7.5 Vlastní čísla a vlastní vektory

Nechť A je čtvercová matice n-tého řádu s reálnými prvky. Zajímá nás, které nenulové vektory z $\mathcal{R}^n$ se při zobrazení reprezentovaném touto maticí zobrazí samy na sebe nebo na svůj násobek. Hledáme tedy nenulové řešení rovnice $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$, kde vektor $\vec{x} \in \mathcal{R}^n$ je neznámou, ale neznámé je i číslo λ.

Pokud takové λ a $\vec{x} \neq \vec{o}$ existují, nazývá se λ ***vlastním číslem*** matice A a $\vec{x}$ ***vlastním vektorem***, jenž přísluší vlastnímu číslu λ.

Poznámky.

(i) Místo přívlastku vlastní se ekvivalentně užívá termínu ***charakteristický***.

(ii) Pokud vlastní vektor existuje, není určen jednoznačně: každý nenulový násobek tohoto vektoru je rovněž vlastním vektorem. Je totiž: $A(k\vec{x}) = kA\vec{x} = k\lambda\vec{x} = \lambda(k\vec{x})$.

(iii) Vlastních čísel lze využít v různých partiích matematiky — například i při řešení soustav diferenciálních rovnic.

Jak vlastní čísla dané matice A (čtvercové n-tého řádu) najít?

Rovnost $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ je totožná se vztahem $A\vec{x} - \lambda\vec{x} = \vec{o}$. Značí-li I jednotkovou matici (n-tého řádu), je $\vec{x} = I\vec{x}$, a můžeme dále psát

$$A\vec{x} - \lambda I\vec{x} = \vec{o}\,,$$

což využitím distributivního zákona dává

$$(A - \lambda I)\vec{x} = \vec{o}\,.$$

Má-li být nyní $\vec{x}$ nenulovým vektorem, který odvozenou rovnici řeší, musí být nutně matice $A - \lambda I$ singulární (v opačném případě, při regulární matici $A - \lambda I$, by existovalo jen řešení triviální). Neboli musí platit, že $\det(A - \lambda I) = 0$. A to je podmínka, která umožňuje vlastní čísla stanovit.

Poznámky.

(i) Matice $A - \lambda I$ vznikne z matice A tak, že od všech prvků na její hlavní diagonále odečteme λ.

(ii) Nula je vlastním číslem matice právě tehdy, když se jedná o matici singulární.

Příklady.

(a) Uvažujme singulární matici $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Je $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -(1-\lambda)\lambda$.
Řešením rovnice $-(1-\lambda)\lambda = 0$ pak získáme dvě vlastní čísla: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$.

(b) Pro jednotkovou matici $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ máme: $\det(A_1 - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2$.
V tomto případě existuje jediné vlastní číslo $\lambda = 1$.

(c) Pokud $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, dostáváme: $\det(A_2 - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2$. Opět existuje jediné vlastní číslo $\lambda = 1$.

(d) Pro $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ je $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 4 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-1-\lambda) - 8 = \lambda^2 - 9$.
Řešení rovnice $\lambda^2 - 9 = 0$ nás přivede ke dvěma vlastním číslům: $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -3$.

(e) Jestliže $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, bude $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1$. Vlastními čísly této matice, kořeny rovnice $\lambda^2 + 1 = 0$, jsou tedy čísla komplexní: $\lambda_1 = \mathrm{i}$, $\lambda_2 = -\mathrm{i}$.

Jak je z uvedených příkladů patrné, hledat vlastní čísla matice druhého řádu znamená v konečné fázi řešit kvadratickou rovnici — výraz $\det(A - \lambda I)$, jejž pokládáme rovný nule, je v tomto případě polynomem druhého stupně.

Zřejmé je pak i to, že mohou nastat všechny tři kvalitativně odlišné možnosti, pokud se řešení této kvadratické rovnice týče: existence dvou různých reálných kořenů, existence jediného reálného dvojnásobného kořene, existence dvou kořenů komplexně sdružených.

Pokud je matice A obecně n-tého řádu, lze správně usoudit, že výpočtem determinantu matice $A - \lambda I$ obdržíme polynom stupně n-tého. Nazývá se ***charakteristickým polynomem***, a zjistit vlastní čísla matice n-tého řádu tak obnáší nalézt kořeny tohoto polynomu (což pro $n > 2$ může být dosti nesnadné až nemožné).

Příklad.

Hledejme vlastní čísla matice $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

Spočtěme příslušný determinant:

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & -1 & -2 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 4 & 3 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)(2-\lambda)(5-\lambda) + 8(2-\lambda) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6.$$

Díky tomu, že jeden kořen tohoto charakteristického polynomu třetího stupně dokážeme uhádnout ($\lambda_1 = 1$), jsme schopni kubickou rovnici $-\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6 = 0$ vytknutím kořenového činitele $(\lambda - 1)$ vyřešit:

$$\begin{aligned} (\lambda-1)(-\lambda^2+5\lambda-6) &= 0\,, \\ (\lambda-1)(-\lambda+2)(\lambda-3) &= 0\,. \end{aligned}$$

Daná matice A tak má tři různá reálná vlastní čísla: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$.

Řešíme-li rovnici $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$, kde A je matice reálných čísel a vlastní číslo λ je komplexní, je jasné, že k takovému vlastnímu číslu nemůže v $\mathcal{R}^n$ vlastní vektor existovat. To je případ matice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ s vlastními čísly $\lambda_{1,2} = \pm\mathrm{i}$.

Geometricky uvedená matice představuje otočení roviny kolem počátku o úhel $\varphi = \frac{\pi}{2}$, neboť je $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{2} & -\sin\frac{\pi}{2} \\ \sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} \end{pmatrix}$. A při takovémto zobrazení se skutečně žádný nenulový vektor z $\mathcal{R}^2$ na svůj násobek nezobrazuje.

Rozeberme nyní z hlediska existence vlastních vektorů v příkladech výše uvedené matice $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ a $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Obě mají jediné vlastní číslo $\lambda = 1$, jež je dvojnásobným kořenem charakteristických polynomů obou matic. Zatímco pro matici A_1 platí, že jejím vlastním vektorem příslušným tomuto vlastnímu číslu je jakýkoliv nenulový prvek z $\mathcal{R}^2$ (matice A_1 je totiž jednotková, a rovnost $A_1\vec{x} = \lambda\vec{x}$, tj. $I\vec{x} = 1\cdot\vec{x}$, splňují skutečně všechny vektory $\vec{x} \in \mathcal{R}^2$), u matice A_2 tomu tak není.

Vlastní vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \neq \vec{o}$ v tomto případě vyhovuje rovnici $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, tedy

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= x_1 \quad , \\ x_2 &= x_2 \quad , \end{aligned}$$

kde $x_1, x_2 \in \mathcal{R}$ jsou souřadnice hledaného vektoru.

Z první rovnice vyplývá, že $x_2 = 0$, zatímco vektor x_1 může nabývat libovolné (v našem případě však nenulové) hodnoty. Soustava tak má nekonečně mnoho řešení, jež jsou tvaru $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, kde $t \in \mathcal{R}$, $t \neq 0$. Pomineme-li nenulový t-násobek, má matice A_2 pouze jediný vlastní vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. A to je oproti matici A_1 podstatný rozdíl.

Z uvedených příkladů lze nabýt (vcelku oprávněně) dojem, že problematika vlastních čísel a vektorů reálných matic není v obecném případě (navíc při zvyšujícím se řádu matice) úplně jednoduchá.

Jednak nedokážeme vždy nalézt kořeny charakteristického polynomu. Situaci pak dále komplikuje existence komplexních a vícenásobných kořenů tohoto polynomu, kdy i při totožném charakteristickém polynomu různých matic mohou být příslušné vlastní vektory rozdílné.

Při hledání vlastních vektorů se tak z důvodu jednoduchosti omezíme nadále na případy, kdy charakteristický polynom má pouze reálné jednonásobné kořeny — pro matici n-tého řádu je jich pak nutně n.

Tehdy platí, že ke každému z vlastních (navzájem různých) čísel $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ existuje (až na nenulový násobek) právě jeden vlastní vektor. Množina těchto vlastních vektorů $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n\}$ je přitom navíc lineárně nezávislá, a jedná se tak o bázi prostoru $\mathcal{R}^n$.

Zmíněné vlastní vektory $\vec{x}_i, i = 1, 2, \ldots, n$, pak hledáme jako řešení maticové rovnice

$$A\vec{x}_i = \lambda_i \vec{x}_i \quad \text{či ekvivalentně zapsáno} \quad (A - \lambda_i I)\vec{x}_i = \vec{o}.$$

Zde je matice soustavy $A - \lambda_i I$ samozřejmě singulární maticí s hodností rovnou $n - 1$ (a stejnou hodnost má i rozšířená matice soustavy, neboť se jedná o homogenní soustavu lineárních rovnic).

Příklady.

(a) Pro matici $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ jsme dříve ukázali, že její vlastní čísla jsou $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -3$.

Určeme nejprve vlastní vektor $\vec{x}_1$ příslušný vlastnímu číslu $\lambda_1 = 3$.

Řešme soustavu

$$\begin{pmatrix} 1-3 & 2 \\ 4 & -1-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} ,$$

kde $x_1, x_2 \in \mathcal{R}$ jsou souřadnice hledaného vlastního vektoru. Po roznásobení dostaneme

$$\begin{aligned} -2x_1 + 2x_2 &= 0 \quad , \\ 4x_1 - 4x_2 &= 0 \quad , \end{aligned}$$

kde druhá rovnice je skutečně násobkem první. Označíme-li $x_2 = t$, $t \in \mathcal{R}$, bude také $x_1 = t$ a řešením uvažované soustavy je uspořádaná dvojice čísel $\begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}$, $t \in \mathcal{R}$.

Vlastním vektorem, jenž přísluší vlastnímu číslu $\lambda_1 = 3$, tak je vektor $\vec{x}_1 = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $t \neq 0$.

Podobně postupujeme i v případě druhého vlastního čísla $\lambda_2 = -3$:
$$\begin{pmatrix} 1+3 & 2 \\ 4 & -1+3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$
tj.
$$\begin{aligned} 4x_1 + 2x_2 &= 0 \quad , \\ 4x_1 + 2x_2 &= 0 \quad . \end{aligned}$$
Řešením soustavy je uspořádaná dvojice čísel $\begin{pmatrix} t \\ -2t \end{pmatrix}$, $t \in \mathcal{R}$, a vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu $\lambda_2 = -3$ má tedy tvar $\vec{x}_2 = t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $t \neq 0$.

(Výsledek nyní můžeme srovnat — co do geometrické interpretace — s příkladem z úvodu odstavce o lineárním zobrazení. Vlastní vektory jsou právě těmi „směry", které se při lineárním zobrazení reprezentovaném uvažovanou maticí zachovávají.)

(b) Najděme vlastní vektory matice $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$, jejíž vlastní čísla jsme zjišťovali výše: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$.

Pro $\lambda_1 = 1$ je
$$A - \lambda_1 I = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 4 \end{pmatrix},$$
a rozšířená matice (homogenní) soustavy $(A - \lambda_1 I)\vec{x}_1 = \vec{o}$ tak má tvar
$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 4 & 0 \end{array}\right).$$
Odsud po přičtení dvojnásobku prvního řádku k řádku třetímu získáváme matici
$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right).$$
To znamená, že pro souřadnice x_1, x_2, x_3 vlastního vektoru $\vec{x}_1$ platí vztahy $x_2 = 0$, $-2x_1 - 2x_3 = 0$. Položíme-li nyní $x_1 = t, t \in \mathcal{R}$, je $x_3 = -t$, a vlastní vektor můžeme zapsat ve tvaru
$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ -t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad t \neq 0.$$
Pro $\lambda_2 = 2$ získáme rozšířenou matici soustavy, kterou je třeba řešit, naprosto analogickým postupem:
$$\left(\begin{array}{ccc|c} -3 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right).$$

Po přičtení čtyřnásobku prvního řádku k trojnásobku řádku třetího dostaneme:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -3 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Souřadnice vlastního vektoru $\vec{x}_2$ musí v tomto případě vyhovovat vztahům $5x_2+x_3=0$, $-3x_1-x_2-2x_3=0$. Položme například $x_2=t, t\in\mathcal{R}$. Pak $x_3=-5t$ a $3x_1=-t+10t$, tj. $x_1=3t$. Vlastní vektor, jenž náleží vlastnímu číslu $\lambda_2=2$, tak má tvar

$$\vec{x}_2=\begin{pmatrix} 3t \\ t \\ -5t \end{pmatrix}=t\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix},\ t\neq 0.$$

Konečně pro $\lambda_3=3$ obdržíme:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -4 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right), \quad \text{tj.} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} -4 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

(ke třetí rovnici jsme zde přičetli rovnici první).

Pro souřadnice vlastního vektoru $\vec{x}_3$ tak máme: $x_2=0$, $-4x_1-x_2-2x_3=0$. Jestliže položíme $x_1=t, t\in\mathcal{R}$, pak $2x_3=-4t$, tj. $x_3=-2t$, a vlastním vektorem, který přísluší vlastnímu číslu $\lambda_3=3$, je vektor

$$\vec{x}_3=\begin{pmatrix} t \\ 0 \\ -2t \end{pmatrix}=t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix},\ t\neq 0.$$

Poznámky.

(i) Pro kontrolu správnosti výpočtu je dobré provést zkoušku. Tak například v předchozím příkladě pro $\lambda_2=2$ a $\vec{x}_2=\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$, volíme-li $t=1$, je

$$A\vec{x}_2=\begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -10 \end{pmatrix},$$

a to je vskutku rovno $\lambda_2\vec{x}_2=2\vec{x}_2$.

(ii) Důslednosti je ovšem třeba již během výpočtu vlastních vektorů. Pokud $A-\lambda I$ není singulární matice (což při následném převodu na stupňový tvar snadno zjistíme), nemůže být uvažované λ vlastním číslem a námi provedený výpočet je chybný.

(iii) Čtvercovou (reálnou) maticí, jejíž vlastní čísla jsou vždy čísla reálná, je jakákoliv matice ***symetrická***. Jedná se o matici, pro kterou je $A=A^T$ (její prvky jsou „symetrické“ podle hlavní diagonály). Jak ale dokládá případ matice jednotkové, jednonásobnými kořeny charakteristického polynomu vlastní čísla symetrické matice být nemusí.