Příklad.
Jakých hodnot musí nabývat reálné parametry a, b , aby soustava

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z + 2w &= 7 , \\ -2x - 3y + z - 2w &= -7 , \\ 3x + y - 2z + 4w &= 12 , \\ -x - 4y - 5z + bw &= a \end{aligned}$$

měla žádné, právě jedno či nekonečně mnoho řešení?

Převeďme rozšířenou matici uvedené soustavy na horní trojúhelníkovou matici ve stupňovém tvaru:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 2 & 7 \\ -2 & -3 & 1 & -2 & -7 \\ 3 & 1 & -2 & 4 & 12 \\ -1 & -4 & -5 & b & a \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & -5 & 2 & 7 \\ 0 & -5 & 7 & -2 & -9 \\ 0 & -2 & -8 & b+2 & a+7 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & -5 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & -18 & 8 & 26 \\ 0 & 0 & -18 & b+6 & a+21 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & -5 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & -9 & 4 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & b-2 & a-5 \end{array}\right) .$$

V případě, že $b \neq 2$, má soustava právě jedno řešení (pro jakékoliv $a \in \mathcal{R}$).
Pokud $b = 2$ a $a = 5$, existuje nekonečně mnoho řešení.
Pro $b = 2$ a $a \neq 5$ soustava řešení nemá.

1.6 Determinanty

Mějme čtvercovou matici n-tého řádu s reálnými prvky (je $n \in \mathcal{N}$)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} .$$

Takovéto (čtvercové!) matici je možno jednoznačným způsobem přiřadit reálné číslo, které ji bude jistým způsobem charakterizovat. Toto číslo se nazývá ***determinant*** matice A a značí se

$$det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} .$$

Obdobně jako u matic i tady hovoříme o determinantu n-tého řádu.

Namísto přesné definice tohoto přiřazení zde uvedeme některé postupy, jak hodnotu determinantu spočítat.

Pro $n = 1$: $\quad |\,a_{11}\,| = a_{11}$.

Pro $n = 2$:
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} .$$

Pro $n = 3$:
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} + a_{31} \cdot a_{12} \cdot a_{23} - \\ \quad - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{23} \cdot a_{32} \cdot a_{11} - a_{33} \cdot a_{12} \cdot a_{21} . \end{array}$$

Tento způsob výpočtu determinantu matice třetího řádu se nazývá ***Sarrusovo pravidlo***. Pro jeho zapamatování může být užitečný následující postup (viz schéma):

$$\begin{array}{ccccccc}
 & a_{11} & & a_{12} & & a_{13} & \\
 & & \searrow & & \swarrow & & \\
 & a_{21} & & a_{22} & & a_{23} & \\
 & & \searrow\!\!\!\!\swarrow & & \searrow\!\!\!\!\swarrow & & \\
 & a_{31} & & a_{32} & & a_{33} & \\
 -\swarrow & & \searrow\!\!\!\!\swarrow & & \searrow\!\!\!\!\swarrow & & \searrow + \\
 & a_{11} & & a_{12} & & a_{13} & \\
 -\swarrow & & \swarrow & & \searrow & & \searrow + \\
 & a_{21} & & a_{22} & & a_{23} & \\
 -\swarrow & & & & & & \searrow +
\end{array}$$

první dva řádky determinantu sepíšeme ještě jednou jako čtvrtý a pátý řádek — součiny trojic prvků ve směru hlavní diagonály pak opatříme znaménkem plus, součiny trojic prvků ve směru tzv. vedlejší diagonály znaménkem minus, a tyto členy poté sečteme (vedlejší diagonálou zde rozumíme úhlopříčku jdoucí z „pravého horního“ do „levého dolního rohu“ matice).

Pro $n \geq 4$:

Vyčíslit determinanty matic čtvrtého a vyššího řádu pomocí součtu součinů jejich prvků by bylo neúměrně komplikované. Používají se zde proto jiné postupy (ty lze samozřejmě užít i pro determinanty řádu druhého a třetího).

Rozvoj determinantu podle řádku (sloupce)

Uvažujme čtvercovou matici n-tého řádu
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = (\,a_{ij}\,),\ i, j = 1, 2, \dots, n.$$
Označme A_{ij} determinant matice, která vznikne z matice A vynecháním toho řádku a sloupce, ve kterém se nachází prvek a_{ij} (tedy i-tého řádku a j-tého sloupce). Takovýto determinant se nazývá ***subdeterminant*** matice A příslušející prvku a_{ij} a jeho řád je $n-1$.

Zvolme nyní libovolně k-tý řádek matice A (je $1 \leq k \leq n$) — jeho prvky jsou čísla $a_{k1}, a_{k2}, \dots, a_{kn}$ a k nim náležejí subdeterminanty $A_{k1}, A_{k2}, \dots, A_{kn}$. Pro hodnotu determinantu matice A pak platí (***rozvoj podle k-tého řádku***):
$$detA = (-1)^{k+1} a_{k1} A_{k1} + (-1)^{k+2} a_{k2} A_{k2} + \dots + (-1)^{k+n} a_{kn} A_{kn} .$$

Analogicky, vezmeme-li namísto k-tého řádku k-tý sloupec matice ($1 \leq k \leq n$), jsou jeho prvky $a_{1k}, a_{2k}, \ldots, a_{nk}$ a k nim příslušné subdeterminanty $A_{1k}, A_{2k}, \ldots, A_{nk}$. Hodnotu determinantu matice A je pak možno vyjádřit jako (***rozvoj podle k-tého sloupce***):

$$detA = (-1)^{1+k} a_{1k} A_{1k} + (-1)^{2+k} a_{2k} A_{2k} + \cdots + (-1)^{n+k} a_{nk} A_{nk} \, .$$

Poznámky.

(i) Výraz $(-1)^{i+j}$ v uvedených vyjádřeních je roven buď jedné nebo minus jedné, a to podle toho, jestli součet řádkového a sloupcového indexu prvku a_{ij} je sudé nebo liché číslo. Součiny tvaru $a_{ij}A_{ij}$ se podle toho tudíž opatřují znaménkem plus či minus.

(ii) Použijeme-li tento způsob výpočtu na determinant třetího řádu, dostaneme rozvojem podle prvního sloupce:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} a_{11} A_{11} + (-1)^{2+1} a_{21} A_{21} + (-1)^{3+1} a_{31} A_{31} =$$

$$= a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}),$$

což je (po roznásobení a přerovnání) Sarrusovo pravidlo.

Výpočet determinantu čtvrtého řádu se tak rozvojem nechá převést na výpočet obecně čtyř determinantů řádu třetího. Determinant např. sedmého řádu můžeme převést na výpočet determinantů postupně šestého, pátého, čtvrtého a třetího řádu, kde je nakonec možno použít Sarrusova pravidla.

Velice výhodné je rozvíjet determinant podle takového řádku či sloupce, mezi jehož prvky je hodně nul. V takovém případě totiž není nutné výpočty subdeterminantů příslušných k nulovým prvkům provádět — součin $a_{ij}A_{ij}$ nemůže být díky $a_{ij} = 0$ stejně jiný než nulový.

Důsledkem tohoto je pak skutečnost, že hodnota determinantu, který má některý řádek nebo sloupec vytvořený ze samých nul, je rovna nule.

Mechanické uplatňování metody rozvoje může být ovšem časově velice náročné — proto se k výpočtu determinantů vyšších řádů užívá ještě i jiného postupu.

Příklady.

(a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot 0 - 2 \cdot 3 = -6.$

(b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - 2 \cdot 1 = 0.$

To, že determinant (i vyššího řádu než dva) mající některé řádky (případně sloupce) stejné je roven nule, není náhoda. Jak uvidíme později, platí to vždy.

(c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 \cdot 0 + 4 \cdot 8 \cdot 3 + 7 \cdot 2 \cdot 6 - 3 \cdot 5 \cdot 7 - 6 \cdot 8 \cdot 1 - 0 \cdot 2 \cdot 4 = 96 + 84 - 105 - 48 = 27.$

Subdeterminant příslušející prvku 1 je $\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} = -48$, subdeterminant k prvku 2 je $\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} = -42$, k prvku 3 pak $\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 32 - 35 = -3$.

Rozvojem podle prvního řádku tak opět dostaneme

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -48+84-9 = 27.$$

(d) Následující determinant je výhodné rozvíjet podle druhého či čtvrtého řádku, případně, což provedeme, podle čtvrtého sloupce:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= -2 \cdot (-2 - 5 - 18) - 2 \cdot (6 - 15 - 2) = 2 \cdot 25 + 2 \cdot 11 = 72 \,.$$

Rozvojem podle čtvrtého řádku musíme ovšem dojít k témuž číslu:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -(-1) \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 30 + 4 + 10 + 4 - 3 \cdot (4 - 12) = 48 + 24 = 72 \,.$$

(e) Pomocí determinantu se dá lehce zapamatovat vztah pro výpočet vektorového součinu dvou vektorů (což je dost častý problém úloh z analytické geometrie v prostoru). Je-li $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ a označíme-li $\vec{i} = (1,0,0)$, $\vec{j} = (0,1,0)$, $\vec{k} = (0,0,1)$ — všechno to jsou prvky $\mathcal{R}^3$ — pak

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \vec{i} \cdot \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} - \vec{j} \cdot \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} + \vec{k} \cdot \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} =$$

$$= (u_2 v_3 - u_3 v_2, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1) \,.$$

Úpravy determinantu

U determinantů vyšších řádů (zejména pokud jejich prvky jsou ponejvíce nenulové) se k vyčíslení jejich hodnoty dá použít i některých úprav, které známe již z Gaussovy eliminace a se kterými jsme se setkali i při zjišťování hodnosti matic.

Situace zde ale nebude zcela totožná:

— změna pořadí řádků (sloupců) determinantu totiž může vést ke změně hodnoty determinantu na opačnou, jak lze lehce demonstrovat:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 7 \,, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -7 \,;$$

někdy je ale $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$;

platí tu totiž: vzájemnou výměnou dvou řádků (sloupců) se hodnota determinantu změní na opačnou;
rovnost uvedených determinantů třetího řádu pak odtud vyplývá takto:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = - \left(- \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \right) ;$$

— vynásobení řádku či sloupce (tj. opět každého prvku v tom řádku či sloupci) jakýmkoliv reálným číslem má za následek, že se stejným násobkem změní i hodnota determinantu,

např.: $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 7 - 15 = -8$, $\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 14 - 30 = -16$;

speciálně vynásobíme-li nějaký řádek (sloupec) nulou, stane se hodnota determinantu nulovou;

— jedinou z nám známých úprav, která hodnotu determinantu zachovává, je tak ta nejpodstatnější: k libovolnému řádku (resp. sloupci) můžeme přičíst jakýkoliv násobek řádku (resp. sloupce) jiného (přičítáním zde opět rozumíme součet řádkových, resp. sloupcových vektorů).

Použitím této poslední úpravy můžeme dosáhnout toho, že si v determinantu, aniž se změní jeho hodnota, pořídíme nulové prvky, které nám umožní snadněji provést jeho rozvoj.

Pokud navíc převedeme pomocí zmíněných úprav zadaný determinant na determinant matice, která je horní trojúhelníková, je hodnota determinantu rovna součinu prvků na hlavní diagonále.

Příklady.

(a) Dříve jsme vypočítali, že $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix} = 27$.

Jak se ke stejnému výsledku dostaneme zmíněnými úpravami?
Pomocí vhodného násobku prvního řádku nejprve upravujeme řádek druhý a třetí, poté pomocí druhého třetí řádek:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -21 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & -9 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-3) \cdot (-9) = 27 .$$

(b) Jak může vypadat výhodné kombinování metody rozvoje s úpravami?

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & 7 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & -6 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & 7 & 1 \\ 3 & -16 & -16 & 0 \\ -1 & 19 & 15 & 0 \end{vmatrix} =$$

Po úpravě třetího a čtvrtého řádku pomocí vhodných násobků řádku druhého můžeme získaný determinant rozvinout podle posledního sloupce:

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & -16 & -16 \\ -1 & 19 & 15 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 41 & 29 \\ 0 & 41 & 29 \\ -1 & 19 & 15 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 41 & 29 \\ -1 & 19 & 15 \end{vmatrix} = 0 .$$

(c) Použití úprav může být někdy výhodné i k výpočtu determinantu druhého řádu:

$$\begin{vmatrix} 1996 & 1997 \\ 1998 & 1999 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1996 & 1 \\ 1998 & 1 \end{vmatrix} = 1996 - 1998 = -2 \; ;$$

zde je opravdu jednodušší od druhého sloupce odečíst sloupec první a vyhnout se tak (i při počítání na kalkulačce) nepříjemnému násobení poměrně velkých čísel.

Poznámka.

Při výpočtu hodnoty determinantu pomocí jeho úprav je potřeba uvědomit si následující skutečnost, a vystříhat se tak eventuálních chyb z ní plynoucích.
Nelze postupovat tak (jako to bylo možné u soustav rovnic či při zjišťování hodnosti matice), že např. k dvojnásobku jednoho řádku přičteme např. trojnásobek řádku jiného — tím se o onen dvojnásobek změní i hodnota determinantu. Jestliže tedy chceme obejít někdy nepříjemné počítání se zlomky, musíme si být velice dobře vědomi, jakým způsobem hodnotu determinantu pozměníme. Takový správný postup by kupříkladu byl:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -6 & 10 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 19 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 19 = 19 \; .$$

V předchozím příkladě (b) jsme viděli, že determinant mající dva řádky stejné (ale týká se to samozřejmě i sloupců), můžeme úpravou (neměnící jeho hodnotu) převést na determinant obsahující řádek samých nul — a hodnota takového determinantu je rovna nule. Ta samá situace by nastala i tehdy, pokud by jeden řádek (sloupec) byl násobkem jiného.

Obecněji pak platí, že je-li jeden z řádků (sloupců) determinantu lineární kombinací řádků (sloupců) ostatních, je hodnota determinantu nulová.

Toto tvrzení se dá navíc i obrátit, tzn. je-li determinant roven nule, musí mít řádky (ale i sloupce), které jsou lineárně závislými vektory.

Označíme-li tedy jako $h(A)$ hodnost čtvercové matice A, která je n-tého řádu, je zřejmé, že

$$detA \neq 0 \iff h(A) = n \; .$$

Rovnost $h(A) = n$ nastává totiž právě tehdy, jsou-li řádky (resp. sloupce) matice lineárně nezávislými vektory.

Poznámky.

(i) Pomocí determinantů můžeme zjišťovat lineární závislost či nezávislost skupiny vektorů — prvků množiny $\mathcal{R}^n$.

(ii) Čtvercové matice, jejichž determinant je nenulový, se nazývají ***regulární***. Jako ***singulární*** se pak označují ty, které mají determinant rovný nule.

(iii) Pro čtvercové matice A, B stejného řádu platí: $det(A \cdot B) = detA \cdot detB$. Součin regulárních matic je tak matice regulární; výsledkem součinu matic, z nichž jedna je singulární, je singulární matice.

(iv) Determinant součtu matic se obecně součtu jednotlivých determinantů nerovná, což se dá ukázat např. na maticích $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1.7 Cramerovo pravidlo

Ze skutečností uvedených v předcházejícím oddílu je vidět, co o matici vypovídá hodnota jejího determinantu, speciálně jeho nulovost či nenulovost. Kromě toho se dají pomocí determinantů hledat i řešení některých soustav lineárních rovnic.

Nechť $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ je soustava n lineárních rovnic o n neznámých —

matice soustavy $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ je tudíž čtvercová řádu n,

vektor neznámých $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ i vektor pravých stran $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$ jsou z $\mathcal{R}^n$.

Z Frobeniovy věty vyplývá, že v případě, kdy A je regulární matice, má uvedená soustava právě jedno řešení (neboť hodnost matice A je rovna n, a to je zároveň i hodnost rozšířené matice soustavy).

Poznámka.

Jednoznačnost existence řešení tu tedy nikterak nezávisí na pravých stranách soustavy.

Označme A_k takovou matici $(1 \le k \le n)$, která vznikne z matice A nahrazením jejího k-tého sloupce sloupcem pravých stran (vektorem $\vec{b}$). V případě regularity matice A je $detA \neq 0$, a složky jediného existujícího řešení soustavy $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ se dají spočítat podle předpisu

$$x_k = \frac{detA_k}{detA}\ , \quad k = 1, 2, \dots, n\ .$$

Toto vyjádření se nazývá ***Cramerovo pravidlo***.

Poznámky.

(i) Je-li matice A singulární, Cramerovo pravidlo se užít nedá (je $detA = 0$). V tom případě má soustava buď žádné, anebo nekonečně mnoho řešení, a je ji třeba řešit Gaussovou eliminací.

(ii) Soustava $A \cdot \vec{x} = \vec{o}$ (tj. na pravých stranách jsou samé nuly) se nazývá homogenní. V takovém případě je vždycky jejím řešením nulový vektor, tzn. $\vec{x} = \vec{o}$ — toto řešení nazýváme ***řešením triviálním***.
Pokud A je regulární čtvercová matice, je evidentní, že žádné jiné řešení již existovat nemůže.
Nicméně u soustav tohoto typu nás většinou zajímá právě existence netriviálního řešení: tedy podmínky, za kterých je čtvercová matice A singulární. Tato problematika pak např. těsně souvisí s tzv. vlastními čísly a vlastními vektory matice.

(iii) Zapíšeme-li vedle sebe soustavu n rovnic o n neznámých v maticovém tvaru a jednu lineární rovnici pro jednu neznámou

$$A \cdot \vec{x} = \vec{b}\ , \qquad a \cdot x = b \qquad (\text{zde } A \text{ je matice řádu } n,\ \vec{x}, \vec{b} \in \mathcal{R}^n,\ a, b \in \mathcal{R})\ ,$$

vidíme analogii (co se týče řešení soustavy a rovnice) mezi rovnostmi $a = 0$ a $detA = 0$. V případě $a \neq 0$ je jediným řešením rovnice $a \cdot x = b$ hodnota $x = \frac{b}{a}$ nebo jinak zapsáno $x = a^{-1} \cdot b$. Číslo a^{-1} je převrácená hodnota (někdy také označovaná jako inverzní prvek) čísla a.

Analogií u matic je tzv. ***inverzní matice***, označovaná A^{-1}. Tady platí, že pokud $detA \neq 0$, A^{-1} existuje (je také řádu n) a $\vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b}$ je jediné řešení soustavy.

Podobně jako u čísel, kde $a^{-1} \cdot a = 1$, je i pro matice $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = I$ (jednotková matice).

V minulém oddílu zmíněný vztah $det(A \cdot B) = detA \cdot detB$ (platící pro čtvercové matice stejného řádu) aplikovaný na rovnost $A \cdot A^{-1} = I$ vylučuje, aby existovala inverzní matice k matici singulární (hodnota $det\,I$ je rovna jedné).

Z tohoto úhlu pohledu tak můžeme konstatovat, že obdobou nuly u reálných čísel jsou mezi čtvercovými maticemi spíše singulární matice, než jenom matice nulová. S tím koresponduje i další drobný fakt: u reálných čísel platí, že z rovnosti $a \cdot b = 0$ plyne $a = 0$ nebo $b = 0$, což u matic být nemusí — například $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$;

avšak ze singularity součinu matic $A \cdot B$ singularita jedné z nich nutně vyplývá.

(iv) Kromě řešení soustav lineárních rovnic Gaussovou eliminační metodou, Cramerovým pravidlem či pomocí inverzních matic existuje řada dalších, zejména numerických metod (je při nich zapotřebí počítače). Ty řešení dokáží nalézt po jistém počtu kroků s dostatečnou přesností — často ale vyžadují další předpoklady o matici soustavy A.

Příklad.

Řešme soustavu
$$\begin{aligned} 2x - 3y + z &= -1 \,, \\ -x - 4y + 2z &= -3 \,, \\ 3x \quad\;\; + z &= 6 \,. \end{aligned}$$

Matice soustavy $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & -4 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $detA = -8 - 18 + 12 - 3 = -17$ a A je tak regulární.

Řešení tudíž bude existovat právě jedno a můžeme jej spočítat pomocí Cramerova pravidla:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -3 & 1 \\ -3 & -4 & 2 \\ 6 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & -4 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{4 - 36 + 24 - 9}{-17} = \frac{-17}{-17} = 1\,;$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & -3 & 2 \\ 3 & 6 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & -4 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-6 - 6 - 6 + 9 - 24 - 1}{-17} = \frac{-34}{-17} = 2\,;$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ -1 & -4 & -3 \\ 3 & 0 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & -4 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-48 + 27 - 12 - 18}{-17} = \frac{-51}{-17} = 3\,.$$

Poznámka.
Jak je vidět, není tento postup příliš výhodný v případě, že matice soustavy a pravé strany neobsahují značné množství nulových prvků. Pro vyřešení soustavy jsme potřebovali spočítat hodnoty čtyř determinantů třetího řádu — tedy provést několik desítek početních operací sčítání a násobení. Při užití Gaussovy eliminace by však množství početních úkonů bylo o dost menší.
Tato skutečnost se pak ještě více zvýrazňuje u soustav majících vyšší počet rovnic. Vyřešit Cramerovým pravidlem soustavu čtyř rovnic o čtyřech neznámých znamená spočítat hodnoty pěti determinantů čtvrtého řádu — přitom k vyčíslení každého (pomocí úprav) je třeba asi z poloviny tak náročného postupu, jako je vlastní vyřešení soustavy Gaussovou eliminací.

Cvičení

1. Nechť $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 5 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 5 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 & 6 & 3 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$. Spočtěte:

   a) $A \cdot B + 2 \cdot B$; b) $C \cdot A - 3 \cdot C$; c) $B \cdot C$; d) $C \cdot B$;
   e) $A \cdot B \cdot C$; f) $B \cdot C \cdot A$; g) $A \cdot A$; h) $A \cdot (A + A)$.
   Ověřte, že $det(A \cdot A) = (det A)^2$.

2. Nechť $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Určete matici X tak, aby platilo:

   a) $A \cdot X = B$; b) $X \cdot A = B$; c) $A \cdot X = I$; d) $B \cdot X = I$.
   (V příkladech c), d) jde fakticky o nalezení inverzních matic A^{-1}, B^{-1}.)

3. Vyjádřete vektor $\vec{u}$ jako lineární kombinaci vektorů $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$:

   a) $\vec{u} = (1, -3, 2), \vec{v}_1 = (2, -3, 0), \vec{v}_2 = (-3, 4, 0), \vec{v}_3 = (0, 0, 1)$;
   b) $\vec{u} = (-8, 7, -1), \vec{v}_1 = (1, 2, 0), \vec{v}_2 = (3, -1, 2), \vec{v}_3 = (-1, 0, 5)$;
   c) $\vec{u} = (-9, 10, -4), \vec{v}_1 = (1, 2, 3), \vec{v}_2 = (2, -1, -4), \vec{v}_3 = (-3, 5, 2)$.

4. Rozhodněte, zda následující skupiny vektorů jsou lineárně závislé či nikoliv:

a) $\vec{v}_1 = (2,-1,3), \vec{v}_2 = (-3,4,5), \vec{v}_3 = (-4,17,9)$;
b) $\vec{v}_1 = (2,0,3,-1), \vec{v}_2 = (1,-1,2,3), \vec{v}_3 = (3,2,-1,2), \vec{v}_4 = (-4,-5,1,6)$;
c) $\vec{v}_1 = (2,3,1,4,2), \vec{v}_2 = (-4,18,9,28,16), \vec{v}_3 = (-3,5,2,6,3), \vec{v}_4 = (1,-3,1,2,3)$.

5. Pro jaká $t \in \mathcal{R}$ jsou následující skupiny vektorů lineárně závislé?

a) $\vec{v}_1 = (2,-1,-3), \vec{v}_2 = (5,2,-7), \vec{v}_3 = (-1,-13,t)$;
b) $\vec{v}_1 = (3,-2,-1,4), \vec{v}_2 = (-5,7,-3,2), \vec{v}_3 = (3,9,-12,t)$;
c) $\vec{v}_1 = (1,2,3,2,3), \vec{v}_2 = (2,3,-1,1,-2), \vec{v}_3 = (11,18,5,10,1), \vec{v}_4 = (t,-1,3,2,2)$.

6. Určete hodnosti h následujících matic:

$$\text{a)} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 5 \\ 3 & 6 & -2 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & -1 \end{pmatrix}; \quad \text{b)} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 & 1 & -3 \\ 7 & 7 & 16 & 14 & -12 \\ -8 & -2 & -14 & -10 & 6 \end{pmatrix}; \quad \text{c)} \begin{pmatrix} 9 & 28 & 46 \\ -1 & 7 & 5 \\ 8 & -17 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

7. Pro jaká $t \in \mathcal{R}$ jsou následující matice singulární?

$$\text{a)} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 6 \\ 5 & 7 & -1 \\ -4 & -17 & t \end{pmatrix}; \quad \text{b)} \begin{pmatrix} -3 & -3 & 5 \\ -t & 1 & t \\ 7 & 9 & -13 \end{pmatrix}; \quad \text{c)} \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & -3 \\ 2 & -1 & 3 & -5 \\ 5 & 8 & -9 & 1 \\ -3 & 2 & 7 & t \end{pmatrix}.$$

8. Spočtěte hodnoty determinantů:

$$\text{a)} \begin{vmatrix} -183 & 203 \\ 88 & -98 \end{vmatrix}; \quad \text{b)} \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 & 3 \\ -5 & 6 & 2 & -1 \\ 2 & 7 & -3 & 2 \\ -6 & 1 & 9 & 2 \end{vmatrix}; \quad \text{c)} \begin{vmatrix} 5 & 1 & -3 & -2 \\ -2 & 5 & 4 & 1 \\ 5 & 7 & 4 & -3 \\ 8 & 2 & -5 & -3 \end{vmatrix}.$$

9. Určete hodnotu neznámé $x \in \mathcal{R}$ tak, aby platilo:

$$\text{a)} \begin{vmatrix} x-1 & x & 2 \\ x^2 & -2 & x^2 \\ x & x & 3 \end{vmatrix} = 2; \quad \text{b)} \begin{vmatrix} x^2-1 & 7 & 3 \\ 1-x & 2x+1 & x \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}; \quad \text{c)} \begin{vmatrix} x+2 & 1 & 2 \\ x+6 & x+3 & 3 \\ 3x+6 & x+3 & x+4 \end{vmatrix} = 0.$$

10. Následující soustavy rovnic řešte pomocí Cramerova pravidla:

$$\text{a)} \begin{aligned} 15x - 4y &= -4, \\ -6x + 12y &= 38; \end{aligned} \quad \text{b)} \begin{aligned} -6x + 2y - 3z &= -7, \\ 2x + 3y + 5z &= -4, \\ 4x - y + z &= 0; \end{aligned} \quad \text{c)} \begin{aligned} 2x + z &= 1, \\ 3y - z + 2w &= 2, \\ 2x - 5w &= 1, \\ -x - 2y - 4w &= 0. \end{aligned}$$

11. Gaussovou eliminací řešte následující soustavy rovnic:

$$\text{a)} \begin{aligned} 2x + 3y &= -11, \\ -3x - 4y &= 14; \end{aligned} \quad \text{b)} \begin{aligned} 3x + y &= 5, \\ -2x + 3y &= 4, \\ 5x + 9y &= 17; \end{aligned} \quad \text{c)} \begin{aligned} 3x - y + 2z &= -11, \\ -x + 6y - 6z &= -16, \\ 2x + y + 4z &= -11; \end{aligned}$$

$$\text{d)} \begin{aligned} 2x - y + 5z + 2w &= 4, \\ -2x - 12y + 34z + 10w &= -3, \\ 7x + 3y - 2z + w &= 13; \end{aligned} \quad \text{e)} \begin{aligned} 5x - 2y + 3z + w &= 7, \\ -2x + 3y - z - 2w &= -5, \\ 8x + 10y + 6z - 8w &= -2, \\ 7x + 6y + 5z - 5w &= 1; \end{aligned}$$

f)
$$\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 4\,, \\ -5x - 7y + 3z &= -3\,, \\ 2x + 6y - 5z &= -2\,, \\ 3x - y - 2z &= 7\,; \end{aligned}$$

g)
$$\begin{aligned} 2x - 3y + 5z &= 1\,, \\ -3x - y + 2z &= -3\,, \\ 4x + 2y - 3z &= 5\,, \\ -2x - 11y + 20z &= a\,, \end{aligned}$$
kde a je reálný parametr.

12. Určete hodnotu reálného parametru t tak, aby soustava rovnic

a)
$$\begin{aligned} -x + 4y - 6z + 2w &= 1\,, \\ 2x + y + 3z - w &= 4\,, \\ -2x - 3y + z - 3w &= -10\,, \\ 2x + 8y - 2z + tw &= 4 \end{aligned}$$
měla nekonečně mnoho řešení;

b)
$$\begin{aligned} 3x + 5y + 2z - 3w &= 14\,, \\ 2x - 3y - 3z + 2w &= -5\,, \\ -2x + y + z - 5w &= 9\,, \\ 4x + 2y - 3z - w &= t \end{aligned}$$
neměla žádné řešení.

Výsledky.

1. a) $\begin{pmatrix} -7 & 23 \\ 5 & 5 \\ -2 & -12 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 11 & -5 & 28 \\ 17 & -3 & -9 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 8 & -12 & 15 \\ 10 & 0 & 35 \\ -9 & 6 & -25 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 5 & 15 \\ 3 & -22 \end{pmatrix}$;
e) $\begin{pmatrix} 37 & -18 & 110 \\ -15 & 30 & -20 \\ -4 & -24 & -40 \end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix} 53 & -35 & -38 \\ 115 & -15 & 60 \\ -84 & 25 & -11 \end{pmatrix}$; g) $\begin{pmatrix} -2 & 9 & 7 \\ 15 & 4 & 25 \\ 9 & 1 & -4 \end{pmatrix}$; h) $\begin{pmatrix} -4 & 18 & 14 \\ 30 & 8 & 50 \\ 18 & 2 & -8 \end{pmatrix}$.
Hodnoty determinantů: $detA = 50$, $det(A \cdot A) = 2500$.

2. a) $X = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{7}{6} & -\frac{4}{3} \end{pmatrix}$; b) $X = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & -\frac{7}{6} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$; c) $X = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$; d) $X = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$.

3. a) $\vec{u} = 5 \cdot \vec{v}_1 + 3 \cdot \vec{v}_2 + 2 \cdot \vec{v}_3$; b) $\vec{u} = 2 \cdot \vec{v}_1 - 3 \cdot \vec{v}_2 + \vec{v}_3$; c) $\vec{u} = -2 \cdot \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + 3 \cdot \vec{v}_3$.

4. a) lineárně nezávislé; b) lineárně nezávislé; c) lineárně závislé.

5. a) $t = 0$; b) pro žádné t; c) pro libovolné t.

6. a) $h = 3$; b) $h = 2$; c) $h = 2$.

7. a) $t = 20$; b) pro žádné t; c) pro libovolné t.

8. a) 70; b) 0; c) 6.

9. a) $x = 2$; b) nemá řešení; c) $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = -2$.

10. a) $(x, y) = (\frac{2}{3}, \frac{7}{2})$; b) $(x, y, z) = (-2, -5, 3)$; c) $(x, y, z, w) = (-2, 3, 5, -1)$.

11. a) $(x, y) = (2, -5)$; b) nemá řešení; c) $(x, y, z) = (-5, -3, \frac{1}{2})$; d) nemá řešení; e) nekonečně mnoho řešení, např. tvaru $(x, y, z, w) = (8 + 7t - 5s, t, -11 - 11t + 8s, s)$, kde $t, s \in \mathcal{R}$; f) $(x, y, z) = (2, -1, 0)$; g) pro $a = -4$ jediné řešení $(x, y, z) = (1, 2, 1)$, pro $a \neq -4$ řešení neexistuje.

12. a) $t = -2$; b) soustava má pro jakékoli t právě jedno řešení.