# Kapitola 13

# Lineární diferenciální rovnice druhého řádu

## 13.1 Obecné řešení HLDR

• • •

**Příklady**

**Příklad 13.1.** Nalezněte obecné řešení homogenní rovnice.

a) $y'' + y' - 2y = 0$

b) $y'' - 6y' + 9y = 0$

c) $y'' - 2y' + 2y = 0$

d) $y'' - 4y = 0$

e) $y'' + 4y = 0$

f) $y'' + 4y' = 0$

g) $y'' - 4y' + 4y = 0$

h) $y'' - 6y' + 13y = 0$

*Řešení* 13.1.

a) $y(x) = C_1 \mathrm{e}^{x} + C_2 \mathrm{e}^{-2x}$, $x \in \mathbb{R}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

b) $y(x) = C_1 \mathrm{e}^{3x} + C_2 x \mathrm{e}^{3x}$, $x \in \mathbb{R}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

c) $y(x) = C_1 \mathrm{e}^{x} \cos x + C_2 \mathrm{e}^{x} \sin x$, $x \in \mathbb{R}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

d) $y(x) = C_1 \mathrm{e}^{2x} + C_2 \mathrm{e}^{-2x}$, $x \in \mathbb{R}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

e) $y(x) = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$, $x \in \mathbb{R}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

f) $y(x) = C_1 + C_2 \mathrm{e}^{-4x}$, $x \in \mathbb{R}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

g) $y(x) = C_1 \mathrm{e}^{2x} + C_2 x \mathrm{e}^{2x}$, $x \in \mathbb{R}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

h) $y(x) = C_1 \mathrm{e}^{3x} \cos 2x + C_2 \mathrm{e}^{3x} \sin 2x$, $x \in \mathbb{R}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

**Příklad 13.2.** Nalezněte řešení homogenní rovnice vyhovující daným počátečním podmínkám.

a) $y'' + 4y' + 3y = 0, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 3$

b) $y'' - 4y' + 4y = 0, \quad y(1) = 0,\ y'(1) = \mathrm{e}^2$

c) $y'' + 2y = 0, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 0$

d) $2y' + 3y = 0, \quad y(0) = 4$

*Řešení* 13.2.

a) $y(x) = -2\mathrm{e}^{-3x} + 3\mathrm{e}^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$

b) $y(x) = -\mathrm{e}^{2x} + x\mathrm{e}^{2x}$, $x \in \mathbb{R}$

c) $y(x) = \cos(\sqrt{2}x)$, $x \in \mathbb{R}$

d) $y(x) = 4\mathrm{e}^{-\frac{3x}{2}}$, $x \in \mathbb{R}$

**Příklad 13.3.** Nalezněte řešení homogenní rovnice $y'' + 4y = 0$ vyhovující daným okrajovým podmínkám. (v *případě okrajových podmínek může mít DR 2. řádu nekonečně mnoho řešení*)

a) $y(0) = 1,\ y(\frac{\pi}{4}) = 1$

b) $y(0) = 1,\ y(\frac{\pi}{2}) = 3$

c) $y(0) = 1,\ y(\frac{\pi}{2}) = -1$

d) $y(0) = 0,\ y(\frac{\pi}{4}) = 3$

*Řešení* 13.3.

a) $y(x) = \cos 2x + \sin 2x$, $x \in \mathbb{R}$

b) nemá řešení

c) $y(x) = \cos 2x + C \sin 2x$, $x \in \mathbb{R}$, $C \in \mathbb{R}$

d) $y(x) = 3 \sin 2x$, $x \in \mathbb{R}$

## Bonusové příklady

**Příklad 13.4.** Nalezněte obecné řešení homogenní rovnice vyššího řádu.

a) $y''' - y'' - 2y' = 0$

b) $y^{(iv)} - 2y'' + y = 0$

c) $y^{(iv)} - y = 0$

d) $y''' - 6y'' + 9y' = 0$

*Řešení* 13.4.

a) $y(x) = C_1 + C_2\mathrm{e}^{-x} + C_3\mathrm{e}^{2x},\ x \in \mathbb{R},\ C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$

b) $y(x) = C_1\mathrm{e}^{x} + C_2x\mathrm{e}^{x} + C_3\mathrm{e}^{-x} + C_4x\mathrm{e}^{-x},\ x \in \mathbb{R},\ C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}$

c) $y(x) = C_1\mathrm{e}^{x} + C_2\mathrm{e}^{-x} + C_3\cos x + C_4\sin x,\ x \in \mathbb{R},\ C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}$

d) $y(x) = C_1 + C_2\mathrm{e}^{3x} + C_3x\mathrm{e}^{3x},\ x \in \mathbb{R},\ C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$

**Příklad 13.5.** Určete koeficienty $k_0$, $k_1$, $k_2$, aby funkce $y_1$ a $y_2$ byly řešeními diferenciální rovnice

$$k_0y'' + k_1y' + k_2y = 0$$

a) $y_1(x) = \mathrm{e}^{x},\ y_2(x) = \mathrm{e}^{5x},\ x \in \mathbb{R}$

b) $y_1(x) = \mathrm{e}^{-4x},\ y_2(x) = x\mathrm{e}^{-4x},\ x \in \mathbb{R}$

c) $y_1(x) = \mathrm{e}^{-2x}\cos 2x,\ y_2(x) = \mathrm{e}^{-2x}\sin 2x,\ x \in \mathbb{R}$

*Řešení* 13.5.

a) například $y'' - 6y' + 5y = 0$

b) například $y'' + 8y' + 16y = 0$

c) například $y'' + 4y' + 8y = 0$

• • •

## Příklady

**Příklad 13.6.** Nechť je dána DR $y'' + y' - 6y = f(x)$. Zapište obecný tvar partikulárního řešení $y_p$ pro různé volby pravých stran rovnice $f(x)$.

a) $f(x) = 3x - 1$

b) $f(x) = \mathrm{e}^{2x}(x-1)$

c) $f(x) = \mathrm{e}^{x}\cos x$

d) $f(x) = 5\mathrm{e}^{-3x}\sin 2x$

e) $f(x) = x\sin x$

f) $f(x) = x^2\mathrm{e}^{2x}$

*Řešení* 13.6. $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -3.$

a) $y_p(x) = Ax + B$

b) $y_p(x) = x\mathrm{e}^{2x}(Ax + B)$

c) $y_p(x) = \mathrm{e}^{x}(A\cos x + B\sin x)$

d) $y_p(x) = \mathrm{e}^{-3x}(A\cos 2x + B\sin 2x)$

e) $y_p(x) = (Ax + B)\cos x + (Cx + D)\sin x$

f) $y_p(x) = \mathrm{e}^{2x}(Ax^3 + Bx^2 + Cx)$

**Příklad 13.7.** Nechť je dána DR $y'' - 10y' + 25y = f(x)$. Zapište obecný tvar partikulárního řešení $y_p$ pro různé volby pravých stran rovnice $f(x)$.

a) $f(x) = x + 1$

b) $f(x) = \mathrm{e}^{5x}$

c) $f(x) = \mathrm{e}^{5x}\cos x$

d) $f(x) = x^2\mathrm{e}^{x}$

e) $f(x) = x\mathrm{e}^{5x}$

f) $f(x) = x\sin x$

*Řešení* 13.7. $\lambda_1 = \lambda_2 = 5$

a) $y_p(x) = Ax + B$

b) $y_p(x) = Ax^2\mathrm{e}^{5x}$

c) $y_p(x) = \mathrm{e}^{5x}(A\cos x + B\sin x)$

d) $y_p(x) = \mathrm{e}^{x}(Ax^2 + Bx + C))$

e) $y_p(x) = (Ax^3 + Bx^2)\mathrm{e}^{5x}$

f) $y_p(x) = (Ax + B)\cos x + (Cx + D)\sin x$

**Příklad 13.8.** Nechť je dána DR $y'' - 2y' + 5y = f(x)$. Zapište obecný tvar partikulárního řešení $y_p$ pro různé volby pravých stran rovnice $f(x)$.

a) $f(x) = \mathrm{e}^{x}(x + 2)$

b) $f(x) = x\cos 2x - 2\sin 2x$

c) $f(x) = \mathrm{e}^{x}\cos 2x$

d) $f(x) = x^2 + 1$

e) $f(x) = \mathrm{e}^{x}\sin x$

f) $f(x) = x\mathrm{e}^{2x}$

*Řešení* 13.8. $\lambda_{1,2} = 1 \pm 2i$

a) $y_p(x) = \mathrm{e}^x(Ax + B)$

b) $y_p(x) = (Ax + B)\cos 2x + (Cx + D)\sin 2x$

c) $y_p(x) = x\mathrm{e}^x(A\cos 2x + B\sin 2x)$

d) $y_p(x) = Ax^2 + Bx + C$

e) $y_p(x) = \mathrm{e}^x(A\cos x + B\sin x)$

f) $y_p(x) = \mathrm{e}^{2x}(Ax + B)$

**Příklad 13.9.** Řešte metodou odhadu.

a) $y'' + 6y' + 9y = 4e^x$

b) $y'' - y' = 3x^2 + 1$

c) $y'' - 2y' + 2y = 2x$

d) $y'' - 4y = 2\mathrm{e}^{2x}$

e) $y'' + 9y = 9x + 3$

f) $y'' - 4y' + 3y = 9x^2$

g) $y'' + 4y' + 4y = 2\mathrm{e}^{-2x}$

h) $y'' + y' - 2y = \cos x - 3\sin x$

i) $y'' + y = 4\cos x$

j) $y'' - 2y' + 2y = x\mathrm{e}^{2x}$

*Řešení* 13.9.

a) $y(x) = C_1\mathrm{e}^{-3x} + C_2x\mathrm{e}^{-3x} + \frac{1}{4}e^x,\ x \in \mathbb{R},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

b) $y(x) = C_1 + C_2\mathrm{e}^x - x^3 - 3x^2 - 7x,\ x \in \mathbb{R},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

c) $y(x) = C_1\mathrm{e}^x\cos x + C_2\mathrm{e}^x\sin x + x + 1,\ x \in \mathbb{R},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

d) $y(x) = C_1\mathrm{e}^{2x} + C_2\mathrm{e}^{-2x} + \frac{1}{2}x\mathrm{e}^{2x},\ x \in \mathbb{R},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

e) $y(x) = C_1\cos 3x + C_2\sin 3x + x + \frac{1}{3},\ x \in \mathbb{R},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

f) $y(x) = C_1\mathrm{e}^x + C_2\mathrm{e}^{3x} + 3x^2 + 8x + \frac{26}{3},\ x \in \mathbb{R},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

g) $y(x) = \mathrm{e}^{-2x}(C_1 + C_2x + x^2),\ x \in \mathbb{R},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

h) $y(x) = C_1\mathrm{e}^x + C_2\mathrm{e}^{-2x} + \sin x,\ x \in \mathbb{R},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

i) $y(x) = C_1\cos x + C_2\sin x + 2x\sin x,\ x \in \mathbb{R},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

j) $y(x) = C_1\mathrm{e}^x\sin x + C_2\mathrm{e}^x\sin x + \frac{1}{2}x\mathrm{e}^{2x} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x},\ x \in \mathbb{R},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

**Příklad 13.10.** Následující DR s počáteční podmínkou vyřešte metodou odhadu.

a) $y'' - 2y' = 4x,\ y(0) = 3,\ y'(0) = 1$

b) $y'' - 2y' + y = \cos x,\ y(0) = 2,\ y'(0) = \frac{5}{2}$

c) $y'' + 4y = 16x^2,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 2$

d) $y'' - y' - 2y = 2\mathrm{e}^x,\ y(0) = 3,\ y'(0) = 1$

e) $y'' - 2y' + y = 4\mathrm{e}^x,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 2$

f) $y'' + y = x^2,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 2$

*Řešení* 13.10.

a) $y(x) = \mathrm{e}^{2x} + 2 - x^2 - x,\ x \in \mathbb{R}$

b) $y(x) = \mathrm{e}^{x}(x+2) - \frac{\sin x}{2},\ x \in \mathbb{R}$

c) $y(x) = 2\cos 2x + \sin 2x + 4x^2 - 2,\ x \in \mathbb{R}$

d) $y(x) = 2\mathrm{e}^{-x} + 2\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{x},\ x \in \mathbb{R}$

e) $y(x) = 2x\mathrm{e}^{x} + 2x^2\mathrm{e}^{x},\ x \in \mathbb{R}$

f) $y(x) = 3\cos x + 2\sin x + x^2 - 2,\ x \in \mathbb{R}$

**Příklad 13.11. Metoda modifikace odhadu:** Řešte metodou modifikace odhadu.

a) $y'' - 3y' + 2y = 2x - \mathrm{e}^{x}$

b) $y'' + y = 8\cos\frac{x}{3} - 2\mathrm{e}^{-x}$

c) $y'' - 2y' + y = x^2 + 1 + \mathrm{e}^{x}$

*Řešení* 13.11.

a) $y(x) = C_1\mathrm{e}^{x} + C_2\mathrm{e}^{2x} + x + \frac{3}{2} + x\mathrm{e}^{x},\ x \in \mathbb{R},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

b) $y(x) = C_1\cos x + C_2\sin x + 9\cos\frac{x}{3} - \mathrm{e}^{-x},\ x \in \mathbb{R},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

c) $y(x) = \left(C_1 + C_2 x + \frac{x^2}{2}\right)\mathrm{e}^{x} + x^2 + 4x + 7,\ x \in \mathbb{R},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

**Příklad 13.12. Metoda snížení řádu:** Řešte metodou snížení řádu.

a) $y''' + 5y'' + 4y' = 8x - 2$

b) $y''' + y' = 4\mathrm{e}^{x},\ y(0) = 1,\ y'(0) = 1,\ y''(0) = 0$

c) $xy'' - y' = x^2\mathrm{e}^{x}$

d) $y'' + \frac{y'}{x} = 4x^2,\ y(1) = 1,\ y'(1) = 3$

*Řešení* 13.12.

a) $y(x) = C_1\mathrm{e}^{-x} + C_2\mathrm{e}^{-4x} + x^2 - 3x + C_3,\ x \in \mathbb{R},\ C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$

b) $y(x) = 2\cos x - \sin x + 2\mathrm{e}^{x} - 3,\ x \in \mathbb{R}$

c) $y(x) = C_1 x^2 + (x-1)\mathrm{e}^{x} + C_2,\ x \in \mathbb{R},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

d) $y(x) = 2\ln x + \frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{4},\ x \in (0, \infty)$