23.2.2017

Graf: $(V,E) = G$ ↳ lib. podmnožina $\binom{V}{2}$ → mna všech neusp. dvouprvkových podmn. mny V

↓ lib. konečná mna

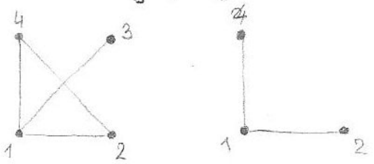
stupeň vrcholu ... počet hran vedoucích z a do vrcholu ... $\deg_G(v) = \deg(v) = d(v)$

podgraf grafu G ... graf $G' = (V', E')$, kde $V' \subseteq V$

$E' \subseteq E \cap \binom{V'}{2}$

indukovaný podgraf — II — $E' = E \cap \binom{V'}{2}$

PŘ:



Tvrzení: $\forall G = (V,E)$: $2|E| = \sum_{v \in V} \deg v$

úplný graf ... $G = (V, \binom{V}{2})$ ... K_n ... úplný graf na n vrcholech, má $\binom{n}{2}$ hran

kružnice ... $C_n = (\{v_1, \dots, v_n\}, \{v_1v_2, \dots, v_{n-1}v_n, v_nv_1\})$, $n \geq 3$

$|V(C_n)| = |E(C_n)| = n$ délka O = # hran

cesta ... $P_n = (\{v_0, \dots, v_n\}, \{v_0v_1, \dots, v_{n-1}v_n\})$ délka cesty = # hran

cesta v grafu G ... : $v_0, e_1, v_1, \dots, e_k, v_k$ kde $v_i \in V, e_i \in E$, $v_i \neq v_j$ (pro $i \neq j$), $e_i = v_{i-1}v_i$

tah v grafu G .... — II — , $e_i \neq e_j$ (pro $i \neq j$), $e_i = v_{i-1}v_i$

sled v grafu G ... — II — , $e_i = v_{i-1}v_i$

$G = (V,E)$, $G' = (V', E')$ jsou izomorfní, pokud $\exists$ bijekce $f: V \to V'$ t.ž. $\forall u,v \in V$: $uv \in E \leftrightarrow$

$\leftrightarrow f(u)f(v) \in E'$

... má 1 komponentu

komponenta ... max. souvislý podgraf (souvislý ... $\forall v_1, v_2$ mezi nimi vede cesta)

strom ... souv. graf s alespoň 1 vrcholem co neobsahuje O

platí pro něj: $|V| = |G| + 1$

kostra souv. grafu ... podgraf obs. všechny vrcholy a je strom

2.3.2017

síť $S = (V, E, z, s, c)$

(V,E) orientovaný konečný graf

$z, s \in V$, $z \neq s$; $c: E \to \mathbb{R}_0^+$

zdroj, spotřebič / stok; kapacita

Kirkhoofův zákon

tok v síti S: $f: E \to \mathbb{R}_0^+$

$\forall x \in V, x \neq z, s$: $\sum_{(x,y) \in E} f(x,y) = \sum_{(y,x) \in E} f(y,x)$ (vytéká = vtéká)

$\forall e \in E$: $f(e) \leq c(e)$

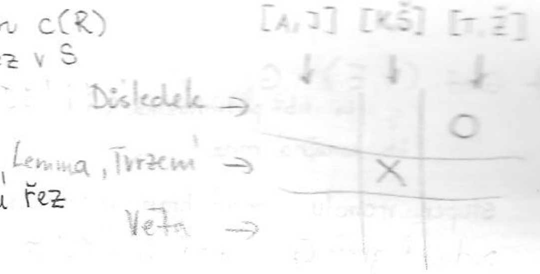
velikost toku f: $|f| = \sum_{(z,y) \in E} f(z,y) - \sum_{(y,z) \in E} f(y,z)$

řez: $R \subseteq E$ t.ž. v $(V, E \setminus R)$ neexistuje orient. cesta ze z do s

kapacita řezu: $c(R) := \sum_{e \in R} c(e)$

kapacita mny $E' \subseteq E$: $c(E') := \sum_{e \in E'} c(e)$

+ **Věta o tocích**: ∀ síť $S = (V, E, z, s, c)$, $\max_{f \text{ tok v } S} |f| = \min_{R \text{ řez v } S} c(R)$



+ **Def**: $A \subseteq V$, $z \in A$, $s \notin A$

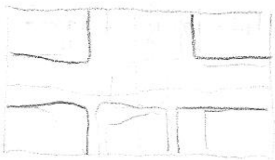
$S(A, V \setminus A) := \{xy \in E : x \in A, y \in V \setminus A\}$ ... elementární řez

+ **Def**: $A, B \subseteq V$

$S(A,B) := \{xy \in E : x \in A, y \in B\}$

$c(A,B) := c(S(A,B))$

$f(A,B) := \sum_{e \in S(A,B)} f(e)$

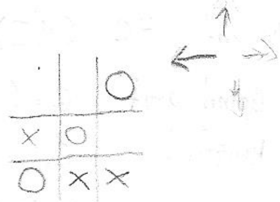


+ **Tvrzení**: Každý řez R obs. elem. řez.

$A :=$ mn. vrcholů z V (včetně z), do kterých ex. orient. cesta ze z v grafu $(V, E \setminus R)$

$z \in A$, $s \notin A$

$S(A, V \setminus A) \subseteq R$ □



+ **Důsledek**: Každý v inkluzi min. řez je elementárním řezem.

+ **Lemma**: f tok v S, $V = A \dot\cup B$, $z \in A$, $s \in B$. Potom $|f| = f(A,B) - f(B,A)$

$f(A,V) = f(A,A) + f(A,B)$

$f(V,A) = f(A,A) + f(B,A)$

$\Rightarrow f(A,B) - f(B,A) = f(A,V) - f(V,A) = \sum_{a \in A} \underbrace{f(\{a\},V) - f(V,\{a\})}_{=0 \text{ pro } a \neq z,s} = |f|$ □

16.3.2017

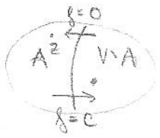
+ **Def**: cesta $P = v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots, e_k, v_k$ ($v_0 = z$) ($e_i = v_{i-1}v_i$ nebo $e_i = v_i v_{i-1}$) $\forall i$ je a) nasycená, pokud $\exists i = 1, \ldots, k : (f(e_i) = c(e_i) \;\&\; e_i = v_{i-1}v_i)$ nebo $(f(e_i) = 0 \;\&\; e_i = v_i v_{i-1})$

b) nenasycená: $\forall i = 1, \ldots, k : (f(e_i) < c(e_i) \;\&\; e_i = v_{i-1}v_i)$ ~~nebo~~ a $(f(e_i) > 0 \;\&\; e_i = v_i v_{i-1})$

+ **Tvrzení**: Tok f je maximální $\Leftrightarrow \neg\exists$ vylepšující cesta ze z do s

$\Rightarrow$ snadné

$\Leftarrow$ $A :=$ mna vrcholů z V, do nichž $\exists$ vylepšující cesta ze z, $z \in A$, $s \notin A$



$\forall e \in E(A, V \setminus A) : f(e) = c(e)$

hrany z A do V\A

$\forall e \in E(V \setminus A, A) : f(e) = 0$

$|f| = f(A, V \setminus A) - f(V \setminus A, A) = c(A, V \setminus A) - 0 = c(S(A, V \setminus A))$ a větší tok $\neg\exists$ □

+ **Tvrzení**: ∀ tok f ∀ řez R: $|f| \leq c(R)$

$R \supseteq S(A, V \setminus A)$

takový el. řez ∃

$c(S(A, V \setminus A)) \leq c(R)$

$|f| = f(A, V \setminus A) - \underbrace{f(V \setminus A, A)}_{\geq 0} \leq f(A, V \setminus A)$ □

+ **Tvrzení**: ∀ síť S ∃ max. tok.

viz. skripta □

+ Věta o tocích: Velikost max. toku = kapacita min. řezu

$\leq$ viz tvrzení

$\geq$ f max. tok $\Rightarrow$ $\neg\exists$ vylepš. cesta $\Rightarrow$ $\exists A : |f| = c(S(A, V \setminus A)) \Rightarrow |f| \geq \min_{R \text{ řez}} c(R)$ $\boxed{}$

Algoritmus (Ford, Fulkerson)

1. $f(e) := 0 \quad \forall e \in E$
2. dokud $\exists$ vylepš. cesta, opakuj: $r(e) := \begin{cases} c(e) - f(e) & \text{pokud je orient. ve směru procházení } P \text{ od } z \text{ do } s \\ f(e) & \text{jinak} \end{cases}$

   najdi vylepš. cestu P a najdi $r_P = \min_{e \in P} r(e) > 0$

   vylepši tok podél P o r_P
3. $f \longrightarrow$ max. tok

+ Věta o celočíselnosti: Pokud jsou všechny kapacity celočíselné, potom FF alg. nalezne celočíselný tok ($f(e) \in \mathbb{N}_0 \ (\forall e \in E)$) (i o racionálnosti)

vždy zvedneme o celé číslo a alg. musí skončit $\boxed{}$

23. 3. 2017

Hallova věta

+ Def: Množinový systém $\mathcal{S} = (M_i \mid i \in I)$

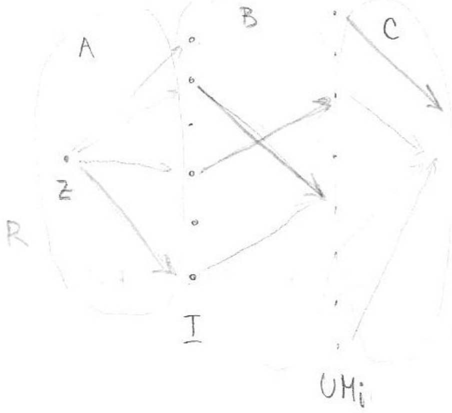
+ Def: $\mathcal{S}$ množinový systém, $f : I \to \bigcup M_i$ je systém různých reprezentantů (SRR), pokud:

1) $f(i) \in M_i$
2) f je prostá

+ Hallova věta

Konečný $\mathcal{S} = (M_i \mid i \in I)$ má SRR $\Leftrightarrow \overbrace{\forall J \subseteq I : \left|\bigcup_{i \in J} M_i\right| \geq |J|}^{\text{Hallova podmínka (HP)}}$

$\Rightarrow$ zřejmé



síť $\begin{cases} E = \{id : i \in I, d \in M_i\} \cup \{zi, i \in I\} \cup \{ds, d \in \bigcup M_i\} \\ V = \{z, s\} \cup I \cup \{M_i : i \in I\} \\ c = 1 \ \forall e \in E \end{cases}$

V. o celočís.: $\exists$ max. celočís. tok f ($f(e) = 0 \vee 1 \ \forall e \in E$)

$\mathcal{S}$ má SRR $\Rightarrow$

$\Leftarrow$

$\mathcal{S}$ má SRR $\Leftrightarrow$ ex. (max.) tok velikosti $|I|$

a) $\exists$ tok vel. $|I|$

b) max tok má velikost $\neq |I|$

$\exists$ řez R velikosti $< |I|$ (věta o tocích)

$R' = (R \cap (A \cup C)) \cup \{zi : i \in I \ \& \ \exists \text{ hrana } id \in R\}$ je řez

$|R'| \leq |R| < |I|$

$J := \{i \in I ; zi \notin R'\}$ $\quad K := \bigcup_{i \in J} M_i$ hrany ds, $d \in K$ patří do R'

$|R'| < |I| \Rightarrow \underbrace{|I \setminus J| + \overset{\geq |I| - |J|}{|K|}}_{= |R'|} < |I| \Rightarrow |K| < |J|$ ↯ s Hallovou podmínkou

Vrcholová a hranová souvislost v grafu

Def: Hranový řez v grafu $G=(V,E)$: $F \subseteq E$ t.ž. $(V, E \setminus F)$ je nesouvislý graf

Vrcholový řez — || — : $A \subseteq V$ t.ž. $(V \setminus A, E \cap \binom{V \setminus A}{2})$ je nesouvislý

Def: $k_e(G) := \min\{|F| : F \subseteq E$ je hranový řez$\}$

$k_v(G) := \begin{cases} \min\{|A| : A \subseteq V \text{ je vrcholový řez}\} \\ |V|-1 \end{cases}$

Věta (Ford, Fulkerson):

Pro každý graf $G=(V,E)$ a $\forall k \in \mathbb{N}$: $k_e(G) \geq k \iff \overset{u \neq v}{\forall u, v \in V} \; \exists \; k$ hranově disj. cest z u do v

Věta (Menger): — || —

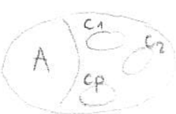
$k_v(G) \geq k \iff \forall u, v \in V$: $\exists k$ vrcholově disj. cest z u do v

30.3.2017

$\overset{\forall e}{\odot}$ $k_e(G)-1 \leq k_e(G-e) \leq k_e(G)$ $\square$

Tvrzení: $\forall e$ $k_v(G)-1 \leq k_v(G-e) \leq k_v(G)$ (zřejmé)

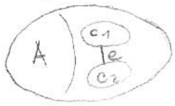
$A \subseteq V(G \setminus e)$ min. vrch. řez v $G \setminus e$



$C_1, \dots, C_p$ komponenty $(G-e) \setminus A$, $p \geq 2$

a) A řez grafu G: potom $k_v(G) \leq |A| = k_v(G-e)$

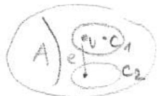
b) A není řez grafu G:



$p=2$

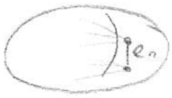
BÚNO $|V(G)| \geq |V(C_2)|$

$b_1)$ $|V(C_1)| \geq 2$



$A \cup \{v\}$ je vrch. řez G $\Rightarrow k_v(G) \leq |A|+1 = k_v(G-e)+1$

$b_2)$ $|V(C_1)| = 1$ $\quad |V(C_2)| = 1$



$k_v(G) \leq |V(G)|-1 = \underbrace{k_v(G-e)}_{=|A|}+1$ $\square$

PŘ: $k_v(C) = k_e(C) = 2$

$k_v(T) = k_e(T) = 1$ (strom)

$k_v(K_n) = n-1 = k_e(K_n)$

→ Věta: $k_v(G) \leq k_e(G)$ pro $\forall G$

…ukcí dle $|E(G)|$

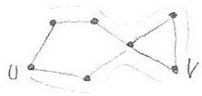
① $|E(G)| = 0 \Rightarrow k_e(G) = k_v(G)$

② a) $k_e(G) = 0 \Rightarrow k_v(G) = 0$

b) $k_e(G) > 0$

$F :=$ min. hranový řez (vel. $k_e(G)$)

$f \in F$ lib. $\quad k_v(G) - 1 \leq k_v(G - f) \overset{IP}{\leq} k_e(G - f) \overset{(\leq)}{=} k_e(G) - 1$ □



+ Věta: (Ford-Fulkerson) $\forall G\ \forall k \in \mathbb{N} : k_e(G) \geq t \iff \forall u, v \in V(G),\ u \neq v\ \exists \geq t$ hranově disj. cest z u do v

+ Věta: (Menger)

⇐ jednoduché

⇒ předp. $k_e(G) \geq t$; $u, v \in V(G)$

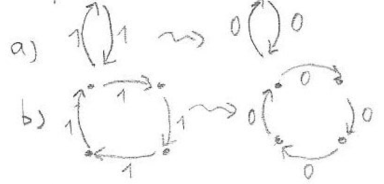
zdroj = u $\quad c := 1$

stok = v

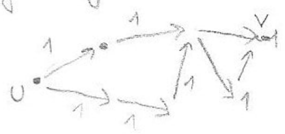
F.-F. algoritmus nám dá celočís. tok f

$k_e(G) \geq t \Rightarrow$ min. řez má kap. (velikost) $\geq t \qquad \overset{\nearrow \text{tok}}{|f|} \geq t$

zjednodušujeme f následovně:



f'... výsledný celočís. tok velikosti $|f|$

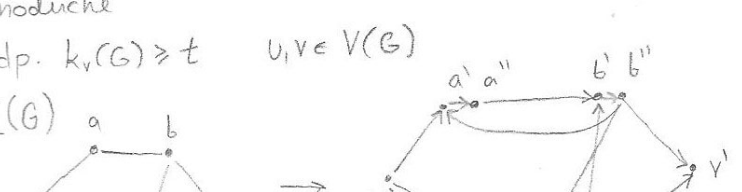


atd. najdeme v t krocích t hr. disj. cest z u do v □

⇐ jednoduché

⇒ předp. $k_v(G) \geq t \quad u, v \in V(G)$

a) $uv \notin E(G)$



síť S, $c := 1$ zdroj u'', stok v'

F-F. alg. nám dá max. celočís. tok f

$\exists$ min. hranový řez R v S obsahující pouze (modré) hrany $x'x''$

Protože každou hr. $x''y'$ můžeme nahradit hranou $x'x''$ nebo $y'y''$, R odpovídá vrch. řezu A v G téže nebo menší velikosti

$|R| \geq |A| \geq t$ tedy

$|f| = |R| \geq t$

zase zjednodušíme... f' výs. celočíselný tok $|f| \geq t$ ⇝ cesty odpovídají t vrch. disj. cestám z u do v

b) $uv \in E(G)$

$G' = G - uv$

$k_v(G') \geq t-1 \overset{a)}{\Rightarrow} \exists\, t-1$ vrch. disj. cest z u do v v G' + uv ... hotovo ✓ $\square$

✧ Definice: rovinný graf $G = (V, E)$ $\quad V \ni v \mapsto$ různé body v rovině
$E \subset \binom{V}{2}$ $\quad E \ni e \mapsto$ oblouky v $\mathbb{R}^2$, nekříží se ... rov. nakreslení grafu G

• oblouk: prosté spojité $f: I = [0,1] \to \mathbb{R}^2$ $\quad f(0), f(1)$ konce

PŘ: K_4 je rovinný

• topologická kružnice $\quad f: I = [0,1] \to \mathbb{R}^2$
spojitě prosté až na $f(0) = f(1)$

• stěna nakreslení grafu je souvislá komponenta mna $\mathbb{R}^2 \setminus R$
‖
mna $X \subseteq \mathbb{R}^2$, že $\forall u, v \in X$ lze spojit obloukem neprobíhajícím R

• lomená čára, lomenice – po částech lin.

Cvičení: G je rovinný $\iff$ má rovinné nakreslení lomenicemi

✧ Věta (Jordanova o kružnici): $C \subseteq \mathbb{R}^2$ je top. kružnice $\Rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus C$ má právě 2 komp. (om = vnitřek, neom = vnějšek) se společnou hranicí C.

✧ Větička: K_5 a $K_{3,3}$ nejsou rovinné grafy.
důkaz jest moc alternativní (na můj vkus)

✧ Def: dělení grafu: hrany nahradím cestami
$\{u,v\} \leftarrow \{u,w\}, \{w,v\}$ $\quad w \notin V$

✧ Věta (Kuratowski, 1930)
G je rovinný $\iff$ G $\not\supset$ dělení K_5
$\not\supset$ dělení $K_{3,3}$
lol, bez důkazu

$K_{3,3}$ není rovinný $\xrightarrow[\text{Thomassen komb. důkaz}]{}$ Jordanova věta

✧ Eulerův vzorec: $G = (V, E)$ souvislý rovinný graf $\Rightarrow |V| - |E| + \underset{\text{počet stěn}}{s} = 2$ $\quad \Rightarrow$ s nezávisí na nakreslení

Cvičení: Zobecnění vzorce na nesouvislé grafy
G je strom: $|V| - |E| = 1$, $s = 1$ ← platí, neboť $\mathbb{R}^2 \setminus$ obraz oblouku je souvislá
$G \not\supset \bigcirc \leadsto$ G je strom ✓
$G \supset \bigcirc$ $\quad G \leadsto G \setminus e$ splňuje vzorec □

PROBLÉM 4 BAREV $\quad G = (V, E)$ graf lze obarvit $k \in \mathbb{N}$ barvami: $\exists f: V \to \{1, 2, \dots, k\}$, že
$\{u,v\} = e \in E \Rightarrow f(u) \neq f(v)$
$\chi(G) = \min k$, že G lze obarvit $\leq k$ barvami
↑ chromatické číslo

(?) $\forall$ rov. graf G je $\chi(G) \leq 4$

Věta (Appel & Haken) $\forall$ rov. graf G je $\chi(G) \leq 4$

Robertson, Seymour, Thomas

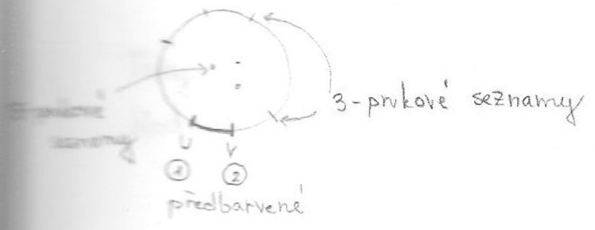
$G = (V, E)$, $k \in \mathbb{N}$, $\chi_\ell(G) \leq k$: $\forall v_{\in V} \longmapsto S_v$, $|S_v| = k$ $\exists$ řádné obarvení, tj. $f: V \to \bigcup_{v \in V} S_v$, že

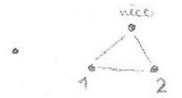
$\uparrow$ seznamové ch. číslo

$f(v) \in S_v$, $E \ni \{u, v\} \Rightarrow f(u) \neq f(v)$

Věta (Thomassen, 1994): G je rovinný $\Rightarrow \chi_\ell(G) \leq 5$

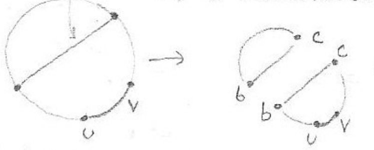
BÚNO G je skoro $\triangle$-ce, tj. všechny stěny až na vnější jsou $\triangle$. Indukce dle $|V|$.



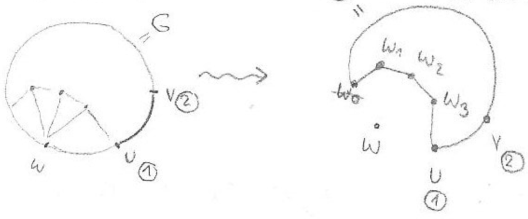


- $|V| \geq 4$

a) G má chordu



b) G nemá chordu:



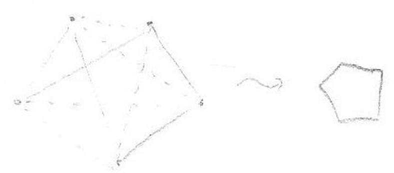
w_i neleží na obvodu

$S_w \ni x, y \neq 1$

$S'_{w_i} = S_{w_i} \setminus \{x, y\}$, aby $|S'_{w_i}| = 3$

$w_1, \dots, w_n$ nemají barvu ani x ani y

Ramseyovy věty



Ramseyho Věta: $\forall k\ \exists n = n(k)$: G graf na n vrcholech $\Rightarrow$ G obs. K_k nebo nezávislou mnu k vrcholů

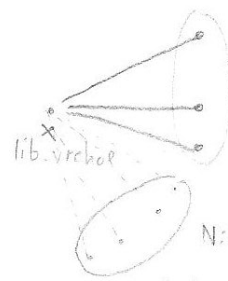
Věta (nesym. verze): $\forall k\ \forall \ell\ \exists n = n(k, \ell)$: G je graf na n vrcholech $\Rightarrow$ G obs. K_k nebo nezáv. mnu ℓ vrcholů

Pozn.: obě verze jsou ekvivalentní

nesym. verze: indukcí dle $k + \ell$

1. $k = 1$ nebo $\ell = 1$ $\rightsquigarrow$ platí pro $n = 1$
2. $k, \ell \geq 2$ platí $\forall k', \ell'$ ... $k' + \ell' < k + \ell$

$n := n(k-1, \ell) + n(k, \ell - 1)$



$S :=$ mna sousedů x

$N := V(G) \setminus S$

$|S| \geq n(k-1, \ell)$ nebo $|N| \geq n(k, \ell - 1)$

$\rightsquigarrow$ S obs. K_{k-1} nebo nez. mnu ℓ vrcholů

$\nearrow$ S obs. K_{k-1} $\cup \{x\}$ indukuje K_k ✓

$\searrow$ nez. mnu ℓ vrcholů ✓

$\nearrow$ obs. K_k ✓

$\searrow$ $\cup \{x\}$ indukuje ℓ nez. vrch. ✓

$\square$

Ramseyova věta (dvoubarevná verze)

$\forall k \; \forall \ell \;\; \exists n = n(k,\ell)$

hrany K_n obarveny každá červeně nebo modře

tj. máme $c: E(K_n) \to \{\check{c}er, mod\} \Rightarrow K_n$ obs. červený K_k nebo modrý K_ℓ

Def: $r(k,\ell) :=$ nejmenší $n(k,\ell)$ splňující R. podmínku

平果排

píng guǒ pái

$r(k) := r(k,k)$

$r(3) = 6$

$r(4) = 18$

$r(5) \in [43, 48]$

$\forall k,\ell: \;\; r(1,\ell) = r(k,1) = 1$

$k,\ell \geq 2 \;\; r(k,\ell) \leq r(k-1,\ell) + r(k,\ell-1)$

vyplývá z důkazu nesym. verze

Pozn: $r(k,\ell) \leq \binom{k+\ell-2}{k-1} < 2^{k+\ell-2}$

$2^{\frac{k}{2}} \leq r(k) \leq 2^{2k-2} = 4^{k-1}$

Ramseyova věta (vícebarevná verze)

$\forall r \; \forall k_1 \ldots \forall k_r \;\; \exists n = n(k_1 \ldots k_r)$:

$c: E(K_n) \to \{1, \ldots, r\} \Rightarrow \exists i: K_n$ obs podgraf K_{k_i} v barvě i

Ramseyova věta (barvení p-tic)

$\forall p \; \forall r \; \forall k_1 \ldots \forall k_r \;\; \exists n = n_p(k_1, \ldots, k_r)$: $|V| = n \quad c: \binom{V}{p} \to \{1, \ldots, r\} \Rightarrow \exists i$:

$\exists U \subseteq V: \; |U| = k_i \;\; \& \;\; c(X) = i \quad \forall X \in \binom{U}{p}$

R. věta (nekonečná verze)

G nekonečný graf $\Rightarrow G$ obs. nekonečný úplný podgraf nebo nekonečnou nez. podmnu vrcholů

Schurova věta: $\forall r \; \exists n$: $c: \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, r\} \Rightarrow \underset{x+y \leq n}{\exists x,y \in \{1,\ldots,n\}}: c(x) = c(y) = c(x+y)$

$V = \{1, \ldots, n\}$

$G =$ úplný graf na V

$c'(ab) = c(|a-b|)$ pro $\forall a,b \in V \;\; a \neq b$

n dost velké (v závislosti na r) $\Rightarrow \exists \alpha, \beta, \gamma \in V \;\; c'(\alpha\beta) = c'(\alpha\gamma) = c'(\beta\gamma)$

BÚNO $\alpha < \beta < \gamma$

$x := \beta - \alpha$

$y := \gamma - \beta$

$x + y = \gamma - \alpha$

$c(x) = c'(\alpha\beta)$

$c(y) = c'(\beta\gamma)$

$c(x+y) = c'(\alpha\gamma)$

Vytvořující funkce

Motto: Jak explicitně vyjádřit n-tý člen psti 1,1,2,3,5,8,...

Nekonečné řady

Def: Mocninná řada: $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$
$a_i \in \mathbb{R}$

Věta: Nechť $(a_0, a_1, a_2, \dots)$ je psl. reálných čísel a nechť $\exists K \in \mathbb{R}^*$: $|a_n| \leq K^n$ (pro $n \geq 1$). Potom $\forall x \in (-\frac{1}{K}, \frac{1}{K})$ řada $a(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ konverguje (dokonce abs.)

Tedy $a(x)$ můžeme považovat za fci na $(-\frac{1}{K}, \frac{1}{K})$.
Hodnoty $a(x)$ na lib. malém okolí 0 jednoznačně určují psl. $(a_0, a_1, \dots)$ $\forall n \in \mathbb{N}_0$
$$a_n = \frac{a^{(n)}(0)}{n!}$$

Def: $a_0, a_1, a_2 \dots$ psl reálných čísel
Vytvořující fce této psl je $a(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$

Operace s posloupnostmi

A. sečtení psti $(a_0, a_1, \dots)$, $(b_0, b_1, \dots)$

B. $\alpha \cdot (a_0, a_1, \dots) = (\alpha a_0, \alpha a_1, \dots)$

C. $x^k \cdot \underset{\text{VF } a(x)}{(a_0, a_1, \dots)} = (0, 0, \dots, 0, a_0, a_1, \dots)$

E. $a(x)$ je VF psl $(a_0, a_1, \dots)$, $a(\alpha x)$ je VF psl $(a_0, \alpha a_1, \alpha^2 a_2, \dots)$

F. $a(x)$ je VF psl $(a_0, a_1, \dots)$, $a(x^k)$ je VF psl $(a_0, \underbrace{0, \dots, 0}_{k-1}, a_1, 0, \dots, 0, a_2, \dots)$

G. $a'(x)$ je VF psl $(a_1, 2a_2, 3a_3, \dots)$
$\int_0^x a(t)\,dt$ je VF psl $(0, a_0, \frac{a_1}{2}, \frac{a_2}{3}, \dots)$
↳ máme urč. integrál

H. $a(x)b(x)$ je VF psl $(a_0 b_0, a_0 b_1 + a_1 b_0, \dots)$

PŘ: $\frac{\alpha}{1-\beta x}$ je VF psl $(\alpha, \alpha\beta, \alpha\beta^2, \dots)$

Fibonacciho čísla

$F_0 = 0,\ F_1 = 1,\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$

$F(x)$ je VF psl $(F_0, F_1, \dots)$

$G(x) = F(x) - xF(x) - x^2F(x)$ je VF psl$(\underset{0}{F_0};\ \underset{1}{F_1 - F_0};\ \underset{0}{F_2 - F_1 - F_0}, \dots) = x$

$$F(x) = \frac{x}{1-x-x^2} = \underbrace{\frac{a}{1-\lambda_1 x}}_{\text{VF psl}(a,\, a\lambda_1,\, a\lambda_1^2, \dots)} + \frac{b}{1-\lambda_2 x} \qquad a, b, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

odtud $\quad F_n = a\lambda_1^n + b\lambda_2^n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$

Kontrola: .... indukcí

Binomická věta:

$\forall r \in \mathbb{N}_0: \quad (1+x)^r = \binom{r}{0}x^0 + \dots + \binom{r}{i}x^i + \dots + \binom{r}{r}x^r$

tj. $(1+x)^r =$ VF pro psl. $\binom{r}{0}, \binom{r}{1}, \dots, \binom{r}{r}$

dosaď $\frac{a}{b}$, $\frac{b}{a}$ $\longrightarrow$ dostaneme $(a+b)^r \cdot \frac{1}{a^r}$ $\qquad \binom{r}{k} = \frac{r(r-1)\dots(r-k+1)}{k!}$

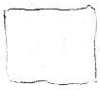
Zobecněná bin. věta: $\forall r \in \mathbb{R}$: $(1+x)^r$ je VF pro psl $\left(\binom{r}{0}, \binom{r}{1}, \dots\right)$

PŘ: $r \in \mathbb{Z}^-$, $\binom{r}{k} = (-1)^k \binom{-r+k-1}{k} = (-1)^k \binom{-r+k-1}{-r-1}$

$$(1-x)^{-n} = \frac{1}{(1-x)^n} = \binom{n-1}{n-1} + \binom{n}{n-1}x + \binom{n+1}{n-1}x^2 + \dots + \binom{n+k-1}{n-1}x^k + \dots$$

známe pro $n=1$

Binární strom



Def: binární strom (i) $\emptyset$ (žádný vrchol)

(ii) kořen + levý podstrom + pravý podstrom

Def: $b_n :=$ počet bin. stromů s n vrcholy

$b_0 = 1$

$b_1 = 1$

$b_2 = 2$ 

$b_3 = 5$ 

$b_n = b_0 b_{n-1} + b_1 b_{n-2} + \dots + b_{n-1} b_0$

označme: $b(x)$ je VF psl. $b_0, b_1, b_2, \dots$

$(b(x))^2$ je VF psl $b_0b_0,\ b_0b_1 + b_1b_0, \dots$ $\quad$ ($= b_1$, $= b_2$)

$x(b(x))^2$ je VF psl $0, b_1, b_2, \dots$

$b_0 + x(b(x))^2$ je VF psl $b_0, b_1, b_2, \dots$

$b(x) = \overset{b_0}{1} + x(b(x))^2$

$b(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x}$ $\quad$ + nevyhovuje

$b(x) = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x}$

[illegible] bin. věta: $\sqrt{1-4x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-4)^n \binom{1/2}{n} x^n$

[illegible] je 1 $\Rightarrow$ $1-\sqrt{1-4x}$ můžeme vydělit $2x$

$$\Rightarrow b_n = -\frac{1}{2}(-4)^{n+1}\binom{1/2}{n+1}$$

$$\binom{\frac{1}{2}}{n+1} = \frac{\frac{1}{2}\cdot -\frac{1}{2}\cdot -\frac{3}{2}\cdot \ldots \cdot -\frac{2n-1}{2}}{(n+1)!}$$

$$= \frac{(-1)^n \cdot \frac{(2n)!}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot 2n \cdot 2^{n+1}}}{(n+1)!} = \frac{(-1)^n \cdot \frac{(2n)!}{2^n \cdot n!} \cdot \frac{1}{2^{n+1}}}{(n+1)!} = \frac{(-1)^n \cdot (2n)!}{2^n \cdot (n+1)(n!)^2} \cdot \frac{1}{2^{n+1}}$$

$\binom{2n}{n}$

$$= \frac{1}{n+1}\cdot\binom{2n}{n} \boxed{\frac{1}{2^n \cdot 2^{n+1}} \cdot 2^{2n+2}\cdot\frac{1}{2}} = 1$$

kontrola: $b_0 \overset{?}{=} 1$

$b_n \overset{?}{=} b_0 b_{n-1} + \ldots + b_{n-1} b_0$

Několik klasických úloh v kombinatorice

1) problém okružní jízdy
2) problém obchodního cestujícího
3) problém hamiltonovských grafů
4) problém kropícího vozu
5) 邮递员问题

2) V kon. mna
$w : \binom{V}{2} \to \mathbb{R}^2$ předpis w splňuje Δ-nerovnost
chceme: cyklické pořadí vrcholů $v_1, v_2, \dots, v_n$ tak, aby $\sum_{i=1}^{n} w(v_i v_{i+1})$ bylo minimální

1) ≡ 2)
3) pro graf G rozhodnout, zda obsahuje hamiltonovskou kružnici
$\shortparallel$
kružnice procházející všemi vrcholy

4) $G = (V, E)$, $w : E \to \mathbb{R}^+$; chceme: $v_0, e_1, v_1, \dots, e_s, v_s$ tak, aby $\forall e \in E \;\; \exists i : e = e_i$, $v_0 = v_s$
$\sum_{i=1}^{s} w(e_i)$ bylo minimální
$\shortparallel$
5)

◎ Algoritmus na nalezení opt. řešení 1) lze použít na vyřešení 3)
$G = (V, E)$ $w : \binom{V}{2} \to \mathbb{R}^+$ $w(v_i v_j) = 1$ pokud $v_i v_j \in E$
$= 2$ pokud $v_i v_j \notin E$
G má hamilt. ○ $\Leftrightarrow$ $\exists$ okružní jízda $v_1, \dots, v_n$ t.ž. $\sum_{i=1}^{n} w(v_i v_j) = n$

◎ v úloze 1) lze snadno nalézt cykl. uspořádání $v_1, \dots, v_n$ tak, aby $\sum_{1}^{n} w(v_i v_{i+1}) \leq 2 \cdot$ opt. řeše[ní]

Algoritmus: 1. nalezni min. kostru (V, E) grafu $(V, \binom{V}{2})$ s ohodnocením w
Borůvkův alg.
2. utvoříme orientovaný graf $(V, \vec{E})$ ← !
3. nakreslíme $(V, \vec{E})$ jedním uzavřeným orient. tahem
4. přeskočíme vrchol v průchodu, pokud se přes něj jde vícekrát
opakujeme, dokud takový vrchol existuje

⇝ nalezne řešení $\sum v_i v_j \leq 2 \cdot \sum$ min. kostry $\leq 2 \cdot$ opt. řešení

✧ Tvrzení: Nechť $G = (V, E)$ splňuje $d_G(x) + d_G(y) \geq |V|$ pro $\cancel{\forall}$ nějaké $x, y \in V$, $xy \notin E$
Potom G je hamiltonovský $\Leftrightarrow$ G + hrana xy je hamiltonovský

⇒ ✓
⇐ předp., že G + xy je hamiltonovský, můžeme předp. že $\exists$ hamilt ○ obsahující hranu xy

musí $\exists i \in \{2, \dots, n-2\}$ t.ž. $x v_{i+1}, y v_i \in E$ ⇝ hotovo
jinak by $d(x) + d(y) \leq (n-3) + 2$ ← hrany $x v_2, y v_{n-1}$
horní odhad na # ost. hran z x a y

□

$G=(V,E)$ t.ž. $xy \notin E,\ x \neq y \Rightarrow d_G(x)+d_G(y) \geq n=|V|$. Potom G je hamilt.

$(G+xy)$ je hamilt $\Leftrightarrow$ ... $\Leftrightarrow K_n$ je hamilt $\square$

$G=(V,E)$, $|V|=n$, $\min d_G(x) \geq \frac{n}{2} \Rightarrow G$ je hamilt.

$n=2k+1$: $K_{k,k+1}$ není hamilt., $\min d_G(x)=k=\frac{n-1}{2}$

Def: $G=(V,E)$, $G^{(k)}=(V,E^{(k)})$, $xy \in E^{(k)} \Leftrightarrow x \neq y$ a $\exists$ cesta délky $\leq k$ z x do y v G

($G^{(1)}=G$, $G^{(n-1)}=K_n \Leftrightarrow G$ je souv.)

Věta: G souv. $\Rightarrow G^{(3)}$ je hamilt.

stačí vk, že $T^{(3)}$ je hamilt $\forall$strom T

dokážeme silnější: $\forall xy \in E(T)\ \exists$ cyklické pořadí $x=v_1, \dots, v_n=y$ tak, že $v_i v_{i+1} \in E(T^{(3)})$ $\forall i$

indukcí dle $|V|$: ① platí pro T s ≤ 4 vrcholy

② 

x' lib. soused x v T_x

y' — " — y v T_y

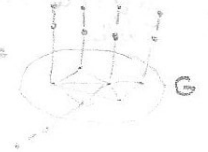
dle IP $\exists$ hamilt. ○ $x, \dots, x'$ v $T_x^{(3)}$

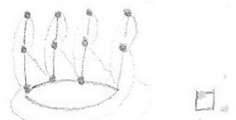
$\exists$ hamilt ○ $y, \dots, y'$ v $T_y^{(3)}$

Potom $x, \dots, x', y', \dots, y$ je pož. hamilt ○ $\square$

Př:  $G^{(2)}$ není hamilt.

Věta: G je hamilt. $\Leftrightarrow G^{*(2)}$ je hamilt., kde $G^*=G$ s ocásky

$G^*=$ 

důkaz  $\square$

Důkaz Cantor-Bernsteinovy věty: A, B mny, $\left.\begin{array}{l}\exists f: A \to B \text{ prostá} \\ \exists g: B \to A \text{ prostá}\end{array}\right\} \Rightarrow \exists h: A \xrightarrow{\sim} B$ bijekce $A \overset{1-1}{\longleftrightarrow} B$

BÚNO: $A \cap B = \emptyset$ ← stejné prvky rozlišíme

vezmeme $G=(A \cup B, E)$ bipartitní nekonečný

$\underset{A \ni\ \ \ \in B}{ab} \in E \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} f(a)=b$ nebo $g(b)=a$ všechny stupně jsou 1 nebo 2

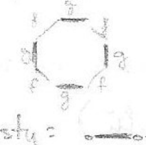
komponenty: kružnice

cesty: 

omezení: kružnice pouze sudé délky

konečné cesty pouze délky 1

Hledáme úplné párování ← to najdeme po komponentách

kružnice: 

$\square$

nekonač. cesty:

P vs. NP a tak dál

Definice: Rozhodovací problém: problém, který pro každý vstup L odpoví ANO nebo NE

Formálněji $f : \{0,1\}^* \to \{0,1\}$

PŘ: vstup: bipartitní graf, $k \in \mathbb{N}$ } výstup: odpověď na otázku, zda G obsahuje párování velikosti k

Pokud umíme rozhodnout v poly čase, pak umíme najít v G párování velikosti k ($\exists$-li)

vezme graf $G \setminus e$ … $\exists$ tam k párování < ne … tuhle hranu použijeme; ano … tuhle hranu zahodíme + pokračujeme s $(G \setminus e)$ □

Definice: A, B rozhodovací problémy. A lze redukovat/převést na B, pokud $\exists$ fce f spočitatelná v poly čase t.ž. $\forall x: A(x) = B(f(x))$. Píšeme $A \to B$.

Převoditelnost je reflexivní a tranzitivní.

Problém SAT: splnitelnost (satisfiability) log. formulí
log. formule v konjunktivní normální formě (CNF)

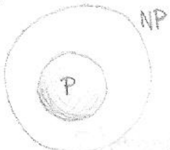
PŘ: $\psi = (a \vee \neg b \vee c) \wedge (c \vee d) \wedge (\neg d \vee \neg a) \wedge c$

literály = logické proměnné a jejich ¬; klausule

na vstupu: formule ψ v CNF
výstup: odpověď, zda $\exists$ dosazení 0, 1 za proměnné, t.ž. $\hat{e}(\psi) = 1$

Definice: P = třída rozhodnutelných problémů v polynomiálním čase
t.j. $L \in P \iff \exists$ polynom f, $\exists$ algoritmus A : $\forall x : L(x) = A(x)$ & $\forall(x)$ $A(x)$ doběhne v čase $\mathcal{O}(f(x))$ $\leq$ const. $f(x)$ + const
(L = rozhodovací problém jakožto mna vstupů daného problému, pro které je odpověď ANO)

Definice: NP = třída rozhodovacích problémů t.ž. $L \in NP \iff \exists$ problém $K \in P$ a $\exists$ polynom g t.ž. $\forall x : L(x) = 1 \iff (\exists$ (nápověda) y délky $\leq g(|x|)$ & $K(x, y) = 1)$ ($|x|$ = délka)



SAT $\in$ NP

P $\subseteq$ NP

Definice: L je NP-těžký, pokud na něj je převoditelný každý problém z NP

Definice: L je NP-úplný, pokud $L \in NP$ a je NP-těžký

Věta (Cookova): SAT je NP-úplný

Tvrzení: L je NP úplný, $L \to M$, $M \in NP$ $\Rightarrow$ M je NP-úplný

L je NP-úplný $\Rightarrow \forall A \in NP : A \to L \to M \Rightarrow A \to$ □

Některé NP úplné problémy:
- SAT
- 3-SAT (klausule obs. ≤ 3 literály)
- 3,3-SAT (— " — & každá proměnná se vyskytuje ≤ 3 krát)
- nezávislost mn v grafu ($\exists$ nezáv. mna k vrcholů)
- úplný podgraf v grafu
- barvení grafu ($\exists$ řádné obarvení grafu k barvami)
- hamilt. cesta/kružnice