Poznámka.
Pro zjednodušení počítání při Gaussově eliminaci může být někdy výhodné měnit pořadí nejen řádků v uvedeném schématu (tj. rovnic v soustavě), ale i sloupců koeficientů — avšak pouze těch, které vystupují nalevo od svislé čáry (sloupec pravých stran tu má specifické postavení). Tato změna pořadí sloupců pak odpovídá změně pořadí členů s neznámými na levých stranách rovnic (např. $2x-3y+z=2 \to z-3y+2x=2$). Na tento fakt potom nesmíme zapomenout při výpočtu konkrétních hodnot řešení (neznámých) ze stupňového tvaru.

1.3 Matice

V předcházejícím oddílu jsme koeficienty soustavy rovnic uspořádali do schématu sestávajícího z řádků a sloupců. Takovýmto objektům se v matematice říká ***matice***.

V následujícím textu soustředíme svoji pozornost výhradně na matice reálných čísel (i když jistý význam mají např. také matice, jejichž prvky jsou polynomy nebo jiné funkce apod.).

Definice. *Maticí A typu $m \times n$ budeme nazývat objekt tvořený $m \cdot n$ (reálnými) čísly uspořádanými do m řádků a n sloupců (je $m, n \in \mathcal{N}$):*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij}) \ , \quad i = 1, 2, \dots, m; \ j = 1, 2, \dots, n \, .$$

Matice budeme značit velkými písmeny, jejich prvky písmeny malými — a_{ij} přitom znamená, že prvek se nachází v i-tém řádku a j-tém sloupci matice A.

Je-li $m = n$, říkáme, že A je ***čtvercová matice*** řádu n.

Prvky $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{44}, \dots$ jsou prvky tzv. ***hlavní diagonály*** matice A (u matice, která není čtvercová, tak hlavní diagonála nekončí prvkem umístěným v „pravém dolním rohu“ matice).

Matici, která má „pod hlavní diagonálou“ jen nulové prvky (tj. $0 = a_{21} = a_{31} = a_{32} = a_{41} = a_{42} = a_{43} = \dots$), nazýváme ***horní trojúhelníkovou maticí.***

Horní trojúhelníkovou matici, která má tu vlastnost, že každý její následující řádek má (oproti řádku předchozímu) odleva alespoň o jeden nulový prvek více, budeme nazývat ***horní trojúhelníkovou maticí ve stupňovém tvaru.***

Nulovou maticí máme na mysli matici, jejíž všechny prvky jsou rovny nule.

Diagonální matice je taková, která má nulové všechny prvky neležící na hlavní diagonále. Čtvercová diagonální matice, jejíž diagonální prvky jsou vesměs rovny jedné, se nazývá ***matice jednotková.***

Je-li $m = 1$ (resp. $n = 1$), hovoříme místo o matici o ***řádkovém*** (resp. ***sloupcovém***) ***vektoru*** — to ale není nic jiného, než uspořádaná n-tice (resp. m-tice) reálných čísel, neboli prvek prostoru $\mathcal{R}^n$ (resp. $\mathcal{R}^m$).

Příklady.

(a) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ je (obdélníková) matice typu 2×3.

(b) $C = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$ je čtvercová matice druhého řádu.

(c) $D_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $D_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ jsou horní trojúhelníkové matice.
Zatímco matice D_1 je ve stupňovém tvaru, matice D_2 nikoliv.

(d) $E = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ je matice diagonální.

(e) $F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ je jednotková matice třetího řádu.

(f) $G = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{R}^4$ je sloupcový vektor (matice typu 4×1).

Operace s maticemi

Definice (rovnost matic). *Matice $A = (a_{ij})$ a $B = (b_{ij})$ považujeme za sobě rovné, jsou-li shodného typu a platí-li $a_{ij} = b_{ij}$ pro všechny přípustné hodnoty indexů i a j.*

Definice (součet matic). *Jsou-li $A = (a_{ij})$ a $B = (b_{ij})$ matice téhož typu $m \times n$, rozumíme jejich součtem matici $C = (c_{ij})$, kde $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, $i = 1, 2, \ldots, m; j = 1, 2, \ldots, n$.*

Definice (násobení matice reálným číslem). *Je-li $A = (a_{ij})$ matice typu $m \times n$ a s reálné číslo, rozumíme zápisem $s \cdot A$ matici $(s \cdot a_{ij})$, $i = 1, 2, \ldots, m; j = 1, 2, \ldots, n$.*

Sčítat matice (shodného typu) tudíž znamená sčítat jejich prvky na odpovídajících si místech. Výsledná matice je přitom stejného typu jako obě matice sčítané.

Násobit matici reálným číslem znamená násobit tímto číslem každý prvek uvažované matice (výsledkem je opět matice téhož typu jako matice původní).

Analogicky jako součet lze definovat i rozdíl matic (opět pouze pro matice téhož typu $m \times n$): $A - B = (a_{ij} - b_{ij})$, $i = 1, 2, \ldots, m; j = 1, 2, \ldots, n$. Pro zavedení tohoto pojmu je ale též možné využít vztahu $A - B = A + (-1) \cdot B$.

Jsou-li A, B, C libovolné matice shodného typu a s, t jakákoliv reálná čísla, platí následující rovnosti:

$$A + B = B + A\,, \qquad (A + B) + C = A + (B + C)\,,$$
$$s \cdot (A + B) = s \cdot A + s \cdot B\,, \qquad (s + t) \cdot A = s \cdot A + t \cdot A\,,$$
$$0 \cdot A = A - A \quad \text{je nulová matice.}$$

Příklady.

(a) Matice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ není rovna matici $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}.$

(c) $2 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 6 \\ 4 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$

(d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ nelze provést.

Kromě výše zmíněných operací je rovněž definován i součin (některých) matic. Zde již ale neplatí, že by se mezi sebou násobily stejnolehlé prvky; situace je poněkud komplikovanější.

Definice (součin matic). *Nechť $A = (\,a_{ij}\,)$ je matice typu $m \times n$ a $B = (\,b_{jk}\,)$ je matice typu $n \times p$. Součinem matic $A \cdot B$ rozumíme matici $C = (\,c_{ik}\,)$ typu $m \times p$ takovou, že*

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \cdots + a_{in}b_{nk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}$$

pro všechna $i = 1, 2, \ldots, m; k = 1, 2, \ldots, p$.

Prvek v i-tém řádku a k-tém sloupci matice $C = A \cdot B$ dostaneme tedy tak, že skalárně vynásobíme i-tý řádek matice A s k-tým sloupcem matice B. Aby tento skalární součin vektorů byl proveditelný, musí mít matice A tolik sloupců, kolik má matice B řádků (odtud tedy plyne požadavek na typy mezi sebou násobených matic).

Připomeňme, že výsledkem skalárního součinu vektorů $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ a $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ je (reálné) číslo, které vyčíslíme jako $v_1u_1 + v_2u_2 + \cdots + v_nu_n$.

Příklad.

Pro $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ je

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 0 \cdot (-3) & 2 \cdot 2 + 0 \cdot 5 \\ -3 \cdot 1 + 1 \cdot (-3) & -3 \cdot 2 + 1 \cdot 5 \\ 6 \cdot 1 + 2 \cdot (-3) & 6 \cdot 2 + 2 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -6 & -1 \\ 0 & 22 \end{pmatrix}.$$

Součin $B \cdot A$ provést nelze.

Jak je vidět, násobení matic není obecně komutativní. A to ani tehdy, jsou-li oba součiny definovány: to je v tom případě, pokud A je typu $m \times n$ a B typu $n \times m$. Výsledkem součinu $A \cdot B$ je pak matice typu $m \times m$, součinu $B \cdot A$ matice typu $n \times n$ — rovnost $A \cdot B = B \cdot A$ tedy zcela jistě neplatí, bude-li $m \neq n$. Nicméně ani v případě $m = n$ není vždy $A \cdot B = B \cdot A$, jak ilustruje následující příklad.

Příklad.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 15 \\ 3 & 10 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 16 \end{pmatrix}.$$

Některé vlastnosti ale operace násobení matic má:

$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C\,,$$
$$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C\,, \qquad A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C\,,$$

pokud A, B, C jsou takové matice, že uvedené operace lze provést.

Jsou-li dále A čtvercová a I jednotková matice stejného řádu, je $A \cdot I = I \cdot A = A$. Odtud je zřejmý původ terminologie — jednotková matice je tzv. jednotkovým prvkem vzhledem k operaci násobení matic (obdoba reálného čísla 1 při násobení reálných čísel).

(Obecněji: pokud A je matice typu $m \times n$ a I_m, resp. I_n značí jednotkovou matici řádu m, resp. n, platí $I_m \cdot A = A$, $A \cdot I_n = A$.)

Podobně je nulová matice tzv. nulovým prvkem pro operaci sčítání matic (opět analogie s nulou při sčítání reálných čísel), neboť přičtením této matice k jakékoliv matici (samozřejmě stejného typu) dostaneme matici původní.

1.4 Lineární závislost vektorů a hodnost matice

Také v následujících odstavcích budeme vektory rozumět uspořádané n-tice reálných čísel, tedy prvky prostoru $\mathcal{R}^n$ (i když pojmy, které zavedeme, je možno rozšířit i na jiné, obecnější množiny a jejich prvky).

Definice. *Nechť $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k \in \mathcal{R}^n$.* ***Lineární kombinací vektorů*** *$\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k$ nazveme každý vektor $\vec{u}$, který lze vyjádřit ve tvaru $\vec{u} = s_1\vec{v}_1 + s_2\vec{v}_2 + \cdots + s_k\vec{v}_k$, kde $s_1, s_2, \ldots, s_k$ jsou reálná čísla ($k \in \mathcal{N}$).*

Příklady.

(a) Vektor $(2,5,-4)$ je lineární kombinací vektorů $(1,3,0)$, $(0,2,2)$, $(0,1,0)$, neboť je $(2,5,-4) = 2 \cdot (1,3,0) - 2 \cdot (0,2,2) + 3 \cdot (0,1,0)$.

(b) Nulový vektor $\vec{o} = (0,0,\ldots,0)$ je lineární kombinací jakýchkoli vektorů (z téhož prostoru); za reálná čísla $s_1, s_2, \ldots, s_k$ vystupující v definici lze totiž vzít např. samé nuly.

(c) Vektor $(2,5,-4)$ není lineární kombinací vektorů $(1,0,0)$ a $(0,1,0)$, neboť má nenulovou třetí složku, a pro žádná s_1, s_2 nemůže platit $-4 = s_1 \cdot 0 + s_2 \cdot 0$.

Jakým postupem zjistíme, je-li vektor $\vec{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ lineární kombinací vektorů $\vec{v}_1 = (v_{11}, v_{12}, \ldots, v_{1n})$, $\vec{v}_2 = (v_{21}, v_{22}, \ldots, v_{2n})$, $\ldots$, $\vec{v}_k = (v_{k1}, v_{k2}, \ldots, v_{kn})$?

Hledáme $s_1, s_2, \ldots, s_k \in \mathcal{R}$ taková, aby platilo $\vec{u} = s_1\vec{v}_1 + s_2\vec{v}_2 + \cdots + s_k\vec{v}_k$, neboli po rozepsání do jednotlivých souřadnic

$$\begin{array}{rcl} u_1 &=& s_1v_{11} + s_2v_{21} + \cdots + s_kv_{k1} \;, \\ u_2 &=& s_1v_{12} + s_2v_{22} + \cdots + s_kv_{k2} \;, \\ \ldots && \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ u_n &=& s_1v_{1n} + s_2v_{2n} + \cdots + s_kv_{kn} \;. \end{array} \tag{3}$$

Řešíme tudíž soustavu n lineárních rovnic o k neznámých $s_1, s_2, \ldots, s_k$. Vektor $\vec{u}$ pak bude lineární kombinací vektorů $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k$ právě tehdy, když soustava (3) bude mít řešení.

Definice. *Říkáme, že vektory $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k \in \mathcal{R}^n$ jsou* ***lineárně závislé****, je-li některý z nich lineární kombinací vektorů ostatních. V opačném případě říkáme, že jsou* ***lineárně nezávislé****.*

Ihned je zřejmé, že:
— obsahuje-li množina $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}$ nulový vektor nebo dva stejné vektory, je množinou vektorů lineárně závislých;
— dva vektory $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ jsou lineárně závislé právě tehdy, je-li jeden z nich násobkem druhého.

Jak můžeme zjistit, jsou-li dané vektory $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$ lineárně závislé či nikoliv?

Hledáme všechny možné lineární kombinace $s_1\vec{v}_1 + s_2\vec{v}_2 + \cdots + s_k\vec{v}_k$ dávající nulový vektor. Pokud mezi nimi existuje taková kombinace, že alespoň jeden z reálných koeficientů s_i je nenulový (nechť je to např. s_1), jsou dané vektory lineárně závislé (v tom případě je totiž $v_1 = -\frac{s_2}{s_1}\vec{v}_2 - \frac{s_3}{s_1}\vec{v}_3 - \cdots - \frac{s_k}{s_1}\vec{v}_k$).

Je-li rovnost $s_1\vec{v}_1 + s_2\vec{v}_2 + \cdots + s_k\vec{v}_k = \vec{o}$ splněna pouze tehdy, jsou-li všechna s_i vesměs rovna nule (tzv. triviální řešení), jsou vektory $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$ lineárně nezávislé.

Příklad.
Jsou vektory $(1,2,-1)$, $(3,2,0)$, $(-4,4,-5)$ lineárně závislé či nikoliv?
Hledáme s_1, s_2, s_3 tak, aby $s_1 \cdot (1,2,-1) + s_2 \cdot (3,2,0) + s_3 \cdot (-4,4,-5) = (0,0,0)$, to jest

$$(s_1 + 3s_2 - 4s_3, 2s_1 + 2s_2 + 4s_3, -s_1 - 5s_3) = (0,0,0) \ ,$$

neboli

$$\begin{aligned} s_1 + 3s_2 - 4s_3 &= 0 \ , \\ 2s_1 + 2s_2 + 4s_3 &= 0 \ , \\ -s_1 - 5s_3 &= 0 \ . \end{aligned}$$

Tuto soustavu řešíme Gaussovou eliminací:

$$\begin{aligned} s_1 + 3s_2 - 4s_3 &= 0 \ , \\ - 4s_2 + 12s_3 &= 0 \ , \\ 3s_2 - 9s_3 &= 0 \ . \end{aligned}$$

Třetí rovnice je násobkem druhé a soustava má tudíž nekonečně mnoho řešení (a mezi nimi tedy i netriviální), např. $s_1 = -5$, $s_2 = 3$, $s_3 = 1$. Vektory jsou tedy lineárně závislé a jeden z nich je lineární kombinací zbývajících, například $(-4,4,-5) = 5 \cdot (1,2,-1) - 3 \cdot (3,2,0)$. (Interpretováno z hlediska prostorové geometrie jde o vektory ležící v jedné rovině.)

Vraťme se nyní zpátky k maticím. Na matici typu $m \times n$ můžeme nahlížet také jako na skupinu m řádkových vektorů (prvků $\mathcal{R}^n$). O řádcích matice tak budeme říkat, že jsou lineárně závislé (nezávislé), jsou-li lineárně závislé (nezávislé) zmíněné řádkové vektory.

Definice. *Maximální počet lineárně nezávislých řádků matice nazýváme **hodnostÍ** této **matice**.*

Poznámky.
(i) Zcela jistě je tedy hodnost matice nejvýše rovna počtu jejích řádků.
(ii) Hodnost matice A se někdy označuje $h(A)$.

Příklady.
(a) Matice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -4 & 4 & -5 \end{pmatrix}$ má hodnost dvě, neboť třetí řádek (viz výše) je lineární kombinací prvních dvou a tyto jsou lineárně nezávislé (jeden není násobkem druhého).

(b) Matice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}$ má hodnost jedna.

Pro zjišťování hodnosti matice se používá následujících skutečností: hodnost matice se nezmění, pokud

— libovolně změníme pořadí jejích řádků;

— vynásobíme její libovolný řádek (tj. každý prvek tohoto řádku) jakýmkoli nenulovým (!) číslem;

— přičteme k jakémukoliv řádku libovolný násobek některého jiného řádku (přičítáním tu opět máme na mysli sčítání řádkových vektorů).

K čemu je to dobré? Pomocí těchto ***elementárních úprav*** (známých již z Gaussovy eliminace) je možno jakoukoli matici převést na horní trojúhelníkovou matici ve stupňovém tvaru, která má stejnou hodnost jako matice výchozí. A co je podstatné: hodnost horní trojúhelníkové matice ve stupňovém tvaru umíme jednoduše zjistit — je rovna počtu nenulových řádků (nulovým řádkem rozumíme samozřejmě ten, jehož prvky jsou samé nuly).

Příklad.

Jakou hodnost má matice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & -1 \\ -2 & 2 & -8 & 2 \end{pmatrix}$?

Pomocí výše uvedených úprav dostáváme:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & -1 \\ -2 & 2 & -8 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 5 & -1 \\ 0 & 8 & -10 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Počet nenulových řádků získané horní trojúhelníkové matice (má stupňový tvar) je dva, což je zároveň i její hodnost a také hodnost vyšetřované matice A.

Poznámka.

Zmíněný postup se dá využít i pro zjišťování lineární závislosti či nezávislosti množiny vektorů (prvků z $\mathcal{R}^n$). Vytvoříme-li matici, jejímiž řádky budou právě zadané vektory, můžeme převodem na horní trojúhelníkovou matici ve stupňovém tvaru zjistit její hodnost. Bude-li menší než počet zadaných vektorů, jsou tyto vektory lineárně závislé, bude-li rovna počtu vektorů, jsou tyto lineárně nezávislé.

Poznámka (důležitější).

Vše, co tu bylo v souvislosti s termínem hodnost matice zmíněno o řádkových vektorech, platí zároveň i pro sloupcové vektory matice. To znamená, že hodnost matice definovaná jako maximální počet lineárně nezávislých řádků je současně rovna i maximálnímu počtu lineárně nezávislých sloupců. Kromě elementárních úprav na řádkové vektory je pak možno — aniž bychom hodnost matice změnili — používat i zcela analogické úpravy na vektory sloupcové.

Důsledek.

Hodnost matice A typu $m \times n$ je menší nebo rovna menšímu z čísel m,n. Speciálně tedy jakákoliv množina k vektorů z $\mathcal{R}^n$ bude pro $k > n$ množinou lineárně závislých vektorů. Konkrétně tedy každé tři vektory z $\mathcal{R}^2$ či libovolné čtyři vektory z $\mathcal{R}^3$ musí být lineárně závislé. (S touto skutečností velice úzce souvisejí pojmy jako dimenze a báze prostoru $\mathcal{R}^n$.)

1.5 Frobeniova věta

Zkusme se nyní na soustavy lineárních rovnic podívat z hlediska uvedených pojmů. V prvé řadě je možné jakoukoli soustavu m lineárních rovnic o n neznámých

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + \cdots + & a_{1n}x_n & = & b_1 & , \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + \cdots + & a_{2n}x_n & = & b_2 & , \\ \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + \cdots + & a_{mn}x_n & = & b_m & , \end{array}$$

přepsat do maticového tvaru:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix} .$$

Matice $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$ se nazývá ***maticí soustavy***,

sloupcový vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$ ***vektorem neznámých***

a sloupcový vektor $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}$ ***vektorem pravých stran.***

Symbolický zápis zmíněné soustavy je pak možno vyjádřit v jednoduchém tvaru $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$. Jedná se tu o rovnost dvou matic (přesněji sloupcových vektorů), kde na levé straně rovnice je součin matic (přesněji matice se sloupcovým vektorem). Matice soustavy A je přitom typu $m \times n$, vektor $\vec{x}$ je prvek prostoru $\mathcal{R}^n$ a vektor $\vec{b}$ je z prostoru $\mathcal{R}^m$ ($\vec{x}$ a $\vec{b}$ mohou mít tudíž rozdílný počet prvků).

Rozšířenou maticí soustavy máme na mysli matici soustavy s přidaným sloupcem pravých stran, tzn.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) .$$

Svislá čára je zde používána pro zdůraznění odlišného postavení koeficientů a_{ij} a pravých stran b_i v soustavě. Rozšířená matice soustavy m lineárních rovnic o n neznámých je tak typu $m \times (n + 1)$.

Přepišme nyní uvedenou soustavu $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ následujícím způsobem:

$$A \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 \\ a_{21}x_1 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{12}x_2 \\ a_{22}x_2 \\ \dots \\ a_{m2}x_2 \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} a_{1n}x_n \\ a_{2n}x_n \\ \dots \\ a_{mn}x_n \end{pmatrix} =$$

$$= x_1 \cdot \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \cdot \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} = \vec{b}\,.$$

Co se dá z tohoto vyjádření usuzovat o existenci řešení soustavy lineárních rovnic?

Řešení bude samozřejmě existovat právě tehdy, když sloupcový vektor pravých stran $\vec{b}$ bude lineární kombinací sloupcových vektorů matice soustavy, tj. budou-li existovat čísla $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathcal{R}$ tak, že

$$\vec{b} = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \cdots + x_n\vec{a}_n\ ,$$

kde $\vec{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \dots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$ je j-tý sloupec matice soustavy $A\,(j = 1, 2, \dots, n)$.

Pokud je ale sloupcový vektor pravých stran lineární kombinací sloupců matice soustavy, nezmění se (tj. nezvýší se) jeho přidáním k matici soustavy maximální počet jejích lineárně nezávislých sloupců, a tudíž hodnost matice soustavy a hodnost rozšířené matice soustavy budou shodné.

Odtud vyplývá následující tvrzení.

Věta (Frobeniova). *Soustava lineárních rovnic $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ má řešení právě tehdy, je-li hodnost matice soustavy rovna hodnosti rozšířené matice soustavy.*
Pokud navíc je tato společná hodnost h rovna počtu neznámých n, soustava má řešení právě jedno.
Je-li $h < n$, je těchto řešení nekonečně mnoho, a to tolik, kolik je prvků množiny $\mathcal{R}^{n-h}$.

Poznámky.

(i) Případ $h > n$ nenastane, neboť hodnost matice soustavy nemůže být větší než je počet jejích sloupců, což je právě počet neznámých v soustavě.

(ii) Soustava nemá řešení, jestliže vektor pravých stran není lineární kombinací sloupcových vektorů matice soustavy. Hodnost rozšířené matice soustavy je v tomto případě o jednu větší než hodnost matice soustavy.

(iii) Zjistit a porovnat hodnosti obou zmiňovaných matic v praxi neznamená nic jiného, než převést rozšířenou matici soustavy na horní trojúhelníkovou matici ve stupňovém tvaru. Jestliže při tom postupujeme tak, že elementární úpravy, které hodnost matice nemění, provádíme pouze na řádky, nepoužíváme vlastně nic jiného než Gaussovu eliminaci. Zároveň tímto postupem můžeme i případná existující řešení vyčíslit.

Příklad.

Jakých hodnot musí nabývat reálné parametry a, b , aby soustava

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z + 2w &= 7 \ , \\ -2x - 3y + z - 2w &= -7 \ , \\ 3x + y - 2z + 4w &= 12 \ , \\ -x - 4y - 5z + bw &= a \end{aligned}$$

měla žádné, právě jedno či nekonečně mnoho řešení?

Převeďme rozšířenou matici uvedené soustavy na horní trojúhelníkovou matici ve stupňovém tvaru:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 2 & 7 \\ -2 & -3 & 1 & -2 & -7 \\ 3 & 1 & -2 & 4 & 12 \\ -1 & -4 & -5 & b & a \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & -5 & 2 & 7 \\ 0 & -5 & 7 & -2 & -9 \\ 0 & -2 & -8 & b+2 & a+7 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & -5 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & -18 & 8 & 26 \\ 0 & 0 & -18 & b+6 & a+21 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & -5 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & -9 & 4 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & b-2 & a-5 \end{array}\right).$$

V případě, že $b \neq 2$, má soustava právě jedno řešení (pro jakékoliv $a \in \mathcal{R}$).
Pokud $b = 2$ a $a = 5$, existuje nekonečně mnoho řešení.
Pro $b = 2$ a $a \neq 5$ soustava řešení nemá.

1.6 Determinanty

Mějme čtvercovou matici n-tého řádu s reálnými prvky (je $n \in \mathcal{N}$)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Takovéto (čtvercové!) matici je možno jednoznačným způsobem přiřadit reálné číslo, které ji bude jistým způsobem charakterizovat. Toto číslo se nazývá ***determinant*** matice A a značí se

$$detA = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Obdobně jako u matic i tady hovoříme o determinantu n-tého řádu.