3. DIFERENCIÁLNÍ POČET FUNKCÍ JEDNÉ PROMĚNNÉ

Tématem této kapitoly bude seznámit se s metodami, které (kromě jiného) umožňují vyšetřovat vlastnosti funkcí jedné reálné proměnné. Klíčovým nástrojem při těchto postupech bude derivování, a zcela základním pojmem, ze kterého i derivace vychází, limita.

3.1 Vlastní limity

Limita funkce, zhruba řečeno, vypovídá o tom, jak se funkce chová v „nejbližším okolí“ daného bodu (případně pro hodnoty nezávisle proměnné rostoucí nade všechny meze, resp. klesající pod jakoukoli mez). Je to tedy (v jistém smyslu) větší informace, než jen znalost funkční hodnoty v tomto bodě — ta nám totiž o tom, jak se funkce chová jinde, neříká zcela nic.

V dalším textu budeme používat následující pojmy:

— ***okolím bodu*** $a \in \mathcal{R}$ budeme rozumět jakýkoliv otevřený interval, který tento bod obsahuje;

— ***epsilonovým okolím*** bodu a ($\varepsilon > 0$) pak interval $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) = U_\varepsilon(a)$;

— ***prstencovým okolím*** bodu a budeme nazývat okolí bodu a bez tohoto bodu;

— ***prstencové δ-okolí*** bodu a tudíž bude množina $P_\delta(a) = (a - \delta, a) \cup (a, a + \delta), \delta > 0$.

Funkcí v této kapitole budeme rozumět reálnou funkci jedné reálné proměnné.

Definice. *Nechť f je definována na jistém prstencovém okolí bodu $a \in \mathcal{R}$. Říkáme, že funkce f má v bodě a* ***limitu*** *$A \in \mathcal{R}$, platí-li:*

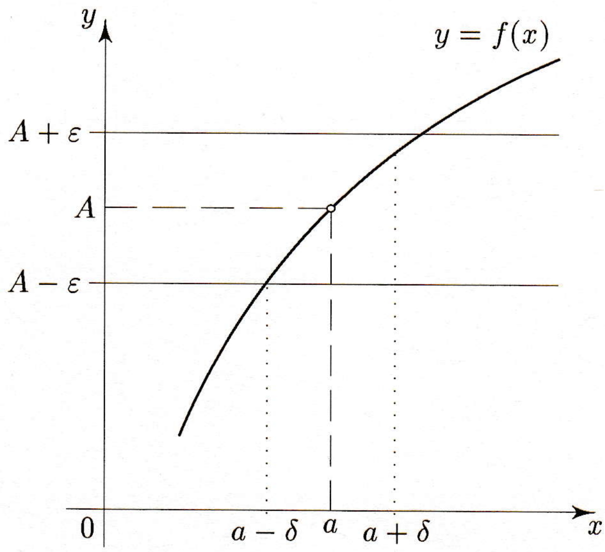
$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \textit{tak, že} \ \forall x \in P_\delta(a) \ \textit{je} \ f(x) \in U_\varepsilon(A) \,.$$

Tuto skutečnost značíme zápisem $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$.

Poznámky.

(i) Někdy se místo zápisu $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ užívá zápisu $x \to a \implies f(x) \to A$, který tak možná lépe vystihuje to, oč v definici limity běží.
Znamená totiž, že funkce f má v a limitu A, jestliže platí: „blížíme-li" se s proměnnou x do bodu a, pak se funkční hodnoty $f(x)$ „přibližují" číslu A.
A právě tento fakt „přibližování" v uvedené (tzv. epsilon-delta) definici pomáhá realizovat obecný ($\forall$) a existenční ($\exists$) kvantifikátor.

(ii) Funkce f má v a limitu A, platí-li: ať zvolíme ε sebemenší (ale kladné), musíme být schopni nalézt číslo $\delta > 0$ tak, že funkční hodnoty všech bodů x z množiny $(a-\delta, a) \cup (a, a+\delta)$ budou splňovat relaci $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$.
Podstatné přitom je to, že takové δ musíme dokázat najít (tj. $\exists\delta$), ať je ε jakékoliv (tj. $\forall\varepsilon$) — tedy zejména ať je ε jakkoli malé.
V obecném případě tak, jestliže platí $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, ke zmenšenému ε nacházíme i menší δ, čímž se právě v poznámce (i) zmíněný proces „přibližování" uskutečňuje.



(iii) V definici limity vystupuje $P_\delta(a) = (a-\delta, a) \cup (a, a+\delta)$, tedy prstencové δ-okolí bodu a: existence (a její hodnota) či neexistence limity funkce tak vůbec nezávisí na tom, jaká je funkční hodnota $f(a)$ v samotném bodě a — funkce v tomto bodě dokonce nemusí být definována vůbec. Důležité je tedy pouze to (z hlediska limity), jak se funkce chová v „blízkém" (prstencovém) okolí tohoto bodu.

(iv) Zápis $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ znamená jednak, že limita existuje, jednak, že je rovna A. Pokud totiž tato limita existuje, pak existuje jediná (tj. číslo $A \in \mathcal{R}$ je určeno jednoznačně).

(v) Limitu $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ pro $a, A \in \mathcal{R}$ nazýváme vlastní limitou (tj. A) ve vlastním bodě (tj. a).

Příklady.

(a) Buď $f(x) = x^2, a = 0$. Je $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$, neboť pro hodnoty x „málo se lišící" od nuly se od nuly bude o „málo lišit" i jejich funkční hodnota x^2.
Nicméně, jak tuto skutečnost prokázat s ohledem na uvedenou definici?
Mějme $\varepsilon > 0$. To, co máme udělat, je najít kladné δ takové, aby pro $x \in (-\delta, 0) \cup (0, \delta)$ bylo $-\varepsilon < x^2 < \varepsilon$. Zde ale zcela jistě stačí vzít $\delta = \sqrt{\varepsilon}$, neboť platí:

$$-\sqrt{\varepsilon} < x < \sqrt{\varepsilon} \implies x^2 < \left(\sqrt{\varepsilon}\right)^2 = \varepsilon \,.$$

Předepíše-li nám nyní někdo jakékoliv jiné ε, dokážeme najít (případně) jiné δ ($=\sqrt{\varepsilon}$ nebo třeba menší) takové, aby implikace v definici limity zůstala v platnosti.
Dokážeme-li toto pro libovolné ε (a to jsme právě předvedli), je tudíž dle definice $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$.

(b) Funkce $\operatorname{sgn}(x)$ má limitu v jakémkoliv bodě různém od nuly. Například pro $a = 3$ je $\lim\limits_{x\to 3} \operatorname{sgn}(x) = 1$. Ať je totiž $\varepsilon > 0$ jakékoliv, existuje kupříkladu $\delta = 1$ tak, že pro $x \in (3-\delta, 3+\delta) = (2,4), x \neq 3$, je $|f(x) - 1| = |1-1| = 0 < \varepsilon$.
V bodě $a = 0$ však funkce $\operatorname{sgn}(x)$ limitu nemá. V každém prstencovém okolí nuly totiž existují body, ve kterých funkce nabývá hodnoty 1, ale také body, v nichž nabývá hodnoty -1. K žádnému (jedinému) číslu se tedy tyto hodnoty nepřibližují.

(c) Aby funkce f v bodě a neměla limitu A, stačí ověřit platnost negace výroku z definice limity. Touto negací je

$$\exists\, \varepsilon > 0 \ \forall\, \delta > 0 \ \exists\, x \in (a-\delta, a) \cup (a, a+\delta) \text{ takové, že } |f(x) - A| > \varepsilon\,.$$

(Povšimněme si, že negováním se obecný kvantifikátor mění na existenční a naopak a negací výroku $V_1 \Rightarrow V_2$ je výrok $V_1 \wedge (\neg V_2)$ — symbol $\neg V_2$ zde značí negaci výroku V_2, čteme *non* V_2.)
Proč tedy neplatí např. $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sgn}(x) = 1$?
Existuje kupř. $\varepsilon = \frac{1}{2}$, že pro jakékoliv $\delta > 0$ najdeme v množině $(-\delta, 0) \cup (0, \delta)$ bod, ve kterém se funkční hodnota liší od jedné o více než $\frac{1}{2}$ — takovým bodem je třeba $x = -\frac{1}{2}\delta$ s funkční hodnotou rovnou -1.

Nahradíme-li v definici limity množinu $P_\delta(a)$ intervalem $(a, a+\delta)$, hovoříme o ***limitě*** funkce f v bodě a ***zprava*** a značíme $\lim\limits_{x\to a+} f(x)$.
Interval $(a, a+\delta)$ nazýváme pravým prstencovým δ-okolím bodu a.
Analogicky: budeme-li v definici limity uvažovat naopak jenom body z levého prstencového δ-okolí bodu a (tj. z množiny $(a-\delta, a)$), hovoříme o ***limitě*** funkce f v bodě a ***zleva*** a značíme $\lim\limits_{x\to a-} f(x)$.
K tomu, abychom mohli o existenci limity funkce f v bodě a zprava, resp. zleva vůbec uvažovat, je samozřejmě nutné, aby funkce f byla na nějakém pravém, resp. levém prstencovém okolí tohoto bodu definována.

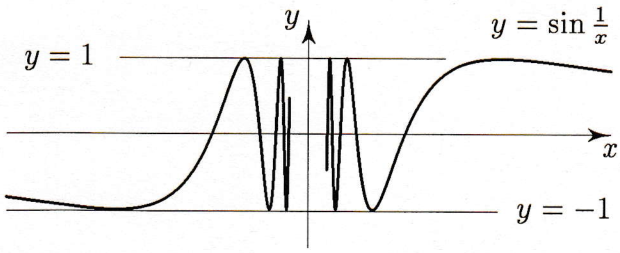
Platí tvrzení: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \iff \lim\limits_{x\to a+} f(x) = \lim\limits_{x\to a-} f(x) = A$.

Příklady.

(a) Uvedli jsme, že (tzv. oboustranná) limita funkce $\operatorname{sgn}(x)$ v bodě nula neexistuje. Existují ale obě limity jednostranné: není těžké ověřit, že $\lim\limits_{x\to 0+} \operatorname{sgn}(x) = 1$ a $\lim\limits_{x\to 0-} \operatorname{sgn}(x) = -1$.
A protože jsou tyto limity zprava a zleva rozdílné, je neexistence oboustranné limity důsledkem výše uvedeného tvrzení.

(b)

Příkladem funkce, která v některém bodě nemá dokonce ani jednostranné limity, je funkce $\sin\frac{1}{x}$.



Zajímá-li nás $\lim\limits_{x \to 0+} \sin \frac{1}{x}$ — tj. chování této funkce pro malé kladné (a zmenšující se) hodnoty proměnné x, zjišťujeme, že odpovídá chování funkce $\sin y$ pro hodnoty y rostoucí nade všechny meze. Na každém intervalu $(0, \delta)$ tak funkce $\sin \frac{1}{x}$ nabývá stejných hodnot, jako funkce $\sin y$ na množině $(\frac{1}{\delta}, +\infty)$ — tedy všech z intervalu $\langle -1, 1 \rangle$.
A protože pro $x \to 0+$ se $f(x)$ žádné hodnotě (jediné) neblíží, $\lim\limits_{x \to 0+} \sin \frac{1}{x}$ neexistuje.
Zcela analogicky pak neexistuje ani $\lim\limits_{x \to 0-} \sin \frac{1}{x}$.

(c) Dirichletova funkce je příkladem funkce, která nemá (ani jednostrannou) limitu v žádném bodě $a \in \mathcal{R}$. V jakékoliv množině $P_\delta(a)$ se totiž nacházejí čísla racionální i iracionální, tj. body s funkční hodnotou 1 i 0.

(d) Je-li funkce f na nějakém $P_\delta(a)$ kladná, pak, pokud $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existuje, je to číslo nezáporné (tedy ne nutně kladné, ale zcela jistě ne záporné).

Definice. *Nechť funkce f je definována na množině $(\omega, +\infty), \omega \in \mathcal{R}$. Říkáme, že funkce f má v $+\infty$ limitu $A \in \mathcal{R}$, platí-li:*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists x_0 \in (\omega, +\infty) \ \textit{takové, že} \ \forall x > x_0 \ \textit{je} \ |f(x) - A| < \varepsilon \, .$$

Symbolický zápis tohoto faktu je $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$.

Pokud je funkce f definována na intervalu $(-\infty, \omega)$, $\omega \in \mathcal{R}$, a existuje-li $A \in \mathcal{R}$ tak, že platí:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists x_0 \in (-\infty, \omega) \ \textit{takové, že} \ \forall x < x_0 \ \textit{je} \ |f(x) - A| < \varepsilon \, ,$$

říkáme, že funkce f má v $-\infty$ limitu A a značíme $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$.

Poznámky.

(i) Právě definované limity se označují jako vlastní limity (tj. A) v nevlastním bodě (tj. $+\infty$ či $-\infty$).

(ii) Pokud se na množinu $(x_0, +\infty)$, resp. $(-\infty, x_0)$ budeme dívat jako na prstencové okolí „plus nekonečna“, resp. „minus nekonečna“, jsou definice limit ve vlastních i nevlastních bodech naprosto totožné.

(iii) Zápis $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$ znamená, že pro x rostoucí nade všechny meze se funkční hodnoty $f(x)$ neomezeně přibližují hodnotě A.

(iv) Limita funkce v nevlastním bodě $+\infty$ zcela odpovídá pojmu limity, jak ji známe z teorie číselných posloupností.

Příklady.

(a) Jak již bylo v podstatě konstatováno, funkce $f(x) = \sin x$ pro x jdoucí do $+\infty$ (ani pro $x \to -\infty$) limitu nemá.
Stejně tak v nevlastních bodech neexistují limity funkcí $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$ — a obecně žádné nekonstantní periodické funkce.

(b) Platí: pro $n \in \mathcal{N}$ je $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$, $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$, $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \operatorname{arctg} x = \pm\frac{\pi}{2}$,
$\lim\limits_{x \to +\infty} \operatorname{arccotg} x = 0$, $\lim\limits_{x \to -\infty} \operatorname{arccotg} x = \pi$.

Zjišťovat existenci a hodnotu limity funkce (ať ve vlastním či nevlastním bodě) podle její definice bývá ve většině případů velmi pracné, a postupuje se proto jinak.

Věta. *Nechť $a \in \mathcal{R}$ a existuje $\delta > 0$ takové, že $g(x) \le f(x) \le h(x)$ na $P_\delta(a)$. Pokud $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = A$, je i $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$.*

Poznámky.

(i) Tvrzení zůstane samozřejmě v platnosti i tehdy, když místo $x \to a$ budeme všude psát $x \to a+$, resp. $x \to a-$ nebo $x \to +\infty$, resp. $x \to -\infty$. Patřičným způsobem pak musíme ovšem modifikovat množinu $P_\delta(a)$: na pravé, resp. levé prstencové δ-okolí nebo množinu $(\delta, +\infty)$, resp. $(-\infty, \delta)$.

(ii) Speciálním případem této tzv. věty „o křídlech“ je následující a zřejmý dodatek: je-li $f(x) = g(x)$ na nějakém $P_\delta(a)$, pak existuje-li $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, existuje i $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ a obě limity se rovnají.

Vezměme pro příklad funkce $f(x) = \frac{x}{x}$ a $g(x) = 1$. Ty jsou totožné pro $x \ne 0$, funkce f však (na rozdíl od g) není v nule definována. A chování funkce v okolí právě takovýchto bodů — tedy i existence limity v takovémto bodě — nás zajímá.

Protože $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 1$, je podle zmíněného dodatku i $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$. Tato skutečnost je ostatně evidentní již s ohledem na to, co zde bylo zdůrazňováno: totiž, že limita funkce ve vlastním bodě a nezáleží na tom, jak (a zdali vůbec) je funkce v bodě a definována.

(iii) Uvedený triviální příklad můžeme doprovodit i poněkud méně triviálním: nechť $f(x) = \dfrac{x^3 - x^2 + 3x - 3}{x^2 - 1}$; jak vypadá $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 1$, tedy chování funkce f v okolí bodu 1, který není v jejím definičním oboru?

Označme $g(x) = \dfrac{x^2+3}{x+1}$. Protože $\dfrac{x^3 - x^2 + 3x - 3}{x^2 - 1} = \dfrac{(x-1)(x^2+3)}{(x-1)(x+1)}$, vidíme, že $f(x) = g(x)$ na nějakém prstencovém okolí bodu 1. Tudíž $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} g(x)$, přičemž hodnotu limity funkce $g(x)$ pro $x \to 1$ (tedy funkce, která v bodě 1 již definována je) dokážeme snadno stanovit (je rovna 2, jak si zanedlouho ukážeme).

(iv) Limita funkce $\sin\frac{1}{x}$ pro $x \to 0$ neexistuje, avšak $\lim\limits_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0$. Pro $x \ne 0$ je totiž $-1 \le \sin\frac{1}{x} \le 1$, tedy i $-x \le x\sin\frac{1}{x} \le x$ pro $x > 0$, resp. $-x \ge x \sin\frac{1}{x} \ge x$ pro $x < 0$, a $\lim\limits_{x\to 0} x = \lim\limits_{x\to 0}(-x) = 0$.

Věta. *Nechť existují vlastní limity $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$, buď $k \in \mathcal{R}$. Potom*

$$\lim_{x\to a}\big(k \cdot f(x)\big) = k \cdot A, \qquad \lim_{x\to a} |f(x)| = |A|,$$

$$\lim_{x\to a}\big(f(x) + g(x)\big) = A + B, \qquad \lim_{x\to a}\big(f(x) - g(x)\big) = A - B,$$

$$\lim_{x\to a}\big(f(x) \cdot g(x)\big) = A \cdot B \qquad \textit{a pokud } B \ne 0 \textit{ i } \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}.$$

Poznámky.

(i) Věta platí opět i v případech, kdy limity uvedených funkcí jsou jednostranné (tj. všechny pro $x \to a+$ nebo všechny pro $x \to a-$) nebo jedná-li se o limity v nevlastních bodech (tj. všechny pro $x \to +\infty$ nebo všechny pro $x \to -\infty$).

(ii) Pokud je B rovno nule, nedá se tvrzení o limitě podílu funkcí použít.

Pro ověření platnosti např. vztahu $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ je tak třeba použít jiných prostředků, o kterých se zmíníme později.

(iii) Obrácené tvrzení této věty neplatí, tj. například z existence $\lim\limits_{x\to a} \big(f(x) + g(x)\big)$ nelze usuzovat na existenci jednotlivých limit $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)$.

(iv) Podobně z existence $\lim\limits_{x\to a} |f(x)|$ samozřejmě nikterak neplyne, že by měla existovat také $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ — je kupříkladu $\lim\limits_{x\to 0} |\operatorname{sgn}(x)| = 1$, ale $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sgn}(x)$ neexistuje.
Avšak, je-li $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = 0$, pak ze vztahu $-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$ a věty „o křídlech“ platnost vztahu $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ vyplývá.

Příklady.

(a) Pro $x \neq 0$ je $f(x) = \dfrac{2x^2 - 3x + 1}{1 - x^2} = \dfrac{2 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2} - 1}$ (čitatele i jmenovatele jsme vydělili x^2).

Protože $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(2 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}\right) = 2$ a $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x^2} - 1\right) = -1$ (zde jsme použili věty o limitě součtu a rozdílu funkcí), lze psát $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \dfrac{\lim\limits_{x\to+\infty} \left(2 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x^2} - 1\right)} = \dfrac{2}{-1} = -2$.

Zároveň je i $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -2$.

(b) Podobně je $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x + 1}{x^2 - 2x - 5} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{2}{x} - \frac{5}{x^2}} = \dfrac{\lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(1 - \frac{2}{x} - \frac{5}{x^2}\right)} = \dfrac{0}{1} = 0$.

(c) Obecně lze tvrdit toto:
funkce racionální ryze lomená má v nevlastních bodech vždy nulovou limitu;
je-li stupeň polynomu v čitateli racionální lomené funkce roven stupni polynomu v jejím jmenovateli, je limita v nevlastních bodech (tj. opět jak v $+\infty$, tak i v $-\infty$) rovna podílu koeficientů u nejvyšších mocnin.
Obě tyto skutečnosti lze symbolicky zapsat ve tvaru

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0} = \frac{a_n}{b_n}\ , \text{ pokud } b_n \neq 0.$$

3.2 Spojitost funkce

Definice. *Nechť f je definována na okolí bodu $a \in \mathcal{R}$. Pokud $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$, říkáme, že funkce f je v bodě a* ***spojitá****.*

Pokud je funkce f definována na pravém, resp. levém okolí bodu a (tj. na intervalu $\langle a, a+\delta)$, resp. $(a-\delta, a\rangle$, kde $\delta > 0$) a platí $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = f(a)$, resp. $\lim\limits_{x \to a-} f(x) = f(a)$, říkáme, že funkce f je v bodě a ***spojitá zprava***, resp. ***zleva***.

Poznámky.

(i) Funkce f je v bodě a spojitá právě tehdy, je-li spojitá zároveň zprava i zleva.

(ii) Bez existence funkční hodnoty v bodě a nelze o spojitosti funkce v tomto bodě — na rozdíl od limity — vůbec uvažovat.

(iii) Rozepíšeme-li dle definice limity vztah $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$, můžeme definici spojitosti funkce v bodě vyjádřit i takto:

$$\text{pokud} \quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \text{ tak, že } \forall x \in (a-\delta, a+\delta) \text{ je } |f(x) - f(a)| < \varepsilon \,,$$

říkáme, že funkce f je v bodě a spojitá.

(iv) Pokud je funkce f v bodě a spojitá, existuje okolí tohoto bodu takové, že funkce f je na něm omezená. (Z definice uvedené v poznámce (iii) je pro x z jistého okolí bodu a $f(a) - \varepsilon < f(x) < f(a) + \varepsilon$.)
Obrácené tvrzení, totiž že z omezenosti funkce plyne její spojitost, samozřejmě neplatí — viz funkce $\operatorname{sgn}(x)$ na okolí nuly.

(v) Je-li funkce f v bodě a spojitá a $f(a) > 0$ (resp. $f(a) < 0$), pak existuje okolí tohoto bodu takové, že funkce f na něm nabývá jen kladných hodnot (resp. pouze záporných hodnot).
Pokud $f(a) = 0$, nelze o znaménku spojité funkce f na okolí bodu a nic tvrdit.

Definice. *Funkce f je* ***spojitá na intervalu****, jestliže je spojitá v každém jeho bodě.*

Poznámky.

(i) Je-li tímto intervalem uzavřený interval $\langle a, b\rangle$, kde $a, b \in \mathcal{R}$, $a < b$, požadujeme v bodě a spojitost zprava a v bodě b spojitost zleva. „Jednostrannou spojitost“ v koncovém bodě pak analogicky chceme i pro polouzavřené intervaly $\langle a, b)$ či $(a, b\rangle$.

(ii) Grafem na intervalu spojité funkce je, zhruba řečeno, křivka, která má tu vlastnost, že není nikde „přerušená“. (Lze ji načrtnout, aniž zvedneme tužku z papíru.)

Jako důsledek věty o limitě součtu, rozdílu, součinu a podílu funkcí platí následující tvrzení.

Věta. *Součet, rozdíl, součin spojitých funkcí je funkce spojitá. Totéž lze říci také o podílu spojitých funkcí, pokud funkce ve jmenovateli nenabývá nulových hodnot.*

Příklady.

(a) Absolutní hodnota spojité funkce je také funkcí spojitou — např. $f(x) = |x|$.

(b) Polynomy, racionální lomené funkce, obecná mocnina, logaritmické a exponenciální funkce, goniometrické a cyklometrické funkce jsou funkce spojité na svých definičních oborech.
Stejně tak je na svém definičním oboru spojitá každá funkce, kterou získáme z uvedených elementárních funkcí použitím konečného počtu operací sčítání, odčítání, násobení a dělení.

(c) Funkce $\operatorname{sgn}(x)$ je nespojitá v bodě nula: zde totiž $\lim\limits_{x \to 0} \operatorname{sgn}(x)$ vůbec neexistuje.

(d) Funkce $f(x) = \frac{x}{x}$ je v bodě nula také nespojitá, neboť tu není definována. Zde ale je $\lim_{x\to 0} \frac{x}{x} = 1$. Dodefinujeme-li tedy tuto funkci f tak, že položíme $f(0) = 1$, stane se i v tomto bodě funkcí spojitou, a bude tak spojitou na celém $\mathcal{R}$.
Takovéto body nazýváme odstranitelnými body nespojitosti.

(e) Funkci $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$ nelze v bodě nula předefinovat, aby se stala spojitou — po předefinování se může stát v nule maximálně spojitou zprava, anebo zleva.
Takovéto funkce se nazývají po částech spojité.

(f) Stejně tak je nula bodem neodstranitelné nespojitosti i pro funkci $f(x) = \sin \frac{1}{x}$.

Věta. *Nechť* $\lim_{x\to a} g(x) = A$ *a* f *je spojitá funkce definovaná na okolí bodu* A. *Pak platí:*

$$\lim_{x\to a} f\big(g(x)\big) = f\Big(\lim_{x\to a} g(x)\Big) = f(A)\,.$$

Poznámky.

(i) Tvrzení zůstane v platnosti i tehdy, budeme-li místo $x \to a$ všude psát $x \to a+$ nebo $x \to a-$, případně též $x \to +\infty$ nebo $x \to -\infty$.

(ii) Jedním z důsledků této věty o limitě složené funkce je to, že složením spojitých funkcí dostaneme funkci, která je též spojitá.

(iii) Zjišťovat limity spojitých funkcí v bodech jejich definičního oboru neznamená nic jiného, než určit v daném bodě funkční hodnotu.

(iv) Veškerá látka z partií matematické analýzy, probíraná v těchto skriptech, se bude týkat takřka výhradně funkcí spojitých.

Příklady.

(a) Funkce $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ je spojitá na $(-\infty, 0)$ i na $(0, +\infty)$ — jedná se o podíl, složení a součin spojitých funkcí.
Protože $\lim_{x\to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$, je nula odstranitelným bodem nespojitosti této funkce. Po dodefinování $f(0) = 0$ se tak funkce f stane spojitou na celém $\mathcal{R}$.

(b) Podobně je na celém $\mathcal{R}$ spojitá i funkce $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}\,, & \text{pro } x \neq 0\,; \\ 0\,, & \text{pro } x = 0\,. \end{cases}$

(c) Je $\lim_{x\to +\infty} e^{\frac{1}{x}} = \exp\big(\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x}\big) = e^0 = 1$, $\lim_{x\to +\infty} \ln \frac{x+5}{x} = \ln\big(\lim_{x\to +\infty} \frac{x+5}{x}\big) = \ln 1 = 0$.

(d) Je $\lim_{x\to \pm\infty} \sin \frac{1}{x} = 0$, $\lim_{x\to \pm\infty} \cos \frac{1}{x} = 1$.

(e) Je $\lim_{x\to +\infty} \arcsin \frac{x}{x+1} = \arcsin\big(\lim_{x\to +\infty} \frac{x}{x+1}\big) = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$, ale $\lim_{x\to +\infty} \arcsin \frac{x+1}{x}$ neexistuje, neboť funkce $\arcsin \frac{x+1}{x}$ není pro kladná x vůbec definována.

(f) Je $\lim_{x\to \frac{3}{2}\pi} \sqrt{1 - \sin^2 x} = \sqrt{1 - \sin^2\left(\frac{3}{2}\pi\right)} = 0$ — jedná se totiž o funkci spojitou.

3.3 Nevlastní limity

Definice. *Nechť funkce f je definována na nějakém prstencovém okolí bodu $a \in \mathcal{R}$. Jestliže*

$$\forall K \ \exists \delta > 0 \ \textit{tak, že} \ \forall x \in P_\delta(a) \ \textit{je} \ f(x) > K \ ,$$

říkáme, že funkce f má v bodě a nevlastní limitu plus nekonečno a značíme $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$.

Zápis $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$ pak znamená: $\forall K \ \exists \delta > 0$ tak, že $\forall x \in P_\delta(a)$ je $f(x) < K$.

Poznámky.

(i) Uvedené definice nevlastních limit jsou limitami ve vlastních bodech (tj. $a \in \mathcal{R}$).

(ii) Pokud nahradíme $P_\delta(a)$ intervalem $(a, a+\delta)$ nebo $(a-\delta, a)$, získáme definice jednostranných nevlastních limit.

(iii) Nevlastní limita $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ znamená zhruba tolik, že pokud se s bodem x blížíme do bodu a (ať zprava či zleva), rostou funkční hodnoty $f(x)$ nade všechny meze.

Příklady.

(a) Je $\lim\limits_{x \to 0+} \frac{1}{x} = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 0-} \frac{1}{x} = -\infty$.

(b) Platí: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 0+} \ln x = -\infty$, $\lim\limits_{x \to -\frac{1}{2}\pi+} \operatorname{tg} x = -\infty$, $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}\pi-} \operatorname{tg} x = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 0+} \operatorname{cotg} x = +\infty$, $\lim\limits_{x \to \pi-} \operatorname{cotg} x = -\infty$ atd.

(c) Jak vypadají limity racionální lomené funkce v bodech, které jsou kořeny polynomu v jejím jmenovateli?

Nechť $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, P, Q jsou polynomy a $Q(a) = 0$. Pokud zároveň $P(a) \neq 0$, je $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = +\infty$ nebo $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = -\infty$ (a totéž lze tvrdit i o $\lim\limits_{x \to a-} f(x)$).

Symbolu $+\infty$, resp. $-\infty$ se užije tehdy, je-li funkce na vyšetřovaném okolí bodu a kladná, resp. záporná. Takže:

$$\lim_{x \to 1+} \frac{x}{x^2-1} = +\infty, \ \lim_{x \to 1-} \frac{x}{x^2-1} = -\infty, \ \lim_{x \to -1+} \frac{x}{x^2-1} = +\infty, \ \lim_{x \to -1-} \frac{x}{x^2-1} = -\infty.$$

Například na dostatečně malém pravém okolí bodu -1 je totiž x záporné, stejně jako výraz x^2-1, a jejich podíl je tak kladný.

(d) Nechť $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, P, Q jsou polynomy a $Q(a) = P(a) = 0$.

Pro určení $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ je podstatné, jaká je násobnost kořene a vzhledem k oběma polynomům: označme proto p, resp. q násobnost kořene a vzhledem k polynomu P, resp. Q.

Je tedy $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{(x-a)^p \cdot P_1(x)}{(x-a)^q \cdot Q_1(x)}$, kde P_1, Q_1 jsou vhodné polynomy takové, že $P_1(a) \neq 0$, $Q_1(a) \neq 0$.

Pro $p < q$ tak je $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} \frac{P_1(x)}{(x-a)^{q-p} \cdot Q_1(x)}$, čímž se jedná o případ bezprostředně výše uvedený.

Pro $p = q$ je $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{P_1(x)}{Q_1(x)} = \dfrac{P_1(a)}{Q_1(a)} \ (\neq 0)$ — jedná se tedy o vlastní limitu.

Pro $p > q$ je pak nakonec $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{(x-a)^{p-q} \cdot P_1(x)}{Q_1(x)} = 0$ — a jde tedy opět o limitu vlastní.

(e) Je $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x-1}{x^2-1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x-1}{(x+1)(x-1)} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{1}{2}$,

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)^2(x+1)}{(x-2)(x-1)} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+1)}{x-1} = 0\,.$$

V žádném z obou zde uvedených příkladů nelze bezprostředně použít větu o limitě podílu funkcí, neboť limita jmenovatele původní funkce je rovna nule.

Definice. *Nechť f je definována na intervalu $(\omega, +\infty)$, $\omega \in \mathcal{R}$. Pokud*

$$\forall K \ \exists x_0 \in (\omega, +\infty) \text{ takové, že } \forall x > x_0 \text{ je } f(x) > K\,, \quad \text{říkáme,}$$

že funkce f má v nevlastním bodě $+\infty$ nevlastní limitu $+\infty$ a značíme $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
Zápis $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ znamená: $\forall K \ \exists x_0 \in (\omega, +\infty)$ takové, že $\forall x > x_0$ je $f(x) < K$.

Poznámky.

(i) Nahradíme-li v uvedené definici interval $(\omega, +\infty)$ intervalem $(-\infty, \omega)$ a relaci $x > x_0$ nerovností $x < x_0$, definujeme tím nevlastní limity funkce f v nevlastním bodě $-\infty$: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$, respektive $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

(ii) Pro počítání s nevlastními limitami samozřejmě věta o limitě součtu, rozdílu, součinu, podílu funkcí použít nejde.
Pro zjišťování limit tohoto typu (tzv. limity typu „$\frac{\infty}{\infty}$“ či „$\frac{0}{0}$“, eventuálně „$0 \cdot \infty$“ nebo „$\infty - \infty$“) se používá poměrně silného nástroje využívajícího derivací, o kterém se zmíníme později (tzv. l'Hospitalovo pravidlo).

(iii) V některých případech (těch jednodušších) se ovšem limity stanovit dají.
Pokud $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to a} h(x) = A \in \mathcal{R}$, potom:
$\lim\limits_{x \to a} \big(f(x) + g(x)\big) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to a} \big(f(x) \cdot g(x)\big) = +\infty$;
$\lim\limits_{x \to a} \dfrac{h(x)}{f(x)} = 0$, $\lim\limits_{x \to a} \big(f(x) \pm h(x)\big) = +\infty$ (zde dokonce stačí, aby funkce h byla na nějakém $P_\delta(a)$ omezená).
Jestliže je navíc $A > 0$, bude $\lim\limits_{x \to a} \big(f(x) \cdot h(x)\big) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{h(x)} = +\infty$ (pro $A < 0$ pak samozřejmě $-\infty$).
Zde opět lze všude místo $x \to a$ psát $x \to a+$, $x \to a-$ či $x \to +\infty$, $x \to -\infty$.

(iv) Limity typu „$\frac{A}{0}$“, kde $A \neq 0$, a „$\frac{\infty}{0}$“ (tzn. limity podílu funkcí, kde limita čitatele je vlastní a rovna A nebo nevlastní a limita jmenovatele je rovna 0) budou nevlastní (tj. buď $+\infty$, anebo $-\infty$) v tom případě, kdy funkce ve jmenovateli nemění na nějakém prstencovém okolí vyšetřovaného bodu své znaménko (a samozřejmě je různá od nuly).

Příklady.

(a) Pro polynom n-tého stupně $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, kde $a_n > 0$, je $\lim\limits_{x\to\pm\infty} P(x) = +\infty$, pokud je n sudé.
Pro n liché je $\lim\limits_{x\to\pm\infty} P(x) = \pm\infty$.

(b) Dále je např.: $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$;
$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\,\mathrm{e}^x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} (x + \sin x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sin x}{x^2} = 0$ atd.

(c) V případě racionální lomené funkce je $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ nevlastní, jestliže je $st.\,P > st.\,Q$.
Použití symbolu $+\infty$ nebo $-\infty$ je opět vázáno na to, je-li racionální lomená funkce na „okolí“ $+\infty$, resp. $-\infty$ kladná nebo záporná.
Takže například $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-3x^3}{x^2+1} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-x^3}{1-x^2} = -\infty$ apod.

(d) U racionálních lomených funkcí tak o limitách v nevlastních bodech rozhoduje relace mezi stupni polynomu v čitateli a ve jmenovateli, o limitách ve vlastních bodech pak to, kořenem jaké násobnosti je tento bod vzhledem k oběma polynomům (není-li kořenem, můžeme jej pokládat za kořen nulové násobnosti).
Je tedy $\lim\limits_{x\to0+} \dfrac{x^2}{x} = 0$, $\lim\limits_{x\to0+} \dfrac{x}{x} = 1$, $\lim\limits_{x\to0+} \dfrac{x}{x^2} = +\infty$;
$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{x} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x} = 1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x^2} = 0$.

(e) Pro limity typu „$\infty - \infty$“ se dá někdy užít následujícího postupu:

$$\lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) = \lim_{x\to+\infty} \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+1-x}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} =$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = 0 \text{ (neboť limita jmenovatele je } +\infty\text{);}$$

$$\lim_{x\to+\infty} (\sqrt{2x} - \sqrt{x-1}) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x - x + 1}{\sqrt{2x} + \sqrt{x-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{\sqrt{2x} + \sqrt{x-1}} =$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{2} + \sqrt{1 - \frac{1}{x}}} = +\infty$$ (neboť limita čitatele je $+\infty$ a limita jmenovatele je rovna $\sqrt{2} + 1$).

(f) Platí též: $\lim\limits_{x\to0+} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to0-} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\dfrac{1}{x} = -\infty$.

(g) Platí $\lim\limits_{x\to0+} \sin x = 0$ a $\lim\limits_{x\to0+} \dfrac{1}{\sin x} = +\infty$.

Přestože je podobně $\lim\limits_{x\to0+} x\sin\frac{1}{x} = 0$, limita převrácené hodnoty této funkce, tj. $\lim\limits_{x\to0+} \dfrac{1}{x\sin\frac{1}{x}}$, existovat nebude. Důvodem je to, že na každém pravém prstencovém okolí nuly existují body, ve kterých je $x\sin\frac{1}{x} = 0$, a převrácená hodnota této funkce tudíž nemůže být na žádném (celém!) intervalu tvaru $(0, \delta)$, kde $\delta > 0$, definována. Vyšetřovat její limitu v bodě 0 zprava tak nelze (a samozřejmě ani zleva).
Nicméně, jak by asi vypadal graf takovéto funkce, zejména právě v okolí nuly?
A v čem by se podobal grafu funkce $f(x) = \dfrac{x}{\sin x}$ v „okolí“ plus nekonečna?