# 7. DODATKY

## 7.1 Inverzní matice

**Definice.** *Nechť $A$ je čtvercová matice řádu $n$.* ***Inverzní maticí*** *k matici $A$ nazveme takovou matici $A^{-1}$, pro kterou platí $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = I_n$ ($I_n$ značí jednotkovou matici $n$-tého řádu).*

**Poznámky.**

(i) Je zřejmé, že pokud taková inverzní matice $A^{-1}$ existuje, je také čtvercovou maticí řádu $n$.

(ii) Součin matic obecně komutativní není, nicméně rovnost $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A$ platí.

(iii) K nulové matici inverzní matice neexistuje — součin nulové matice s libovolnou maticí (téhož řádu) totiž dává vždy matici nulovou.

(iv) Protože $I_n$ je jednotková, tedy regulární matice, musí být nutně $A^{-1}$ i $A$ matice regulární (víme, že pokud v součinu vystupuje alespoň jedna matice singulární, je výsledkem této operace opět matice singulární).

**Věta.** *Matice $A^{-1}$ existuje právě tehdy, když matice $A$ je regulární.*

**Poznámky.**

(i) Předpoklad regularity matice $A$ je tedy pro existenci inverzní matice $A^{-1}$ také současně podmínkou postačující.

(ii) Pokud matice $A^{-1}$ existuje, je určena jednoznačně. To je důsledkem toho, že soustava lineárních rovnic s regulární maticí soustavy má právě jedno řešení.

(iii) Protože $I \cdot I = I$, je $I^{-1} = I$. Jednotková matice je tudíž inverzní sama k sobě.

(iv) Protože $\det(A\cdot A^{-1}) = \det A\cdot \det A^{-1}$ a $\det(A\cdot A^{-1}) = \det I = 1$, je $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$.

(v) Víme, že řešení soustavy lineárních rovnic s maticovým zápisem $A\vec{x} = \vec{b}$, kde $A$ je regulární matice (řešení pak existuje jediné), můžeme získat jako $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$.
Je totiž skutečně $A\vec{x} = A(A^{-1}\vec{b}) = (AA^{-1})\vec{b} = I\vec{b} = \vec{b}$ (zde jsme využili asociativnosti násobení matic).

(vi) Pro regulární matici $A$ je $(A^{-1})^{-1} = A$. To znamená, že inverzní matice k inverzní matici je opět matice původní.
(Platí $A\vec{x} = \vec{y} \iff \vec{x} = A^{-1}\vec{y} \iff (A^{-1})^{-1}\vec{x} = \vec{y}$. Nyní stačí porovnat levé strany první a třetí rovnosti.)

(vii) Pro regulární matice $A, B$ téhož řádu platí: $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
(Je $(AB)\vec{x} = \vec{y} \iff \vec{x} = (AB)^{-1}\vec{y}$. Zároveň $(B^{-1}A^{-1})(AB)\vec{x} = (B^{-1}A^{-1})\vec{y}$, kde levá strana této rovnosti — využijeme-li asociativnosti násobení — také dává $\vec{x}$: $B^{-1}(A^{-1}A)B\vec{x} = (B^{-1}B)\vec{x} = \vec{x}$. Pak již stačí porovnat pravé strany druhé a třetí rovnosti.)

Otázkou nyní je, jak pro danou regulární matici $A$ inverzní matici $A^{-1}$ najít.

Označme sloupcové vektory hledané inverzní matice $A^{-1}$ jako $\vec{s}_1, \vec{s}_2, \ldots, \vec{s}_n$ ($n \in \mathcal{N}$ značí řád matice, kterou invertujeme) a současně sloupcové vektory jednotkové matice $I_n$ jako $\vec{i}_1, \vec{i}_2, \ldots, \vec{i}_n$. Je $\vec{i}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{i}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}$ atd.

Pro takto označené sloupcové vektory přímo z definice inverzní matice vyplývají vztahy:

$$A\vec{s}_k = \vec{i}_k\,, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Jednou z možností výpočtu inverzní matice — určení jejích sloupcových vektorů $\vec{s}_k$ — je tedy vyřešit těchto $n$ soustav lineárních rovnic, které mají tutéž matici soustavy a liší se jen pravými stranami. Postup Gaussovy eliminace tak můžeme provádět pro všechny soustavy zároveň, samozřejmě s uvážením většího počtu vektorů pravých stran — jak ilustruje následující příklad.

**Příklad.**

Mějme matici $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, jež je regulární ($\det A = 12$). Hledejme $A^{-1}$.

Rozšířené matice tří výše zmíněných soustav $A\vec{s}_1 = \vec{i}_1$, $A\vec{s}_2 = \vec{i}_2$, $A\vec{s}_3 = \vec{i}_3$ (s vektory neznámých $\vec{s}_1, \vec{s}_2, \vec{s}_3$) jsou:

$$\left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

kde jsme napravo od silnější svislé čáry zapsali sloupcové vektory pravých stran jednotlivých soustav (a oddělili je slabšími svislými čarami).

Řešme nyní tyto tři soustavy (najednou) standardním postupem. Nejprve od druhého, resp. třetího řádku odečteme dvojnásobek, resp. trojnásobek řádku prvního:

$$\left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -8 & 2 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Nyní od pětinásobku třetího řádku odečteme čtyřnásobek řádku druhého:

$$\left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -7 & -4 & 5 \end{array}\right).$$

Tím jsou rozšířené matice soustav převedeny na stupňový tvar, ze kterého by již bylo možné vektory neznámých $\vec{s}_1, \vec{s}_2, \vec{s}_3$ snadno určit.
Výhodnější nicméně bude v daném procesu dále pokračovat tak, abychom od matice soustavy ve stupňovém tvaru dospěli pomocí elementárních úprav k matici diagonální (dokonce jednotkové). Nejprve se budeme snažit „vynulovat“ prvky (matice soustavy) na pozicích 1,3 a 2,3, a posléze prvek s indexem 1,2.
K trojnásobku druhého řádku tedy nejprve přičteme dvojnásobek řádku třetího, a zároveň od šestinásobku řádku prvního odečteme řádek třetí:

$$\left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 6 & 18 & 0 & 13 & 4 & -5 \\ 0 & -30 & 0 & -20 & -5 & 10 \\ 0 & 0 & -6 & -7 & -4 & 5 \end{array}\right).$$

Dále zbývá k pětinásobku prvního řádku přičíst trojnásobek řádku druhého:

$$\left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 30 & 0 & 0 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & -30 & 0 & -20 & -5 & 10 \\ 0 & 0 & -6 & -7 & -4 & 5 \end{array}\right).$$

Vydělíme-li nyní konečně první řádek číslem 30, druhý $-30$ a třetí $-6$, bude procedura převedení matice soustavy na matici jednotkovou završena:

$$\left(\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{6} & \frac{2}{3} & -\frac{5}{6} \end{array}\right).$$

Zdůrazněme, že jsme k úpravám systému rozšířených matic soustavy použili pouze těch úprav (označovaných jako elementární), které množinu řešení zachovávají.
V čem tkví výhoda tohoto tzv. „zpětného chodu“ Gaussovy eliminace? Pokud přepíšeme získané schéma zpátky jakožto tři soustavy lineárních rovnic, vidíme, že platí:

$$\vec{s}_1 = I\vec{s}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{7}{6} \end{pmatrix}, \quad \vec{s}_2 = I\vec{s}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \quad \vec{s}_3 = I\vec{s}_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{5}{6} \end{pmatrix}.$$

Sloupcové vektory pravých stran vystupující v posledně uvedeném tvaru systému rozšířených matic (při jednotkové matici soustavy!) tak nejsou ničím jiným, než sloupcovými vektory hledané inverzní matice.
Jinak řečeno: inverzní matici k dané matici $A$ můžeme nalézt tak, že napravo od matice $A$ napíšeme matici jednotkovou; jestliže potom nalevo zapsanou matici $A$ převedeme elementárními úpravami na jednotkovou, pak při současném provádění týchž úprav také v matici napravo je tato převedena na matici inverzní.

**Poznámky.**

(i) Elementární úpravy v Gaussově eliminaci se týkají výhradně řádkových úprav. Není tak možno kupříkladu měnit pořadí sloupců v maticích — to by obecně vedlo k nesprávnému výsledku!

(ii) Správnost výpočtu je samozřejmě vhodné ověřit zkouškou: součin $AA^{-1}$ musí dát jednotkovou matici.

Jinou možností, jak inverzní matici spočítat, je využít determinantů.

Mějme dánu regulární matici $A$ ($n$-tého řádu). Označme subdeterminant této matice náležící prvku $a_{ij}$ jako $A_{ij}$. Symbol $D_{ij} = (-1)^{i+j}A_{ij}$ nechť dále značí tzv. ***doplněk*** tohoto prvku. (Je to právě tento člen, který násoben prvkem $a_{ij}$ vystupuje v rozvoji determinantu.)
Inverzní matici $A^{-1}$ pak můžeme zapsat ve tvaru

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\,(b_{ij}), \quad \text{kde} \quad b_{ij} = D_{ji},\ i,j = 1,2,\ldots,n\,.$$

Tedy například prvek nacházející se ve druhém řádku a třetím sloupci inverzní matice se počítá z doplňku prvku $a_{32}$!

**Poznámka.**

Pokud bychom definovali tzv. ***transponovanou matici*** k matici $A$ (značíme $A^{\mathrm{T}}$) jako matici, která vznikne tak, že řádky matice $A$ píšeme v nezměněném pořadí do sloupců, lze stručně psát $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\,(D_{ij})^{\mathrm{T}}$.

**Příklad.**

Vraťme se k minulé úloze a nalezněme inverzní matici k matici $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ pomocí doplňků. Je $\det A = 12$, spočtěme doplňky všech prvků:

$$D_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2, \quad D_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 8, \quad D_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 14,$$

$$D_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2, \quad D_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 2, \quad D_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 8,$$

$$D_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = 2, \quad D_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -4, \quad D_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -10.$$

Nyní je

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 2 & 8 & 14 \\ 2 & 2 & 8 \\ 2 & -4 & -10 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 8 & 2 & -4 \\ 14 & 8 & -10 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ \frac{7}{6} & \frac{2}{3} & -\frac{5}{6} \end{pmatrix}.$$

## 7.2 Vektorový a smíšený součin

Vektorový součin dvou vektorů je operace, jejímž výsledkem (jak název napovídá) je opět vektor. Liší se tím od součinu skalárního, kde výsledkem je číslo (skalár).

Na rozdíl od skalárního součinu, který je definován v jakémkoliv prostoru $\mathcal{R}^n$, uvažujeme vektorový součin pouze v třídimenzionálním prostoru $\mathcal{R}^3$. (Připomeňme jen, že například pro $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3), \vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ je skalární součin $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$, pro velikost vektoru $\vec{u}$ pak platí $|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$. Pokud $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, říkáme, že vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$ jsou na sebe kolmé.)

**Definice.** ***Vektorovým součinem*** *dvou lineárně nezávislých vektorů $\vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{R}^3$ rozumíme takový vektor $\vec{w} \in \mathcal{R}^3$ — značíme $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$ — pro který platí:*

(1) *$\vec{w}$ je kolmý na oba vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$;*

(2) *pro velikost vektoru $\vec{w}$ platí: $|\vec{w}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin\alpha$, kde $\alpha$ je odchylka vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$;*

(3) *vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ tvoří v $\mathcal{R}^3$ tzv. pravotočivou soustavu souřadnou.*

*V případě, že vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$ jsou lineárně závislé, pokládáme $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{o}$ (tj. $\vec{w}$ je nulový vektor).*

**Poznámky.**

(i) Jestliže $\vec{u}$ nebo $\vec{v}$ je nulový vektor, je buď $|\vec{u}| = 0$ nebo $|\vec{v}| = 0$, a dodatek definice týkající se vektorového součinu lineárně závislých vektorů je pro tento případ zcela ve shodě s bodem (2) ($\vec{w} = \vec{o} \iff |\vec{w}| = 0$).

(ii) Podobně je tomu i tehdy, když $\vec{u}$, $\vec{v}$ jsou lineárně závislé nenulové vektory — pak je buď $\alpha = 0$ nebo $\alpha = \pi$, a tedy $\sin\alpha = 0$.
(Pro odchylku $\alpha$ nenulových vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$ platí známý vztah $\cos\alpha = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$.)

(iii) Zatímco bod (1) uvedené definice určuje směr výsledného vektoru, bod (2) udává jeho délku. Takové vektory jsou ovšem stále ještě dva, a jsou opačně orientované. Bod (3)