1. LINEÁRNÍ ALGEBRA

1.1 Soustavy lineárních rovnic

Definice. ***Soustavou*** m ***lineárních rovnic*** *o* n *neznámých nazýváme zápis tvaru*

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + \cdots + & a_{1n}x_n & = & b_1 & , \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + \cdots + & a_{2n}x_n & = & b_2 & , \\ \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + \cdots + & a_{mn}x_n & = & b_m & , \end{array} \tag{1}$$

kde $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *značí neznámá reálná čísla,* a_{ij} a b_i *zadaná reálná čísla* $(i = 1, 2, \ldots, m;$ $j = 1, 2, \ldots, n;\ m, n \in \mathcal{N})$.

Poznámky.

(i) Protože v následujícím textu budeme pracovat takřka výhradně s čísly reálnými (značíme $\mathcal{R}$), budeme tento přívlastek často vynechávat.

(ii) Čísla a_{ij} se nazývají koeficienty soustavy; čísla b_i jsou tzv. pravé strany jednotlivých rovnic.

(iii) Místo $x_1, x_2, \ldots, x_n$ budeme neznámé často označovat i jinak: kupříkladu x, y, z apod.

(iv) Asi není třeba vysvětlovat, co to je rovnice (případně soustava rovnic) a její řešení. Lineární rovnice znamená zhruba tolik, že neznámé v ní vystupující jsou mezi sebou pouze sčítány nebo jsou násobeny (reálnými) koeficienty — rovnice $x_1 \cdot x_2 + x_1 + x_2 = 2$, $x^2 + x = 0$, $\sin y + \cos y = 0$ apod. jsou tak příklady rovnic, které lineární nejsou.

(v) Přičteme-li k oběma stranám rovnice totéž číslo, případně obě strany rovnice vynásobíme tímtéž nenulovým(!) číslem, rovnice se tím nezmění (tj. zůstane zachována množina jejích řešení).

Řešením soustavy (1) nazýváme každou uspořádanou n-tici reálných čísel $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$

takovou, že po dosazení čísel $z_1, z_2, \ldots, z_n$ po řadě za neznámé $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jsou všechny rovnice soustavy (1) splněny.

Vyřešit takovouto soustavu pak znamená nalézt všechna její řešení.

Příklady.

(a) Nejjednodušší soustavou lineárních rovnic je pochopitelně jedna rovnice o jedné neznámé, kupříkladu $2x = 6$. Jejím jediným řešením je $x = 3$.

(b) Obecně lze jednu lineární rovnici o jedné neznámé zapsat ve tvaru $ax = b$, kde a, b jsou daná čísla, x je neznámá. Ne vždy musí mít takováto rovnice jediné řešení, jako tomu bylo výše. Záleží na tom, je-li hodnota a nulová, nebo ne.
V případě $a \neq 0$ tak bude mít rovnice právě jedno řešení (ať je hodnota b jakákoliv), a to $x = b/a$.
Pokud $a = 0$, mohou nastat dvě možnosti: bude-li i $b = 0$, je uvedená rovnice splněna pro libovolně zvolenou hodnotu x, a existuje tudíž nekonečně mnoho řešení; bude-li naopak $b \neq 0$, nebude daná rovnice splněna pro žádnou hodnotu neznámé x, a řešení tak nebude existovat žádné.

Poznámka.

Jak uvidíme dále, již tento nejjednodušší příklad soustavy lineárních rovnic zahrnuje všechny možné případy, pokud jde o existenci a jednoznačnost jejího řešení: libovolná soustava (1) může mít právě jedno řešení, nekonečně mnoho řešení, či řešení žádné. Případ, aby soustava lineárních rovnic měla kupříkladu právě dvě různá řešení, tak nemůže nastat.

Důležitou otázkou nyní je, jakým způsobem všechna řešení dané soustavy lineárních rovnic najít. Uveďme zatím několik dalších jednoduchých příkladů.

(a) Jedna rovnice o dvou neznámých $3x + y = 6$ má nekonečně mnoho řešení, mezi něž patří například dvojice $(2, 0)$, $(1, 3)$, $(3, -3)$ atd. Všechna tato řešení je možno popsat následujícím způsobem: za y zvolíme jakékoliv $t \in \mathcal{R}$ a z rovnice $3x + t = 6$ dopočítáme hodnotu neznámé $x = 2 - \frac{1}{3}t$ v závislosti na tomto t; uspořádané dvojice $(2 - \frac{1}{3}t, t)$, kde t je libovolné reálné číslo, jsou potom právě všechna řešení uvedené rovnice.
Nahlížíme-li na tyto uspořádané dvojice jako na body v rovině (s kartézskými souřadnicemi x, y), zjišťujeme, že vyplňují přímku, kterou je možno na základě získaného řešení parametricky vyjádřit ve tvaru $(x, y) = (2 - \frac{1}{3}t, t) = (2, 0) + t(-\frac{1}{3}, 1), t \in \mathcal{R}$; obecnou rovnicí této přímky je pak sama zadaná rovnice.
Zmíněná soustava má tedy tolik řešení, kolik je prvků v množině $\mathcal{R}$ (kolik je bodů na přímce).

(b) Řešení soustavy dvou rovnic o dvou neznámých

$$\begin{aligned} x - 2y &= 1 \quad , \\ 2x + y &= 7 \end{aligned}$$

je možno nalézt například tak, že z první rovnice vyjádříme $x = 1 + 2y$ a tento výraz dosadíme do rovnice druhé, tj.

$$2(1 + 2y) + y = 7 \quad ,$$

neboli $5y = 5$, a tedy $y = 1$. Dopočtením $x = 1 + 2 \cdot 1 = 3$ tak dostáváme, že jediným řešením soustavy je uspořádaná dvojice čísel $(3, 1)$.
Opět je možno použít geometrické interpretace: hledat řešení soustavy dvou rovnic o dvou neznámých odpovídá hledání společných bodů dvou přímek v rovině — v našem případě jsou přímky $x - 2y = 1$ a $2x + y = 7$ různoběžkami s jediným (samozřejmě) průsečíkem, totiž bodem $(3, 1)$.

Jaká je jiná vzájemná poloha dvou přímek? Přímky mohou být dále jen rovnoběžné různé, což koresponduje s neexistencí řešení příslušné soustavy lineárních rovnic, anebo totožné, což odpovídá existenci nekonečně mnoha řešení příslušné soustavy. Právě dva (tři, čtyři apod.) společné body dvě přímky mít nemohou.

Soustava
$$\begin{aligned} x - 2y &= 1 \ , \\ 2x - 4y &= 3 \end{aligned}$$
tak odpovídá právě případu dvou různých rovnoběžek. O neexistenci řešení této soustavy se přesvědčíme tak, že po vyjádření $x = 1 + 2y$ z rovnice první a dosazení tohoto vztahu do rovnice druhé dostaneme $2(1 + 2y) - 4y = 3$, tj. $2 = 3$, což nemůže být splněno.

Naopak soustava
$$\begin{aligned} x - 2y &= 1 \ , \\ 2x - 4y &= 2 \end{aligned}$$
má nekonečně mnoho řešení: po stejném dosazení jako u předchozí soustavy dostáváme identickou rovnost $2(1 + 2y) - 4y = 2$ — obě rovnice popisují tutéž přímku.

(c) Soustava dvou rovnic o třech neznámých
$$\begin{aligned} x + y + z &= 3 \ , \\ 2x - y - 2z &= -1 \end{aligned}$$
bude mít tolik řešení, kolik budou mít obě roviny (každá z rovnic představuje rovinu v prostoru opatřeném kartézskými souřadnicemi x, y, z) společných bodů. Protože tyto roviny nejsou rovnoběžné (jejich normálové vektory nejsou rovnoběžné, tj. jeden není násobkem druhého), bude těchto řešení nekonečně mnoho — a to tolik, kolik je bodů na přímce.

Jak tato řešení (průsečnici dvou rovin) najít? Z první rovnice vyjádříme například $y = 3 - x - z$ a dosadíme do rovnice druhé. Řešení soustavy dvou rovnic pro tři neznámé tak převedeme na řešení jedné rovnice pro již jen dvě neznámé x, z. Máme tedy
$$\begin{aligned} 2x - (3 - x - z) - 2z &= -1 \ , \\ \text{tj.} \quad 3x - z &= 2 \ . \end{aligned}$$
Tato rovnice má nekonečně mnoho řešení. Položíme-li $z = t \in \mathcal{R}$, je $x = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}t$ a $y = 3 - (\frac{2}{3} + \frac{1}{3}t) - t = \frac{7}{3} - \frac{4}{3}t$. Každá trojice bodů tvaru $(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}t, \frac{7}{3} - \frac{4}{3}t, t)$, kde t je libovolné reálné číslo, je řešením uvažované soustavy (o čemž se lze přesvědčit provedením zkoušky, tj. dosazením těchto čísel za neznámé x, y, z do zadané soustavy) — a jsou to zároveň i všechna její řešení.

Parametrické vyjádření průsečnice zmíněných rovin pak může být
$$(x, y, z) = (\tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{3}t, \tfrac{7}{3} - \tfrac{4}{3}t, t) = (\tfrac{2}{3}, \tfrac{7}{3}, 0) + t \cdot (\tfrac{1}{3}, -\tfrac{4}{3}, 1) \ , \ t \in \mathcal{R}$$
— zde $(\frac{2}{3}, \frac{7}{3}, 0)$ je jeden z bodů této přímky a $(\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}, 1)$ je její směrový vektor.

Takovéto vyjádření ovšem není jediné možné: směrovým vektorem téže přímky je např. i vektor $(1, -4, 3)$ a jeden z jejích bodů je bod $(1, 1, 1)$. Množinu všech řešení uvedené soustavy rovnic je tedy možno „parametrizovat" i jinak — řešením zmíněné soustavy jsou stejně tak dobře právě všechny uspořádané trojice tvaru
$$(1, 1, 1) + s \cdot (1, -4, 3) = (1 + s, 1 - 4s, 1 + 3s) \ ,$$
kde s je libovolné reálné číslo.

(d) Soustava dvou rovnic o třech neznámých
$$\begin{aligned} x + y + z &= 3 \ , \\ 2x + 2y + 2z &= 6 \end{aligned}$$
má také nekonečně mnoho řešení. Tentokráte ale tolik, kolik je bodů v rovině (obě rovnice vyjadřují tutéž rovinu), tj. kolik je prvků množiny $\mathcal{R}^2$. „Parametrizací" $z = t$,

$y = s$, $x = 3 - t - s$, kde t, s jsou libovolná reálná čísla, je možno množinu všech řešení vyjádřit jakožto uspořádanou trojici čísel $(3 - t - s, s, t)$. Odtud pak lze i rovnou psát parametrické vyjádření uvedené roviny:

$$(x, y, z) = (3 - t - s, s, t) = (3, 0, 0) + t \cdot (-1, 0, 1) + s \cdot (-1, 1, 0) ;$$

zde $(3, 0, 0)$ je jeden z bodů roviny a vektory $(-1, 0, 1)$, $(-1, 1, 0)$ jsou dva nerovnoběžné vektory ležící v této rovině. Takovéto vyjádření není samozřejmě opět nikterak jednoznačné.

(e) U soustav majících nekonečně mnoho řešení není vždy možné „parametrizovat" jakoukoli neznámou, jako tomu bylo v příkladech uvedených výše. Kupříkladu u soustavy

$$\begin{aligned} x \qquad &= 1 , \\ y + z &= 2 \end{aligned}$$

je možné položit $y = t$ nebo $z = t$, nikoliv ale $x = t$, neboť hodnota této neznámé musí být rovna jedné. Nekonečně mnoho existujících řešení dané soustavy pak vyjádříme v příslušném tvaru $(1, t, 2 - t)$ nebo $(1, 2 - t, t)$, kde $t \in \mathcal{R}$.

(f) Vyřešení soustavy tří rovnic o třech neznámých

$$\begin{aligned} x + y + z &= 3 , \\ -2x - y + 3z &= 2 , \\ -x + 3y + 2z &= -5 \end{aligned}$$

můžeme (z pozice analytické geometrie v prostoru) interpretovat jako nalezení všech společných bodů tří rovin. (V našem případě, kdy první a druhá rovnice popisují nerovnoběžné roviny protínající se v jedné přímce, pak můžeme na řešení zadané soustavy nahlížet i jako na hledání společného bodu přímky a roviny v prostoru.)
Jakým způsobem se dají tyto společné body najít, či jak se dá případně zjistit, že neexistují? Opět je možné použít ze střední školy známé metody dosazovací. Z první rovnice vyjádříme např. $x = 3 - y - z$ a dosadíme do rovnic zbylých:

$$\begin{aligned} -2(3 - y - z) - y + 3z &= 2 , \\ -(3 - y - z) + 3y + 2z &= -5 , \end{aligned}$$

což upravíme na tvar

$$\begin{aligned} y + 5z &= 8 , \\ 4y + 3z &= -2 . \end{aligned}$$

Tím jsme soustavu tří rovnic pro tři neznámé zredukovali na soustavu již jen dvou rovnic pro dvě neznámé. Vyjádříme-li opět z první rovnice této nové soustavy $y = 8 - 5z$ a dosadíme do druhé rovnice, máme

$$\begin{aligned} 4(8 - 5z) + 3z &= -2 , \\ \text{tj.} \qquad - 17z &= -34 , \\ \text{a tudíž} \qquad z &= 2 . \end{aligned}$$

Dopočtením $y = 8 - 5 \cdot 2 = -2$ a $x = 3 - (-2) - 2 = 3$ najdeme jediné řešení zadané soustavy, uspořádanou trojici čísel $(3, -2, 2)$.

Analogickým postupem by pak šlo jistě postupovat i při řešení soustav o větším počtu rovnic i neznámých. Nicméně v těchto případech se předvedená metoda může ukázat jako poněkud nepřehledná. Redukci počtu rovnic (a eliminaci neznámých v nich) při řešení takových soustav je pak lépe realizovat postupem, který se nazývá ***Gaussova eliminace*** — ve své podstatě je to ale jen elegantnější a zejména, jak již bylo naznačeno, systematičtější forma dosazovací metody.

1.2 Gaussova eliminační metoda

Principem Gaussovy eliminace je převedení zadané soustavy lineárních rovnic na soustavu, která má stejnou množinu řešení jako soustava původní a tvar, ze kterého je možno její řešení jednoduše zjistit či případně konstatovat, že žádné neexistuje.

Takovou „cílovou" soustavou může být například soustava v tzv. stupňovém tvaru — tj. soustava, zhruba řečeno, jejíž rovnice mají tu vlastnost, že každá následující má odleva alespoň jeden nulový koeficient navíc (oproti rovnici předcházející). Tak například soustava

$$\begin{aligned} 2x + 3y \phantom{{}+3z} &= 8 , \\ 2y + 3z &= 13 , \\ 2z &= 6 \end{aligned} \tag{2}$$

má stupňový tvar, soustavy

$$\begin{aligned} 2x + y &= 5 , \\ x - y &= 2 , \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} 3x + y + z &= 2 , \\ z &= 3 , \\ 2y - z &= 2 \end{aligned}$$

tento tvar nemají (ale posledně uvedenou můžeme na tento tvar převést pouhou záměnou pořadí rovnic — prohozením druhé a třetí).

Jediné řešení soustavy (2) — trojici čísel $(1, 2, 3)$ — pak zjistíme tak, že z poslední rovnice vypočtenou hodnotu neznámé z dosadíme do rovnice druhé, odkud spočítáme hodnotu y, kterou pak použijeme v první rovnici pro dopočtení neznámé x.

Jakoukoliv soustavu lineárních rovnic můžeme převést na jinou soustavu, aniž změníme množinu řešení, následujícími úpravami:

— libovolným pozměněním pořadí rovnic v soustavě;

— vynásobením libovolné rovnice v soustavě (tj. všech jejích koeficientů i pravé strany) jakýmkoli nenulovým(!) číslem;

— přičtením jakéhokoliv násobku libovolné rovnice k rovnici jiné (přičtení rovnice k rovnici znamená sečíst jejich levé i pravé strany).

Za pomoci těchto ***elementárních úprav*** potom také dokážeme každou soustavu lineárních rovnic převést na stupňový tvar.

Příklady.

(a) Soustavu
$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 2 , \\ 2x - y - 2z &= 2 , \\ -3x + 4y + z &= 4 \end{aligned}$$

můžeme řešit Gaussovou eliminací například takto:

první rovnici vynásobenou -2 přičteme k rovnici druhé, dostáváme
$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 2 , \\ - 5y - 8z &= -2 , \\ -3x + 4y + z &= 4 ; \end{aligned}$$

dále první rovnici vynásobenou třemi přičteme k rovnici třetí, což dává
$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 2 , \\ - 5y - 8z &= -2 , \\ 10y + 10z &= 10 . \end{aligned}$$

Nyní stačí již jen přičíst ke třetí rovnici dvojnásobek rovnice druhé a získáme soustavu, která má stejnou množinu řešení jako soustava původní a má již stupňový tvar:

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 2 \ , \\ - 5y - 8z &= -2 \ , \\ - 6z &= 6 \ . \end{aligned}$$

Odtud $z = -1$. Po dosazení do druhé rovnice máme $-5y+8 = -2$, tedy $y = 2$, a posléze z první rovnice $x + 4 - 3 = 2$ dopočteme $x = 1$. Jediným řešením zadané soustavy je tak trojice čísel $(1, 2, -1)$.

(b) Upravujme na stupňový tvar soustavu

$$\begin{aligned} x + 2y - z &= 1 \ , \\ 3x + 6y + z &= 7 \ . \end{aligned}$$

První rovnici vynásobenou -3 přičítáme ke druhé rovnici:

$$\begin{aligned} x + 2y - z &= 1 \ , \\ 4z &= 4 \ . \end{aligned}$$

Odtud $z = 1$. Neznámé x a y pak musí splňovat (první) rovnici $x + 2y = 2$, což vede k nekonečně mnoha řešením zadané soustavy, která lze vyjádřit např. vztahem $(x, y, z) = (2 - 2t, t, 1), t \in \mathcal{R}$.

(c) Použijme postup Gaussovy eliminace na soustavu

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= 0 \ , \\ 2x - y + 2z &= 3 \ , \\ 5x + 5y - 7z &= 3 \ . \end{aligned}$$

Opět pomocí vhodného násobku první rovnice upravujeme rovnici druhou a třetí:

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= 0 \ , \\ - 5y + 8z &= 3 \ , \\ - 5y + 8z &= 3 \ . \end{aligned}$$

Po odečtení druhé rovnice od třetí získáme stupňový tvar:

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= 0 \ , \\ - 5y + 8z &= 3 \ , \\ 0 &= 0 \ . \end{aligned}$$

Máme tak jen dvě rovnice pro tři neznámé. „Parametrizací“ $z = t \in \mathcal{R}$, výpočtem $y = \frac{8}{5}t - \frac{3}{5}$ z druhé rovnice a $x = 3t + \frac{6}{5} - \frac{16}{5}t = -\frac{1}{5}t + \frac{6}{5}$ z rovnice první dostáváme všechna (a je jich tedy nekonečně mnoho) řešení zadané soustavy ve tvaru

$$\left(\tfrac{6}{5} - \tfrac{1}{5}t, -\tfrac{3}{5} + \tfrac{8}{5}t, t\right) \ , \ t \in \mathcal{R} \ .$$

(d) Jak se pozná, že soustava lineárních rovnic naopak nemá žádné řešení? Upravujme soustavu

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= 0 \ , \\ 2x - y + 2z &= 3 \ , \\ 5x + 5y - 7z &= 4 \ . \end{aligned}$$

Postupně dostáváme:

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= 0 \ , \\ - 5y + 8z &= 3 \ , \\ - 5y + 8z &= 4 \ ; \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} x + 2y - 3z &= 0 \ , \\ - 5y + 8z &= 3 \ , \\ 0 &= 1 \ . \end{aligned}$$

Třetí rovnice této soustavy nemůže být splněna nikdy (ať jsou hodnoty x, y, z jakékoliv), a tudíž nemá řešení ani soustava původní.

Z hlediska existence řešení soustavy lineárních rovnic se tedy jako klíčová jeví poslední rovnice soustavy ve stupňovém tvaru. Jestliže ji dostaneme ve tvaru $0 = 1$ (nebo obecně nula = nenulové číslo), soustava řešení nemá.

V případě opačném pak řešení soustavy rovnic existovat bude — a o jeho jednoznačnosti se dá tvrdit následující: označme n počet neznámých soustavy a p počet rovnic vystupujících ve stupňovém tvaru (rovnice tvaru $0 = 0$ sem nezapočítáváme);

pro $n = p$ existuje právě jedno řešení uvažované soustavy,

pro $n > p$ je řešení nekonečně mnoho, a to tolik, kolik je prvků v množině $\mathcal{R}^{n-p}$.

(Případ $n < p$ přitom nastat nemůže.)

Právě uvedené konstatování se pokusíme v následujícím textu poněkud precizovat — tzn. zavedeme některé matematické pojmy, které umožňují tvrzení o existenci a jednoznačnosti řešení soustav lineárních rovnic přesně formulovat (a také dokázat).

Stojí za povšimnutí, že při provádění Gaussovy eliminace se upravují pouze koeficienty a pravé strany v jednotlivých rovnicích, zatímco označení proměnných se nemění, a stále se jen opisují. Pro zkrácení zápisu řešení soustavy je tak možno používat Gaussovy eliminace „jen na koeficienty soustavy a pravé strany“.

Příklad.

Řešme soustavu

$$\begin{aligned} 2x + 3y \phantom{{}+2z} + 2w &= 3\ ,\\ 3x - y + 2z - w &= 1\ ,\\ -2x - 3y - 3z + 4w &= -6\ ,\\ 5x + 2y + 4z + 2w &= 1\ . \end{aligned}$$

Tuto soustavu můžeme reprezentovat schématem

$$\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 0 & 2 & 3\\ 3 & -1 & 2 & -1 & 1\\ -2 & -3 & -3 & 4 & -6\\ 5 & 2 & 4 & 2 & 1 \end{array}\ ,$$

ve kterém každý řádek představuje jednu rovnici a svislá čára slouží k oddělení koeficientů soustavy od pravých stran. Zápis postupu Gaussovy eliminace pak bude:

$$\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 0 & 2 & 3\\ 0 & 11 & -4 & 8 & 7\\ 0 & 0 & -3 & 6 & -3\\ 0 & 11 & -8 & 6 & 13 \end{array}\ .$$

Zde jsme, abychom se vyhnuli počítání se zlomky, nejprve druhou rovnici (tj. druhý řádek) vynásobili -2 a poté k ní přičetli trojnásobek rovnice první. Podobně jsme k poslednímu řádku vynásobenému -2 přičetli pětinásobek prvního řádku. Dále je:

$$\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 0 & 2 & 3\\ 0 & 11 & -4 & 8 & 7\\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1\\ 0 & 0 & -4 & -2 & 6 \end{array}\ , \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 0 & 2 & 3\\ 0 & 11 & -4 & 8 & 7\\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 0 & -10 & 10 \end{array}\ .$$

Odtud pak snadno (víme-li, co tyto řádky reprezentují) dostaneme jediné existující řešení zadané soustavy — čtveřici čísel $(1, 1, -1, -1)$.

Poznámka.
Pro zjednodušení počítání při Gaussově eliminaci může být někdy výhodné měnit pořadí nejen řádků v uvedeném schématu (tj. rovnic v soustavě), ale i sloupců koeficientů — avšak pouze těch, které vystupují nalevo od svislé čáry (sloupec pravých stran tu má specifické postavení). Tato změna pořadí sloupců pak odpovídá změně pořadí členů s neznámými na levých stranách rovnic (např. $2x-3y+z=2 \rightarrow z-3y+2x=2$). Na tento fakt potom nesmíme zapomenout při výpočtu konkrétních hodnot řešení (neznámých) ze stupňového tvaru.

1.3 Matice

V předcházejícím oddílu jsme koeficienty soustavy rovnic uspořádali do schématu sestávajícího z řádků a sloupců. Takovýmto objektům se v matematice říká ***matice***.

V následujícím textu soustředíme svoji pozornost výhradně na matice reálných čísel (i když jistý význam mají např. také matice, jejichž prvky jsou polynomy nebo jiné funkce apod.).

Definice. ***Maticí*** *A typu $m \times n$ budeme nazývat objekt tvořený $m \cdot n$ (reálnými) čísly uspořádanými do m řádků a n sloupců (je $m, n \in \mathcal{N}$):*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij}) \ , \quad i = 1, 2, \dots, m; \ j = 1, 2, \dots, n \, .$$

Matice budeme značit velkými písmeny, jejich prvky písmeny malými — a_{ij} přitom znamená, že prvek se nachází v i-tém řádku a j-tém sloupci matice A.

Je-li $m = n$, říkáme, že A je ***čtvercová matice*** řádu n.

Prvky $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{44}, \dots$ jsou prvky tzv. ***hlavní diagonály*** matice A (u matice, která není čtvercová, tak hlavní diagonála nekončí prvkem umístěným v „pravém dolním rohu" matice).

Matici, která má „pod hlavní diagonálou" jen nulové prvky (tj. $0 = a_{21} = a_{31} = a_{32} = a_{41} = a_{42} = a_{43} = \dots$), nazýváme ***horní trojúhelníkovou maticí.***

Horní trojúhelníkovou matici, která má tu vlastnost, že každý její následující řádek má (oproti řádku předchozímu) odleva alespoň o jeden nulový prvek více, budeme nazývat ***horní trojúhelníkovou maticí ve stupňovém tvaru.***

Nulovou maticí máme na mysli matici, jejíž všechny prvky jsou rovny nule.

Diagonální matice je taková, která má nulové všechny prvky neležící na hlavní diagonále. Čtvercová diagonální matice, jejíž diagonální prvky jsou vesměs rovny jedné, se nazývá ***matice jednotková.***

Je-li $m = 1$ (resp. $n = 1$), hovoříme místo o matici o ***řádkovém*** (resp. ***sloupcovém***) ***vektoru*** — to ale není nic jiného, než uspořádaná n-tice (resp. m-tice) reálných čísel, neboli prvek prostoru $\mathcal{R}^n$ (resp. $\mathcal{R}^m$).