování – 1. abstrakčním zdvihem by bylo uvědomění si, že se jedná o jednu a tutéž úlohu „**Kolika způsoby lze uspořádat 3 různé prvky?**“
- 2. abstrakčním zdvihem by bylo uvědomění si, že ve všech případech řešíme úlohu

„Kolika způsoby lze uspořádat  $n$  různých prvků, pokud záleží na jejich pořadí a prvky se nemohou opakovat?“ Odpověď:  $n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

**Generický model: Počet permutací bez opakování z  $n$  prvků je roven  $n! = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$**

# Variace bez opakování

- Na trati běží 10 závodníků. Kolika způsoby mezi ně můžeme rozdat 3 medaile: zlatou, stříbrnou a bronzovou?



# Variace bez opakování

- Na trati běží 10 závodníků. Kolika způsoby mezi ně můžeme rozdat 3 medaile: zlatou, stříbrnou a bronzovou?
- Kolik třímístných telefonních čísel lze utvořit z číslic 0-9, pokud se číslice nemohou opakovat?



# Variace bez opakování

- Na trati běží 10 závodníků. Kolika způsoby mezi ně můžeme rozdat 3 medaile: zlatou, stříbrnou a bronzovou?
- Kolik třímístných telefonních čísel lze utvořit z číslic 0-9, pokud se číslice nemohou opakovat?
- Učitel při hodině matematiky napíše na tabuli tři různé příklady a ve třídě je 10 studentů. Kolika způsoby může vyvolat tři studenty na ústní zkoušení?





# Variace bez opakování



- Na trati běží 10 závodníků. Kolika způsoby mezi ně můžeme rozdat 3 medaile: zlatou, stříbrnou a bronzovou?
- Kolik třímístných telefonních čísel lze utvořit z číslic 0-9, pokud se číslice nemohou opakovat?
- Učitel při hodině matematiky napíše na tabuli tři různé příklady a ve třídě je 10 studentů. Kolika způsoby může vyvolat tři studenty na ústní zkoušení?
- *1. abstrakční zdvih:* Řešíme stejnou úlohu „Kolika způsoby můžeme vybrat 3 různé prvky z 10, pokud nám záleží na jejich pořadí?“
- *2. abstrakční zdvih:* Řešíme-li úlohu „Kolika způsoby můžeme vybrat  $k$  různých prvků z  $n$ , pokud nám záleží na jejich pořadí?“, ptáme se na počet **variací bez opakování  $k$ -té třídy z  $n$  prvků.**
- *Generický model:* Kolika způsoby lze vybrat  $k$  různých prvků z  $n$ , pokud nám záleží na jejich pořadí je počet variací bez opakování  $k$ -té třídy z  $n$  prvků a spočteme je:  $V(k, n) = \frac{n!}{(n-k)!}$

# Kombinace bez opakování

- Kolika způsoby lze sestavit 6-ti členný tým na volejbal z 10 hráčů?



# Kombinace bez opakování

- Kolika způsoby lze sestavit 6-ti členný tým na volejbal z 10 hráčů?
- Kolika způsoby můžeme v loterii vybrat 6 čísel z 10?

# Kombinace bez opakování

- Kolika způsoby lze sestavit 6-ti členný tým na volejbal z 10 hráčů?
- Kolika způsoby můžeme v loterii vybrat 6 čísel z 10?
- 1. *abstrakční zdvih*: Řešíme úlohu „Kolika způsoby lze vybrat 6 prvků z 10, pokud nezáleží na jejich pořadí a prvky se nemůžou opakovat?“
- 2. *abstrakční zdvih*: Řešíme úlohu „Kolika způsoby lze vybrat **k** prvků z **n**, pokud nezáleží na jejich pořadí a prvky se nemůžou opakovat?“ a tedy se ptáme na **počet kombinací bez opakování k-té třídy z n prvků**.

# Kombinace bez opakování

- Kolika způsoby lze sestavit 6-ti členný tým na volejbal z 10 hráčů?
- Kolika způsoby můžeme v loterii vybrat 6 čísel z 10?
- 1. *abstrakční zdvih*: Řešíme úlohu „Kolika způsoby lze vybrat 6 prvků z 10, pokud nezáleží na jejich pořadí a prvky se nemůžou opakovat?“
- 2. *abstrakční zdvih*: Řešíme úlohu „Kolika způsoby lze vybrat **k** prvků z **n**, pokud nezáleží na jejich pořadí a prvky se nemůžou opakovat?“ a tedy se ptáme na **počet kombinací bez opakování k-té třídy z n prvků**.
- Generický model: **Počet kombinací bez opakování k-té třídy z n prvků** spočteme jako  $\frac{n!}{k!(n-k)!}$

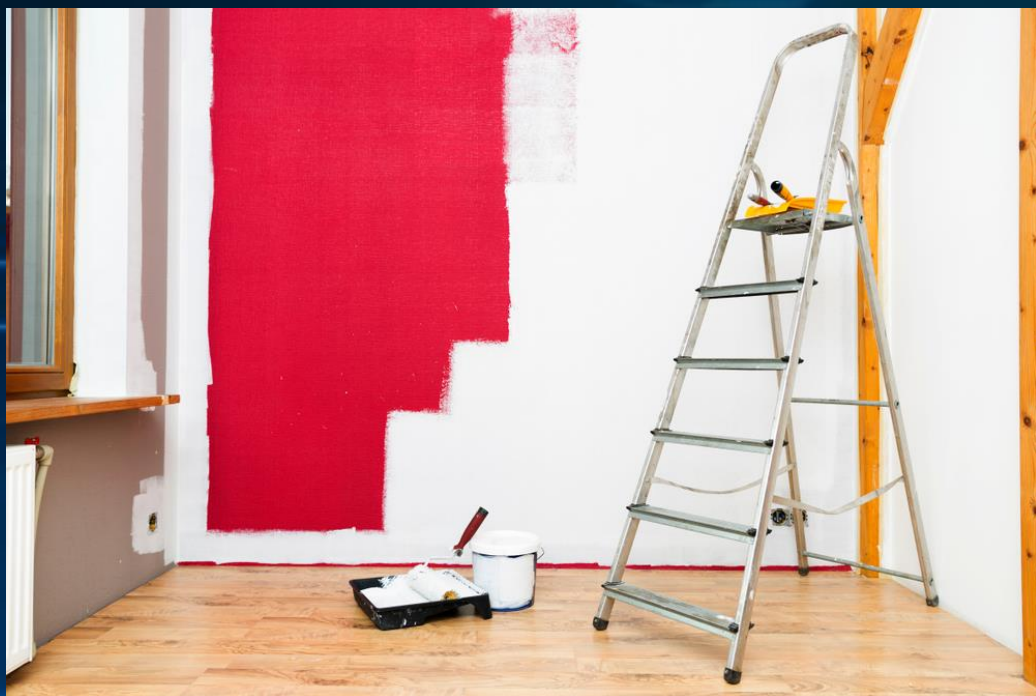
# Variace s opakováním

- Kolika způsoby můžeme vymalovat pokoj, pokud jsou zde 4 stěny a máme k dispozici dvě barvy, **červenou** a **bílou**?



# Variace s opakováním

- Kolika způsoby můžeme vymalovat pokoj, pokud jsou zde 4 stěny a máme k dispozici dvě barvy, červenou a bílou?
- Kolik různých 4-místných telefonních čísel lze sestavit ze dvou čísel, 0 a 1?



# Variace s opakováním

- Kolika způsoby můžeme vymalovat pokoj, pokud jsou zde 4 stěny a máme k dispozici dvě barvy, červenou a bílou?
- Kolik různých 4-místných telefonních čísel lze sestavit ze dvou čísel, 0 a 1?
- *1. abstrakční zdvih:* Kolika způsoby lze každému z 4 prvků přiřadit 2 prvky? Záleží na uspořádání a prvky se mohou opakovat.
- *2. abstrakční zdvih:* Kolika způsoby lze každému z  $k$  prvků přiřadit  $n$  prvků? Záleží na uspořádání a prvky se mohou opakovat. To je ekvivalentní tomu, že hledáme **počet variací s opakováním  $k$ -té třídy z  $n$  prvků**.
- Generický model: **počet variací s opakováním  $k$ -té třídy z  $n$  prvků spočteme jako**

$$V'(k, n) = n^k$$



# Permutace s opakováním

- Máme v krabičce 9 pasteliek: 3 modré, 2 žluté a 4 červené. Pastelky jedné barvy považujeme za nerozlišitelné – jsou stejně dlouhé, stejně ořezané, atp. Kolika způsoby je můžeme uspořádat v krabičce?



# Permutace s opakováním

- Máme v krabičce 9 pastelek: 3 modré, 2 žluté a 4 červené. Pastelky jedné barvy považujeme za nerozlišitelné – jsou stejně dlouhé, stejně ořezané, atp. Kolika způsoby je můžeme uspořádat v krabičce?
- V řadě stojí 9 osob třech různých národností: 3 Francouzi, 2 Češi a 4 Angličani. Kolika způsoby se mohou postavit do řady, pokud zaměnění dvou osob stejné národnosti považujeme za stejné uspořádání?



# Permutace s opakováním

- Máme v krabičce **9 pastelek: 3 modré, 2 žluté a 4 červené**. Pastelky jedné barvy považujeme za nerozlišitelné – jsou stejně dlouhé, stejně ořezané, atp. Kolika způsoby je můžeme uspořádat v krabičce?
- V řadě stojí 9 osob třech různých národností: 3 Francouzi, 2 Češi a 4 Angličani. Kolika způsoby se mohou postavit do řady, pokud zaměnění dvou osob stejné národnosti považujeme za stejné uspořádání?

Odpověď:  $\frac{(3+2+4)!}{3! 2! 4!}$

- *1. abstrakční zdvih:* Máme tři různé skupiny a v každé skupině jsou **nerozlišitelné** prvky. V první skupině jsou 3 prvky, ve druhé skupině jsou 2 prvky a ve třetí skupině jsou 4 prvky. Kolika způsoby je můžeme přerovnat?
- *2. abstrakční zdvih:* Kolika způsoby můžeme uspořádat skupinu n prvků, která se skládá z k skupin, přičemž každá taková podskupina obsahuje nerozlišitelné prvky ( $k_1$  je počet prvků v první podskupině,  $k_2$  počet prvků v druhé podskupině, ... apod)
- Generický model: Hledáme počet permutací s opakováním  $P(k_1, k_2, \dots, k_n) = \frac{(k_1 + k_2 + \dots + k_n)!}{k_1! * k_2! * \dots * k_n!}$

# Kombinace s opakováním

- V cukrárně mají 3 druhy dortů v dostatečném množství: **Jahodový**, **čokoládový** a **banánový**. Kolika způsoby lze koupit 5 dortů?



# Kombinace s opakováním

- V cukrárně mají **3 druhy dortů** v dostatečném množství: **Jahodový**, **čokoládový** a **banánový**. Kolika způsoby lze koupit 5 dortů?
- *1. abstrakční zdvih: Kolika způsoby lze vybrat celkem 5 prvků, vybíráme-li ze 3 skupin, přičemž v každé skupině jsou nerozlišitelné prvky a je jich neomezený počet?*



# Kombinace s opakováním

- V cukrárně mají **3 druhy dortů** v dostatečném množství: **Jahodový**, **čokoládový** a **banánový**. Kolika způsoby lze koupit 5 dortů?
- *1. abstrakční zdvih: Kolika způsoby lze vybrat celkem 5 prvků, vybíráme-li ze 3 skupin, přičemž v každé skupině jsou nerozlišitelné prvky a je jich neomezený počet?*
- *2. abstrakční zdvih: Kolika způsoby lze vybrat k prvků z n různých skupin, pakliže v každé skupině máme neomezený počet nerozlišitelných prvků a nezáleží nám na uspořádání?*



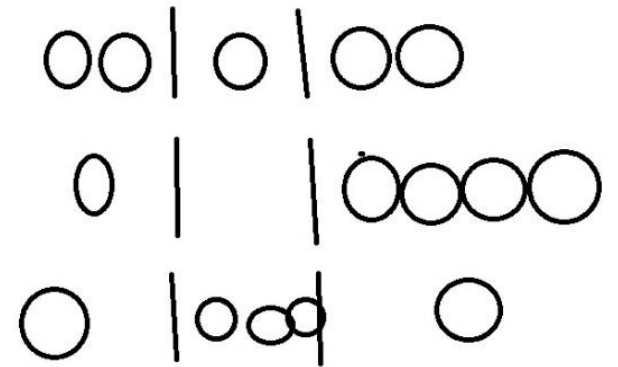
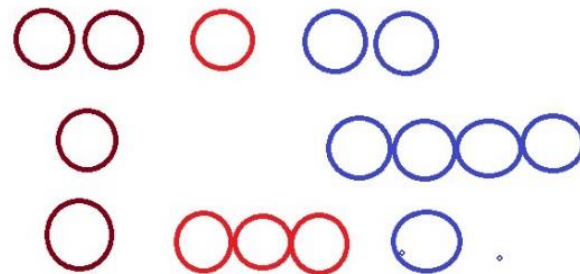
# Kombinace s opakováním

- V cukrárně mají **3 druhy dortů** v dostatečném množství: **Jahodový**, **čokoládový** a **banánový**. Kolika způsoby lze koupit 5 dortů?
- *1. abstrakční zdvih: Kolika způsoby lze vybrat celkem 5 prvků, vybíráme-li ze 3 skupin, přičemž v každé skupině jsou nerozlišitelné prvky a je jich neomezený počet?*
- *2. abstrakční zdvih: Kolika způsoby lze vybrat  $k$  prvků z  $n$  různých skupin, pakliže v každé skupině máme neomezený počet nerozlišitelných prvků a nezáleží nám na uspořádání?*
- *Generický model: Ptáme se na počet kombinací s opakováním  $k$ -té třídy z  $n$  prvků.*



# Kombinace s opakováním – odvození

- V cukrárně mají **3 druhy dortů** v dostatečném množství: **Jahodový**, **čokoládový** a **banánový**. Kolika způsoby lze koupit 5 dortů?
- Izomorfní úloha s úlohou „**Kolika způsoby lze vložit 5 nerozlišitelných předmětů do 3 přihrádek?**“
- *Hnědé kolečka reprezentují čokoládové dorty, červené kolečka jahodové dorty a modré kolečky banánové dorty. Tedy první řádek reprezentuje možnost, že jsme koupili v cukrárně 2 čokoládové, 1 jahodový a 2 banánové dorty, atd.*

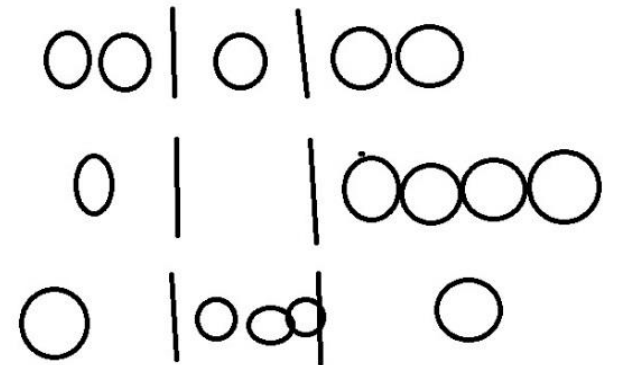
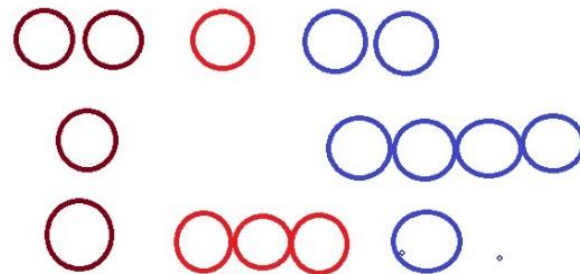




# Kombinace s opakováním – odvození

- „Kolika způsoby lze vložit 5 nerozlišitelných předmětů do 3 přihrádek?“ je izomorfní úloha k úloze „V krabičce máme 7 pastelek – 2 žluté a 5 červených. Pastelky téže barvy jsou nerozlišitelné. Kolika způsoby lze uspořádat?“

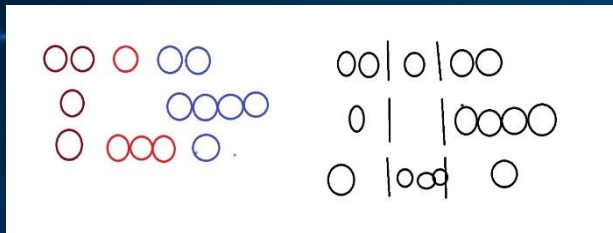
- $P'(2, 5) = \frac{(2+5)!}{2! 5!} = 21$



# Kombinace s opakováním – odvození

- „*Kolika způsoby lze vložit  $k$  nerozlišitelných předmětů do  $n$  přihrádek?*“ je izomorfní úloha k úloze „*V krabičce máme  $k+n-1$  pastelek – z toho  $k$  žlutých a  $n-1$  červených. Pastelky téže barvy jsou nerozlišitelné. Kolika způsoby je lze uspořádat?*“ (tj. permutace s opakováním z prvků  $k$  a  $n-1$ ) a to je izomorfní úloze „*Kolika způsoby lze vybrat  $k$  prvků z  $n$  různých skupin, pakliže v každém skupině máme neomezený počet nerozlišitelných prvků a nezáleží nám na uspořádání?*“ (tj. kombinace s opakováním  $k$ -té třídy z  $n$  prvků)

$$P'(k, n - 1) = K'(k, n)$$



**Děkuji za pozornost!**

