1. přednáška MA 1, ZS, šk. r. 2015/16, 6.10.2015

Základní pojmy z logiky

Logika je věda o formální správnosti výroků.

Definice 1. Výrok je jakékoliv tvrzení, o kterém má smysl říci, zda je nebo není pravdivé.

Příklad:

- Číslo 4 je sudé (je to výrok; je pravdivý)
- Praha je hlavní město Polska. (je to výrok; není pravdivý)
- Ať už je konec! (není to výrok)
- V roce 2020 vstoupí člověk na Mars. (je to výrok; nevíme však, zda je pravdivý nebo není; to se uvidí až na začátku roku 2021)

Pomocí logických spojek (funktorů) lze z daných výroků tvořit nové výroky.

Funktor negace

Definice 2. Negací výroku V je výrok non V ($\neg V$), který je pravdivý, když V neplatí a nepravdivý, když V platí.

Přiřadíme-li pravdivému výroku hodnotu 1 a nepravdivému výroku hodnotu 0, lze negaci výroku popsat následující tabulkou:

V	$\neg V$
1	0
0	1

Př. na $\neg V$:

Funktory, které operují se dvěma výroky

případ	V	W
1	1	1
2	1	0
3	0	1
4	0	0

Definice 3.

- Konjunkcí výroků V a W je výrok $V \wedge W$, který je pravdivý právě tehdy, nastane-li případ 1.
- Disjunkcí výroků V a W je výrok $V \vee W$, který je pravdivý právě tehdy, nenastane-li případ 4
- Implikací výroků V a W je výrok $V \Rightarrow W$, který je pravdivý právě tehdy nenastane-li případ 2.
- Ekvivalence výroků V a W je výrok $V \Leftrightarrow W$, který je pravdivý právě tehdy, když nastane případ 1 nebo případ 4.

Poznámky. 1) $\underset{\substack{\text{premisa}\\\text{předpoklad}}}{V} \Rightarrow \underset{\text{závěr}}{W}$ ... V implikuje W, z V plyne W, platí-li V, pak platí W,

platnost V je postačující podmínkou pro platnost W,
platnost W je nutnou podmínkou pro platnost V

2) Je-li premisa nepravdivá, pak implikace platí (bez ohledu na platnost závěru). Například implikace "Je-li $2\times 3=5$, je Karel králem" je platná implikace, ať je Karel králem nebo není (protože premisa je neplatná).

Výše uvedených funktorů lze používat k tvoření výroků složitějších.

Př. Dokažte: $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A) \Leftrightarrow ((\neg A) \vee B)$

Řešení:

případ	A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \Rightarrow B$	$\neg B \Rightarrow \neg A$	$(\neg A) \vee B$
1	1	1	0	0	1	1	1
2	1	0	0	1	0	0	0
3	0	1	1	0	1	1	1
4	0	0	1	1	1	1	1

3) $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow [(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)]$

Př. na $V \wedge W$, $V \vee W$.

Definice 4. <u>Výroková funkce (forma)</u> $V(x_1,\dots,x_n)$ je výraz, z něhož vznikne výrok dosazením prvků daných množin $M_1,\dots,M_n$ za proměnné $x_1,\dots,x_n$.

Obecně lze výrokovou formu zapsat ve tvaru

$$V(x_1,\dots,x_n), \quad x_1 \in M_1, \dots, x_n \in M_n.$$

Př. 1) $V(x):\ x<2, \quad x \in \{-1, 0, 2\}$

$V(-1)$ platí

$V(0)$ platí

$V(2)$ neplatí

2) $V(x,y):\ x-y>0, \quad x \in \{2,3,1\}, \quad y \in \{0,7,2\}$

$V(2,0)$ platí, $V(1,7)$ neplatí, atd.

Kvantifikátory

Buď $V(x)$, $x \in M$, výroková forma.

1) Řekneme-li „Pro všechna $x \in M$ platí $V(x)$", je to výrok.

Zápis: $\forall x \in M : V(x)$

Definice 5. Symbol $\forall$ nazýváme <u>obecným (velkým) kvantifikátorem</u>.

2) Řekneme-li „Existuje $x \in M$ tak, že platí $V(x)$", je to výrok.

Zápis: $\exists x \in M : V(x)$

Definice 6. Symbol $\exists$ nazýváme <u>existenčním (malým) kvantifikátorem</u>.

Dále budeme používat zápis

$$\exists!\, x \in M : V(x),$$

který znamená „Existuje jediné $x \in M$ takové, že platí $V(x)$".

Pokud má výroková forma více proměnných, lze některé z nich vázat pomocí kvantifikátorů.

Mějme výrokovou formu $V(x,y)$, $x \in M_1$, $y \in M_2$.

Výrokové formy jedné proměnné:

$\forall x \in M_1 : V(x,y)$

$\exists x \in M_1 : V(x,y)$

Z těchto výrokových forem lze vytvořit výroky použitím dalších kvantifikátorů:

$\forall y \in M_2 \, (\forall x \in M_1 : V(x,y))$ $\quad \forall y \in M_2 \, \forall x \in M_1 : V(x,y)$

$\forall y \in M_2 \, (\exists x \in M_1 : V(x,y))$ $\quad \forall y \in M_2 \, \exists x \in M_1 : V(x,y)$

$\exists y \in M_2 \, (\exists x \in M_1 : V(x,y))$

$\exists y \in M_2 \, (\forall x \in M_1 : V(x,y))$

Kvantifikátory stejného typu lze zaměnit, např.

$\forall x \in M_1 \, \forall y \in M_2 : V(x,y) \Leftrightarrow \forall y \in M_2 \, \forall x \in M_1 : V(x,y)$.

Na druhé straně, kvantifikátory různého typu nelze libovolně prohazovat, aniž by se změnil smysl výroku.

např.

$\forall y \in \mathbb{N} \, \exists x \in \mathbb{N} : y < x$ ... pravdivý výrok

$\exists x \in \mathbb{N} \, \forall y \in \mathbb{N} : y < x$ ... nepravdivý výrok

(stačí volit např. $y = x+1$

$x+1 = y > x$!)

Matematická věta je nějaký výrok, který se týká objektů, s kterými v matematice pracujeme. Mat. věta má předpoklady a závěr. Jejím důkazem je posloupnost správných úvah vedoucích od předpokladů k závěru věty. V těchto úvahách využíváme předpoklady a věty již dokázané. Teprve skutečnost, že <u>existuje</u> <u>logicky bezchybný důkaz</u> nás opravňuje používat věta v dalších úvahách.

<u>Typy důkazů</u>:

Mějme výrok $A \Rightarrow B$

<u>Důkaz přímý</u>: $A \Rightarrow C_1 \Rightarrow C_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow C_n = B$

<u>Důkaz nepřímý</u>: $(\neg B \Rightarrow \neg A) \Leftrightarrow (A \Rightarrow B)$

<u>Důkaz sporem</u>: $(A \wedge (\neg B)) \Rightarrow C$

$\uparrow$

<u>neplatný výrok!</u>

Tedy nemůže platit $A \wedge (\neg B)$. Proto, když A platí, pak platí i B, tj: $A \Rightarrow B$.

<u>Důkaz matematickou indukcí</u>

Při důkazu tvrzení

$$\forall n \in \mathbb{N} : V(n)$$

postupujeme takto:

1, dokážeme $V(1)$

2, dokážeme $\forall n \in \mathbb{N} : (V(n) \Rightarrow V(n+1))$

<u>Př.</u> Dokažte mat. indukcí: pro $a, b \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, pak

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$ (binomická věta)

(Řešeno na přednášce.)

Množiny a množinové operace.

K otázce pojmu množiny použijeme naivní (intuitivní) přístup, který pro naše účely bude postačující. Přesné vymezení tohoto pojmu není jednoduché a přesahuje rámec této přednášky.

Množinou budeme rozumět soubor určitých a navzájem různých objektů, kterým budeme říkat **prvky**.

Množina je tedy určena svými prvky.

Zápis: $x \in M$ znamená, že prvek x patří do množiny M.
$x \notin M$ —"— —"— nepatří —"—

Množinu můžeme zadat různými způsoby, např.:

1) vyjmenováním prvků ... $\{1, 2, 7\}$
2) pomocí vlastností, které mají splňovat její prvky ... $\{x;\ x \text{ má vlastnost } V\}$

(např. $\{x;\ x$ je přirozené číslo větší než $3\}$
tj. $\{x \in \mathbb{N};\ x > 3\}$)

Značení.

- $\emptyset$ ... prázdná množina (neobsahuje žádné prvky)
- $A \subset B$ ... množina A je podmnožinou množiny B, tj. platí $x \in A \Rightarrow x \in B$
- $A = B$ ... množiny A a B si jsou rovny $\Leftrightarrow (A \subset B) \wedge (B \subset A)$ (A a B mají stejné prvky)
- $A \neq B$ ... neplatí $A = B$ *)
- $A \cup B := \{x;\ x \in A \vee x \in B\}$ (sjednocení množin A a B)

obecněji

$$\bigcup_{i \in J} A_i := \{x;\ \exists i \in J : x \in A_i\}$$

---

*) je-li $A \subset B \wedge A \neq B$, říkáme, že A je vlastní částí množiny B

- $A \cap B := \{x;\ x \in A \wedge x \in B\}$ (průnik množin A a B)

(Je-li $A \cap B = \emptyset$, říkáme, že A a B jsou disjunktní)

obecněji

$$\bigcap_{i \in J} A_i := \{x;\ x \in A_i\ \forall i \in J\}$$

- $A \setminus B := \{x \in A;\ x \notin B\}$ (rozdíl množin A a B)

Pro operace $\cup$ a $\cap$ platí zákony komutativní, asociativní a distributivní:

$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
(*) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$	$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

Důkaz (*):

$x \in (A \cup B) \cap C \Leftrightarrow [(x \in A \cup B) \wedge (x \in C)] \Leftrightarrow \{[(x \in A) \vee (x \in B)] \wedge (x \in C)\}$

$\Leftrightarrow [(x \in A \cap C) \vee x \in (B \cap C)] \Leftrightarrow [x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)]$

Věta 1 (de Morganova pravidla)

Nechť $I, X, A_i,\ i \in I$, jsou množiny. Pak

$$X \setminus \bigcup_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in I} (X \setminus A_i), \qquad X \setminus \bigcap_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} (X \setminus A_i)$$

Důkaz 1. vzorce. $x \in X \setminus \bigcup_i A_i \Leftrightarrow [(x \in X) \wedge (x \notin \bigcup A_i)] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow [(x \in X) \wedge (x \notin A_i\ \forall i \in I)] \Leftrightarrow (x \in X \setminus A_i\ \forall i \in I) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in \bigcap_{i \in I} (X \setminus A_i)$. $\square$

Definice. Nechť $X_1, \dots, X_n$ jsou množiny. Kartézským součinem $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ nazveme množinu všech uspořádaných n-tic $[x_1, \dots, x_n]$, kde $x_i \in X_i$ pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$.

Je-li X množina a $n \in \mathbb{N}$, pak

$$X^n := \underbrace{X \times \dots \times X}_{n\text{-krát}}.$$

Binární relace

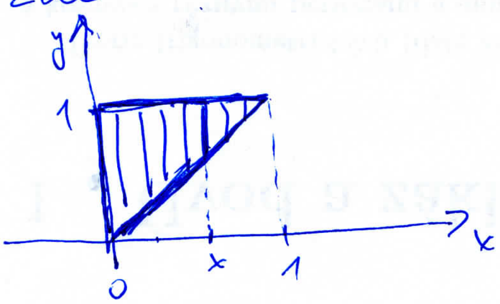
Definice. Binární relací M mezi množinami A a B nazýváme každou podmnožinu M kartézského součinu $A \times B$.

Je-li $[a, b] \in M$, říkáme, že prvek a je v relaci s prvkem b.

Je-li $A = B$, pak říkáme, že M je binární relace na A.

Př. Nerovnost $x \leq y$ mezi reálnými čísly $x, y \in \langle 0, 1 \rangle$ binární relací na $\langle 0, 1 \rangle$.

zde $M := \{[x, y] \in \langle 0, 1 \rangle^2;\ x \leq y\}$



Definice. Nechť A, B jsou množiny, $M \subset A \times B$ (tedy M je binární relace mezi množinami A a B).

Pak

$D(M) := \{x \in A;\ \exists y \in B: [x, y] \in M\}$ ... def. obor relace M (domain)

$R(M) := \{y \in B;\ \exists x \in A: [x, y] \in M\}$ ... range obor hodnot relace M

Definice Buď A množina a M binární relace na A. Řekneme, že relace M je:

1) reflexivní, jestliže platí: $x \in A \Rightarrow [x,x] \in M$;

2) symetrická, —"— : $[x,y] \in M \Rightarrow [y,x] \in M$;

3) tranzitivní, —"— : $([x,y] \in M \wedge [y,z] \in M) \Rightarrow [x,z] \in M$;

4) antisymetrická, —"— : $[x,y] \in M \Rightarrow [y,x] \notin M$;

5) slabě antisymetrická, —"— : $([x,y] \in M \wedge [y,x] \in M) \Rightarrow x = y$.

Definice. Buď A množina a M binární relace na A. Řekneme, že relace M je:

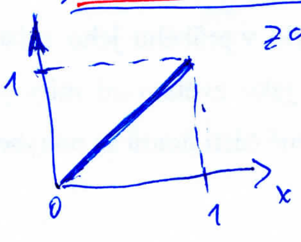
1) ekvivalence, jestliže je reflexivní, symetrická a tranzitivní;

2) uspořádání (částečné uspořádání) (neostré uspořádání), jestliže je reflexivní, slabě antisymetrická a tranzitivní;

3) ostré uspořádání, jestliže je antisymetrická a tranzitivní;

4) lineární uspořádání, jestliže M je částečné uspořádání a platí
$\forall x,y \in A : ([x,y] \in M \vee [y,x] \in M)$ (trichotomie)

Př. a) Rovnost $x = y$ mezi reálnými čísly $x, y \in \langle 0,1 \rangle$ je ekvivalence na $\langle 0,1 \rangle$.

a) 

zde $M := \{[x,y] \in \langle 0,1 \rangle^2 ;\ x = y\}$

b) nerovnost $x \leq y$ mezi reálnými čísly $x, y \in \langle 0,1 \rangle$ je lineární uspořádání na $\langle 0,1 \rangle$

c) Buď X množina, $\exp X$ systém všech podmnožin množiny X.
Pak $M := \{[A,B] \in \exp X \times \exp X : A \subset B\}$ je částečné uspořádání na $\exp X$. Pokud X má alespoň 2 prvky, pak toto uspořádání není lineární. (Je-li totiž $x, y \in X$, $x \neq y$, pak neplatí ani $\{x\} \subset \{y\}$, ani $\{y\} \subset \{x\}$.)

Zobrazení (funkce)

Definice. Binární relaci $F \subset A \times B$, kde A, B jsou množiny, nazveme zobrazením (funkcí) z množiny A do množiny B, jestliže platí

$$([x, y_1] \in F \wedge [x, y_2] \in F) \Rightarrow y_1 = y_2 .$$

Poznámky. 1) Tedy binární relace $F \subset A \times B$ je zobrazením, pokud $\forall x \in A \ \exists$ nejvýše jedno $y \in B$ tak, že $[x, y] \in F$ (toto y pak značíme symbolem $F(x)$ ... hodnota zobrazení F v bodě x)

2) Je-li F zobrazení z množiny A do množiny B a platí $D(F) = A$, pak říkáme, že F je zobrazením množiny A do množiny B (vynecháváme předložku z).

3) V matematické analýze se často zobrazení F z množiny A do množiny B chápe jako jistý předpis, který prvkům x jisté podmnožiny $D(F)$ množiny A přiřadí jednoznačně určený prvek $F(x) \in B$. Pak se definuje graf $G(F)$ zobrazení F:

def. obor zobrazení F

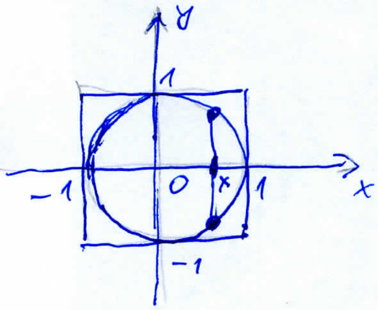
$$(*) \quad G(F) := \{[x, F(x)] \in A \times B;\ x \in D(F)\}.$$

Tedy graf $G(F)$ a zobrazení F jsou pak 2 různé pojmy, které si však vzájemně jednoznačně odpovídají!

Při naší definici zobrazení F z množiny A do množiny B (pomocí pojmu binární relace) platí, že zobrazení F je totéž co množina $G(F)$ daná předpisem $(*)$.

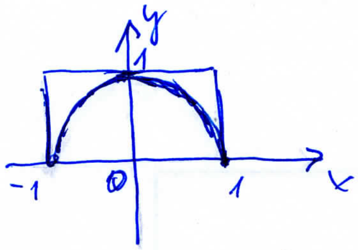
3. přednáška MA1, ZS, šk. r. 2015/16, 13. 10. 2015

Př. 1) $A=B=\langle -1,1\rangle$, $M:=\{[x,y]\in\langle -1,1\rangle^2;\ x^2+y^2=1\}$



Pak: M je relace na A (neboť $M\subset A\times A$);
$D(M)=\langle -1,1\rangle = R(M)$;
M není zobrazení z A do , neboť pro $\forall x\in(-1,1)$ platí $[x,\sqrt{1-x^2}]\in M$, $[x,-\sqrt{1-x^2}]\in M$
a přitom $\underbrace{\sqrt{1-x^2}}_{>0}\neq\underbrace{-\sqrt{1-x^2}}_{<0}$.

2) $A=\langle -1,1\rangle$, $B=\langle 0,1\rangle$, $M:=\{[x,y]\in A\times B;\ x^2+y^2=1\}$



Pak: M je zobrazení z A do B,
$D(M)=\langle -1,1\rangle$, $R(M)=\langle 0,1\rangle$,
platí $M:=\{[x,\sqrt{1-x^2}];\ x\in\langle -1,1\rangle\}$.

Značení. Je-li f zobrazení z množiny A do množiny B, píšeme $f:A\to B$.

Věta 2 – viz list 12

Definice. Buď $f:A\to B$.

(i) Je-li $M\subset D(f)$, pak množinu
$$f(M):=\{f(x);\ x\in M\}\ ^{*)}$$
nazveme **obrazem množiny M při zobrazení f**.

(ii) Je-li P libovolná množina, pak množinu
$$f_{-1}(P):=\{x\in D(f);\ f(x)\in P\}$$
nazveme **vzorem množiny P při zobrazení f**.

(vlastnosti obrazu a vzoru)

Věta 3. Nechť $f:A\to B$, $M_1,M_2\subset D(f)$, P_1,P_2 lib. mn. Pak

(1) $f(M_1\cup M_2)=f(M_1)\cup f(M_2)$,

(2) $f_{-1}(P_1\cup P_2)=f_{-1}(P_1)\cup f_{-1}(P_2)$,

---

*) Tedy $f(\emptyset)=\emptyset$.

Věta 2. Nechť $f: A \to B$, $g: C \to D$. Pak $f = g$ právě tehdy, jestliže platí

(i) $D(f) = D(g)$,

(ii) $x \in D(f) \Rightarrow f(x) = g(x)$.

Důkaz. I. Nechť $f = g$. Je-li $\emptyset = f = g$, pak $D(f) = \emptyset = D(g)$, tudíž (i) a (ii) platí.

Je-li $\emptyset \neq f = g$, pak pro $x \in D(f)$ máme

$$(*) \quad [x, f(x)] \in f = g \Rightarrow \underbrace{[x, g(x)]}_{\Downarrow \; x \in D(g)}.$$

Tedy $D(f) \subset D(g)$.

Dále dle $(*)$ $[x, f(x)] \in f \wedge [x, g(x)] \in f \xRightarrow{\text{dle definice zobrazení}} f(x) = g(x)$.

Tudíž platí (ii). Analogicky jako jsme dokázali $D(f) \subset D(g)$ se dokáže opačná inkluze. Tedy $D(f) = D(g)$, a proto (i) platí.

II. Nechť platí (i) a (ii).

Je-li $D(f) = D(g) = \emptyset$, pak $f = \emptyset = g$.

Buď $D(f) = D(g) \neq \emptyset$. Nechť $[x, f(x)] \in f$.

$$\Downarrow$$
$$x \in D(f) = D(g)$$
$$\Downarrow$$
$$[x, g(x)] \in g$$

Avšak dle (ii) je $g(x) = f(x)$, tedy $[x, f(x)] \in g$. Proto $f \subset g$. Záměnou rolí f a g dostaneme $g \subset f$. Celkem tedy $f = g$. $\square$

(3) $\quad f(M_1 \cap M_2) \subset f(M_1) \cap f(M_2)$,

(4) $\quad f_{-1}(P_1 \cap P_2) = f_{-1}(P_1) \cap f_{-1}(P_2)$,

(5) $\quad f(M_1 \setminus M_2) \supset f(M_1) \setminus f(M_2)$,

(6) $\quad f_{-1}(P_1 \setminus P_2) = f_{-1}(P_1) \setminus f_{-1}(P_2)$.

Důkaz: provést na cvičení (včetně toho, že inkluze v (3) a (5) mohou být ostré).

Definice. Nechť $f : A \to B$.

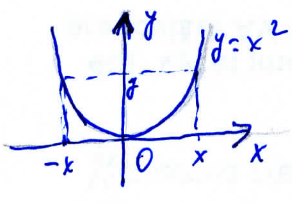
(i) Řekneme, že f je prosté (injektivní), jestliže platí
$$\forall x_1, x_2 \in D(f) : \left(f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \right).$$

(ii) Řekneme, že f je na (surjektivní), jestliže platí
$$\forall\, y \in B \;\exists\, x \in D(f) : f(x) = y.$$

(iii) Řekneme, že f je vzájemně jednoznačné (bijekce), jestliže f je prosté a na.

Poznámka. Snadno nahlédneme, že $f : A \to B$ je prosté právě tehdy, jestliže platí
$$\forall x_1, x_2 \in D(f) : \left(x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \right)$$

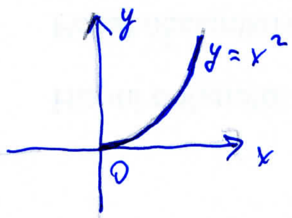
Př. 1) $A = \mathbb{R} = B$, $y = f(x) = x^2 \quad \forall x \in A$.



Pak: a) f není prosté (neb $f(x) = f(-x)$ $\forall x \in A$ a pro $x \neq 0$ je $x \neq -x$)

b) f není na (neb $R(f) = \langle 0, +\infty) \neq B$)

2) $A = \langle 0, +\infty) = B$, $y = f(x) = x^2 \quad \forall x \in A$.



Pak: a) f je prosté

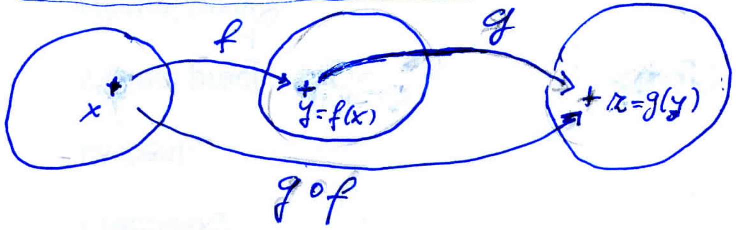
b) f je na

Definice. Nechť $f: A \to B$ a $X \subset A$. Pak zobrazení

$$f|_X := f \cap (X \times B) = \{[x,y] \in f;\ x \in X\}$$

se nazývá *restrikcí* (zúžením, parciálním zobrazením) zobrazení f na množinu X.

Definice. Nechť f a g jsou zobrazení. Pak množina všech uspořádaných dvojic $[x,z]$, takových, že $f(x)=y$ a zároveň $z=g(y)$, je zobrazením, které nazýváme *složeným zobrazením ze zobrazení f a g* a značíme symbolem $g \circ f$. (Zobrazení g nazýváme *vnějším* a f *vnitřním* zobrazením).



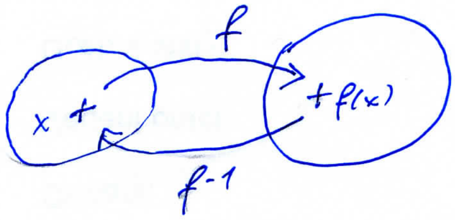
Poznámka. 1) Je-li $h = g \circ f$, pak zřejmě $h(x) = g(f(x))$ $\forall x \in D(h)$.

2) Obecně $g \circ f \neq f \circ g$.

Definice. Nechť f je *prosté* zobrazení. Pak zobrazení

$$f^{-1} := \{[y,x];\ [x,y] \in f\}$$

nazýváme *inverzním zobrazením k zobrazení f*.



Poznámka. Definice f^{-1} je *korektní*, tj. binární relace f^{-1} je skutečně zobrazením, neboť f je prosté.

Definice. Buď A množina. Pak zobrazení $id_A: A \to A$ dané předpisem $id_A(x) = x$ $\forall x \in A$ nazveme *identickým zobrazením* (množiny A).

(vlastnosti inverzního zobrazení)

Věta 4. Buď f prosté zobrazení. Pak platí:

(1) $D(f^{-1}) = R(f)$,

(2) $D(f) = R(f^{-1})$,

(3) f^{-1} je prosté,

(4) $(f^{-1})^{-1} = f$,

(5) $f^{-1} \circ f = id_{D(f)}$,

(6) $f \circ f^{-1} = id_{R(f)}$.

Důkaz: provést na cvičení.

Definice. Množina reálných čísel $\mathbb{R}$ je množina, na níž jsou definovány operace sčítání $+ : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, operace násobení $\cdot : \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ a lineární uspořádání $\leq$ tak, že jsou splněny tři níže uvedené skupiny vlastností I, II a III.

I. Vlastnosti sčítání, násobení a jejich vztah

S_1. $\forall x,y \in \mathbb{R}: \ x+y = y+x$ (komutativita sčítání)

S_2. $\forall x,y,z \in \mathbb{R}: \ (x+y)+z = x+(y+z)$ (asociativita sčítání)

S_3. $\exists n \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R}: \ x+n = x$ (tj: $x+0=x$) (n... nulový element, je určen jednoznačně a obvykle ho značíme 0)

S_4. $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists v \in \mathbb{R}: \ x+v = 0$ (tj: $x+(-x)=0$) (v... opačné číslo k číslu x, je určeno jednoznačně, značíme ho $-x$)

N_1. $\forall x,y \in \mathbb{R}: \ x\cdot y = y\cdot x$ (komutativita násobení)

N_2. $\forall x,y,z \in \mathbb{R}: \ (x\cdot y)\cdot z = x\cdot(y\cdot z)$ (asociativita násobení)

N_3. $\exists j \in \mathbb{R}\setminus\{0\}\ \forall x \in \mathbb{R}: \ x\cdot j = x$ (tj: $x\cdot 1 = x$) (tzv. jednotkový prvek, značíme ho 1)

N_4. $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}\ \exists z \in \mathbb{R}: \ x\cdot z = 1$ (tj: $x\cdot x^{-1}=1$) (tj: $x\cdot \frac{1}{x}=1$) (z... reciproká hodnota čísla x, značí se x^{-1} nebo $\frac{1}{x}$)

D. $\forall x,y,z \in \mathbb{R}: \ (x+y)\cdot z = x\cdot z + y\cdot z$ (distributivní zákon)

II. Vztah lineárního uspořádání a operací sčítání a násobení

U_1. $\forall x,y,z \in \mathbb{R}: \ x \leq y \Rightarrow x+z \leq y+z$

U_2. $\forall x,y \in \mathbb{R}: \ (0 \leq x \wedge 0 \leq y) \Rightarrow 0 \leq x\cdot y$

Poznámka. Vlastnosti I a II má i množina racionálních čísel $\mathbb{Q}$. Abychom zformulovali vlastnost III, která odlišuje $\mathbb{Q}$ od $\mathbb{R}$, potřebujeme následující definice.

ZDE JSEM SKONČIL PŘEDNÁŠKU - DODĚLÁM PŘÍŠTĚ

Definice. (i) Řekneme, že množina $M \subset \mathbb{R}$ je omezená shora (zdola), jestliže ex. $K \in \mathbb{R}$ tak, že platí

$$\forall x \in M: x \leq K \qquad (\forall x \in M: K \leq x).$$

Číslo K se nazývá horní (dolní) odhad (závora) množiny M.

(ii) Množina $M \subset \mathbb{R}$ se nazývá omezená, je-li omezená shora i zdola.

III. Axiom suprema

Buď $M \subset \mathbb{R}$, $M \neq \emptyset$, shora omezená množina. Pak $\exists\ s \in \mathbb{R}$ tak, že platí

AS_1. $\forall x \in M: x \leq s$

AS_2. $\forall s' \in \mathbb{R}, s' < s, \exists x \in M: s' < x$. *)

Definice. Číslo s s vlastnostmi AS_1, AS_2 nazýváme supremum množiny M (a značíme symbolem $\sup M$).

Poznámky. 1) Axiom suprema "říká", že mezi horními odhady existuje nejmenší horní odhad. Ukážeme si později, že v množině $\mathbb{Q}$ axiom suprema neplatí.

2) Supremum množiny je určeno jednoznačně.

Poznámky.

(i) $x - y := x + (-y)$

(ii) $xy := x \cdot y$

(iii) $\frac{x}{y} := x \cdot \frac{1}{y}$ $(\forall x, y \in \mathbb{R},\ y \neq 0)$

(iv) $\frac{x}{0}$ není definováno

(v) $x \geq y$ znamená totéž co $y \leq x$

(vi) čísla $x \in \mathbb{R}$, pro která $x > 0$, nazýváme kladnými,
— " — $x < 0$, — " — zápornými,
— " — $x \geq 0$, — " — nezápornými,
— " — $x \leq 0$, — " — nekladnými.

---

*) Je-li $x, y \in \mathbb{R}$, pak $x < y$ znamená totéž co $x \leq y \wedge x \neq y$.

Věta 5. (existence a jednoznačnost $(\mathbb{R},+,\cdot,\leq)$).

Existuje čtveřice $(\mathbb{R},+,\cdot,\leq)$ splňující podmínky uvedené v I – III. Taková čtveřice je jednoznačná v následujícím smyslu: Pokud čtveřice $(\mathfrak{R},\oplus,\odot,\leq)$ splňuje podmínky uvedené v I – III, pak existuje bijekce f množiny $\mathbb{R}$ na $\mathfrak{R}$ tak, že pro každé $x,y\in\mathbb{R}$ platí:

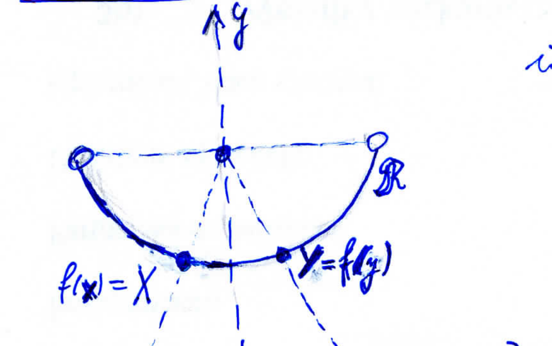
$$f(x+y)=f(x)\oplus f(y),$$
$$f(x\cdot y)=f(x)\odot f(y),$$
$$x\leq y \Rightarrow f(x)\leq f(y).$$

Důkaz vynecháme.

Poznámka. Je-li $M\subset\mathbb{R}$, $M\neq\emptyset$, M shora omezená a f bijekce z Věty 5, pak z definice suprema a z faktu, že f zachovává uspořádání ihned plyne, že

$$f(\sup M)=\sup f(M).$$

Př. k Větě 5.



f je bijekce množiny $\mathbb{R}$ na $\mathfrak{R}$,

if $X,Y\in\mathfrak{R}$, $x:=f^{-1}(X)$, $y:=f^{-1}(Y)$, then

$$X\oplus Y:=f(x+y)$$
$$X\odot Y:=f(x\cdot y)$$
$$X\leq Y \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} x\leq y$$

$(\mathfrak{R},\oplus,\odot,\leq)$ splňuje podmínky I–III

Z daných vlastností reálných čísel plynou další vlastnosti:

Věta 6 (další vlastnosti reálných čísel). Nechť $x, y \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Pak platí:

1) $x \cdot 0 = 0$
2) $(-1)x = -x$
3) $(-x)(-y) = xy$
4) $xy = 0 \Rightarrow (x = 0 \vee y = 0)$
5) $(xy)^{-1} = x^{-1}y^{-1}$, pokud $x \neq 0 \wedge y \neq 0$
6) $(0 < x \wedge 0 < y) \Rightarrow 0 < xy$
7) $0 \leq x < y \Rightarrow x^n < y^n$
8) $x \geq 0 \Rightarrow -x \leq 0$
9) $x^2 \geq 0$
10) $1 > 0$.

Důkaz: provést na cvičení.

Poznámka. Známá pravidla pro počítání se zlomky také plynou z daných axiomů. Např.

(*) $\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{c}{d} = \dfrac{ac}{bd}$, $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad + cb}{bd}$

$\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$, $d \neq 0$.

Dokažte rovnosti v (*) na cvičení.

Důsledky axiomu suprema

Definice. Buď $M \subset \mathbb{R}$, $M \neq \emptyset$, M zdola omezená. Pak číslo $c \in \mathbb{R}$ s vlastnostmi

(i) $\forall x \in M : c \leq x$,

(ii) $\forall c' \in \mathbb{R}, c' > c, \exists x \in M : x < c'$

nazýváme infimum množiny M (označení $\inf M$).

Poznámka. Infimum je určeno jednoznačně.

Věta 7 (o infimu). Buď $M \subset \mathbb{R}$ neprázdná a zdola omezená množina. Pak existuje $\inf M$.

Důkaz. $-M := \{-x;\ x \in M\}$. Zřejmě $-M \neq \emptyset$.
$-M$ je shora omezená (neb $-x \leq K \iff x \geq -K$)
Tedy dle AS ex. $s \in \mathbb{R}$ tak, že $s = \sup(-M)$.
Položme $c := -s = -\sup(-M)$. Pak $c = \inf M$.

Skutečně: 1) Víme, že $-x \leq s\ \forall x \in M \Rightarrow x \geq -s = c\ \forall x \in M$, a tedy c je dolní odhad mn. M.
2) Je-li $c' > c$, pak $-c' < -c = s$. Tedy ex. $x \in M$ tak, že $-c' < -x \Rightarrow c' > x$ (tedy c je nejmenší dolní odhad množiny M). □

Poznámka Vždy platí: Je-li $M \subset \mathbb{R}$, $M \neq \emptyset$, M omezená, pak $\inf M \leq \sup M$ (neb $\underset{\inf M}{c} \leq x \leq \underset{\sup M}{s}\ \forall x \in M$).
Rovnost nastane právě tehdy, když M je jednobodová.

Definice. Buď $M \subset \mathbb{R}$, $M \neq \emptyset$. Řekneme, že $a \in M$ je největší prvek (maximum) množiny M, jestliže
(nejmenší prvek) (minimum)
a je horní odhad množiny M.
(dolní odhad)
(Značení: $a = \max M$
$(\min M)$)

Poznámka. Buď $M \subset \mathbb{R}$. Existuje-li $\max M$ $(\min M)$, pak $\sup M = \max M$.
$(\inf M = \min M)$

Věta 8 (existence celé části) Pro každé $x \in \mathbb{R}$ existuje $k \in \mathbb{Z}$ tak, že platí $\boxed{k \leq x < k+1}$. (Číslo k nazýváme celou částí čísla x a značíme symbolem $[x]$.)

Důkaz: Buď $x \in \mathbb{R}$, $M := \{n \in \mathbb{Z};\ n \leq x\}$. $(*)$

Tedy x je horní odhad množiny M. $(2*)$

Tvrdím, že $M \neq \emptyset$: Kdyby $M = \emptyset$, pak $\forall n \in \mathbb{Z}$ platí $n > x$.

Odtud plyne, že neprázdná množina $\mathbb{Z}$ je zdola omezená. Proto existuje $c \in \mathbb{R}$ tak, že $c = \inf \mathbb{Z}$. $(3*)$

$\Rightarrow \quad c \leq n \ \forall n \in \mathbb{Z}$.

Protože $\forall n \in \mathbb{Z}$ je $n-1 \in \mathbb{Z}$, musí platit

$$c \leq n-1 \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

$$\Updownarrow$$

$$c+1 \leq n \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad \text{- spor s } (3*)$$

Tedy $M \neq \emptyset$. $(4*)$

Z $(2*)$ a $(4*)$ plyne, že existuje $s := \sup M$.

Tudíž $\quad n \underset{\text{dle def. sup } M}{\leq} s \overset{\text{dle } (2*)}{\leq} x \quad \forall n \in M \quad (5*)$

Položme $s' := s - 1$. Pak dle definice suprema existuje $k \in M$ $(6*)$

tak, že $\quad s' = s - 1 < k$

$$\Downarrow$$

$$s < k+1 \overset{(5*) \text{ a } (6*)}{\Rightarrow} k+1 \notin M \overset{(*)}{\Leftrightarrow} k+1 > x$$

Dále dle $(5*)$ a $(6*)$ je $k \leq x$.

Celkem tedy $\quad k \leq x < k+1$. $\square$

Věta 9 (Archimédova vlastnost). Ke každému $x \in \mathbb{R}$ existuje $n \in \mathbb{N}$ tak, že $x < n$.

Důkaz plyne z Věty 8 (položme $n := \max\{1, [x]+1\}$).

Věta 10 (o hustotě $\mathbb{Q}$ v $\mathbb{R}$). Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Pak existuje $r \in \mathbb{Q}$ tak, že $a < r < b$.

Důkaz. Dle Věty 9 ex. $n \in \mathbb{N}$ tak, že $\frac{1}{b-a} < n$.

Tedy $\quad 1 + na < nb \Leftrightarrow a + \frac{1}{n} < b$.

Položme $\quad r := \frac{[an]+1}{n} \quad (\Rightarrow r \in \mathbb{Q})$. Pak

$$a = \frac{na}{n} < \frac{[na]+1}{n} = r < \frac{na+1}{n} = a + \frac{1}{n} < b. \ \square$$

Věta 11 (o n-té odmocnině). Ke každému $x \in \langle 0, +\infty)$ a ke každému $n \in \mathbb{N}$ existuje jediné $y \in \langle 0, +\infty)$, splňující $y^n = x$. //.

Věta 11 (o n-té odmocnině). Ke každému $x \in \langle 0, +\infty)$ a ke každému $n \in \mathbb{N}$ existuje jediné $y \in \langle 0, +\infty)$, splňující $y^n = x$.

ZDE JSEM SKONČIL PŘEDNÁŠKU, DŮKAZ UDĚLAT NA CVIČENÍ,

Důkaz. Pro $n = 1$ nebo $x = 0$ je tvrzení zřejmé. Předpokládejme, že $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, a $x > 0$.
Označme
$$M := \{z \in (0, +\infty);\ z^n \geq x\}.$$

Pak $M \neq \emptyset$, neboť $z := \max\{1, x\} \in M$.

Skutečně: Je-li $x \in (0, 1]$, pak $z = 1 \Rightarrow z^n = 1 \geq x \Rightarrow z \in M$.

Je-li $x \in (1, +\infty)$, pak $z = x \Rightarrow z^n = x^n > x \Rightarrow z \in M$.

neboť
$$\left.\begin{array}{c} 1 < x \\ \Downarrow \\ x < x^2 \\ \Downarrow \\ \vdots \\ x^{n-2} < x^{n-1} \\ \Downarrow \\ x^{n-1} < x^n \end{array}\right\} \Rightarrow x < x^n$$

Dále M je zdola omezená (0 je dolní odhad množiny M).

Tedy existuje $y = \inf M$ (a platí $y \geq 0$)

I. Předpokládejme, že $y^n > x$. Pak $y > 0$.

Lze tedy volit $h \in \mathbb{R}$ tak, že
$$0 < h < \min\left\{\frac{y^n - x}{n y^{n-1}}, y\right\}.$$

Potom platí
$$(y-h)^n = y^n - [y^n - (y-h)^n] \overset{*)}{=} y^n - \underbrace{[y - (y-h)]}_{=h} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} y^{n-1-k}(y-h)^k$$
$$= y^n - h \sum_{k=0}^{n-1} y^{n-1-k} \underbrace{(y-h)^k}_{< y^k} > y^n - h \sum_{k=0}^{n-1} y^{n-1}$$
$$= y^n - \underbrace{h n y^{n-1}}_{< y^n - x \text{ dle volby } h} > y^n - (y^n - x) = x,$$

tj. $(y-h)^n > x$. Proto $y - h \in M$. Tedy $y - h \geq \inf M = y$ – spor.

---

*) $y^n - x^n = (y - x) \sum_{k=0}^{n-1} y^{n-1-k} x^k$

Tedy předpoklad $y^n > x$ nemůže platit, tj. $y^n \leq x$.

II. Předpokládejme, že $y^n < x$. Zvolme $h \in \mathbb{R}$ tak, aby

$$0 < h < \min\left\{ \frac{x-y^n}{n(y+1)^{n-1}}, 1 \right\}.$$

Potom platí

$$(y+h)^n = y^n + \left[(y+h)^n - y^n\right] =$$

$$= y^n + \underbrace{\left[(y+h)-y\right]}_{=h} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{y^{n-1-k}}_{<(y+1)^{n-1-k}} \underbrace{(y+h)^k}_{<(y+1)^k} =$$

$$= y^n + h \cdot \sum_{k=0}^{n-1} (y+1)^{n-1} = y^n + \underbrace{hn(y+1)^{n-1}}_{< x - y^n \text{ dle volby } h} <$$

$$< y^n + x - y^n = x,$$

tj. $(y+h)^n < x$.

$$\Downarrow$$

$$(y+h)^n < x \leq z^n \quad \forall z \in M$$

↑ dle definice množiny M

$\Rightarrow$ $y+h < z \quad \forall z \in M$

$\Rightarrow$ $y+h$ je dolní odhad množiny M. – spor, neboť $y = \inf M$ (tedy y je největší dolní odhad)

Musí tedy nutně být $y^n = x$.

Jednoznačnost plyne z platnosti implikace 7) ve Větě 6.

□

5. přednáška MA 1, ZS, šk. r. 2015/16, 20. 10. 2015

Definice. Je-li $x \in \mathbb{R}$, pak definujeme absolutní hodnotu čísla x předpisem

$$|x| := \max\{x, -x\}. \qquad \left(\Rightarrow |x| \geq x, \; |x| \geq -x \right)$$

Věta 12 (vlastnosti absolutní hodnoty)

1) $x \in \mathbb{R}: \quad |x| \geq 0,$

2) $x \in \mathbb{R}: \quad |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0,$

3) $x, y \in \mathbb{R}: \quad |xy| = |x| \cdot |y|,$

4) $x, y \in \mathbb{R},\ y \neq 0: \quad \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|},$

5) $x, y \in \mathbb{R}: \quad |x+y| \leq |x| + |y|$

6) $x, y \in \mathbb{R}: \quad \big| |x| - |y| \big| \leq |x-y|$

Důkaz: ad 5)

$$x+y \geq 0 \Rightarrow |x+y| = x+y \leq |x| + |y|,$$

$$x+y < 0 \Rightarrow |x+y| = -(x+y) = -x + (-y) \leq |x| + |y|.$$

ad 6) Dle 5) platí $|a+b| \leq |a| + |b| \quad \forall a, b \in \mathbb{R} \quad (*)$

Buď $x, y \in \mathbb{R}$; volím $a = y$, $b = x - y \Rightarrow a + b = x$ a dle $(*)$ máme

$$|x| \leq |y| + |x-y| \quad \Rightarrow \quad |x| - |y| \leq |x-y| \quad (2*).$$

Záměnou rolí x a y v $(2*)$ dostaneme $|y| - |x| \leq |y-x| = |x-y|$,
Odtud a z $(2*)$ plyne $\big||x| - |y|\big| \leq |x-y|$.

"Zbytek věty" dokázat na cvičení. %.

Kromě množin $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ a $\mathbb{Q}$ budeme nejčastěji pracovat s intervaly.

Definice. Je-li $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$, definujeme množiny:

$\langle a, b \rangle := \{x \in \mathbb{R};\ a \leq x \leq b\}$

$\langle a, b) := \{x \in \mathbb{R};\ a \leq x < b\}$

$\langle a, +\infty) := \{x \in \mathbb{R};\ a \leq x\}$

$(a, b\rangle := \{x \in \mathbb{R};\ a < x \leq b\}$

$(-\infty, b\rangle := \{x \in \mathbb{R};\ x \leq b\}$

$(a, b) := \{x \in \mathbb{R};\ a < x < b\}$

$(a, +\infty) := \{x \in \mathbb{R};\ a < x\}$

$(-\infty, b) := \{x \in \mathbb{R},\ x < b\}$, $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$.

Tyto množiny nazýváme intervaly.

Množiny (a,b), $(a,+\infty)$, $(-\infty,b)$ a $(-\infty,+\infty)$ nazýváme otevřenými intervaly, množinu $\langle a, b\rangle$ nazýváme uzavřeným intervalem a množiny $\langle a,b)$, $(a,b\rangle$, $(-\infty,b\rangle$ a $\langle a,+\infty)$ nazýváme polouzavřenými intervaly.

pojmy: počáteční bod intervalu
koncový bod intervalu
krajní body intervalu

nevyrhlý interval
(nedegenerovaný)

obsahuje alespoň 2 body

Poznámka. $\emptyset = (a,a)$, kde $a \in \mathbb{R}$
$\{a\} = \langle a, a\rangle \ \forall a \in \mathbb{R}$

Komplexní čísla

Definice. Množinou komplexních čísel $\mathbb{C}$ rozumíme množinu všech uspořádaných dvojic $[a,b]$, kde $a, b \in \mathbb{R}$, v níž definujeme:

1) rovnost: $[a_1, b_1] = [a_2, b_2] \Leftrightarrow (a_1 = a_2 \wedge b_1 = b_2)$

2) sčítání: $[a_1, b_1] + [a_2, b_2] = [a_1 + a_2, b_1 + b_2]$

3) násobení: $[a_1, b_1] \cdot [a_2, b_2] = [a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + b_1 a_2]$

$\forall [a_1, a_2], [b_1, b_2] \in \mathbb{C}$.

S čísly tvaru $[a,0]$, $a \in \mathbb{R}$, se počítá naprosto stejně jako s reálnými čísly:

$$[a_1,0]+[a_2,0]=[a_1+a_2,0]$$

$$[a_1,0]\cdot[a_2,0]=[a_1a_2,0].$$

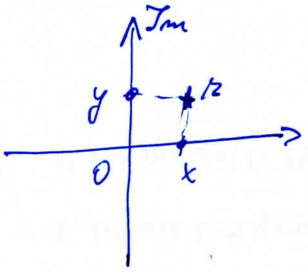
Proto $[a,0] \equiv a \quad \forall a \in \mathbb{R}$.

Dále označíme $[0,1] =: i$.

Pak $\underline{\underline{[a,b]}} = [a,0]+[0,b] = [a,0]+\underbrace{[0,1][b,0]}_{[0,b]} = \underline{\underline{a+ib}}$

$\forall a,b \in \mathbb{R}$.

<u>kartézský tvar komplexního čísla</u>



$$z=[x,y]=x+iy, \quad x,y \in \mathbb{R}$$

$$x=\operatorname{Re} z, \quad y=\operatorname{Im} z$$

$z=x+iy$, $x,y \in \mathbb{R}$

$|z| := \sqrt{x^2+y^2}$ ... <u>abs. hodnota kompl. čísla</u> z

$\bar{z} := x-iy$ ... <u>číslo komplexně sdružené</u>

$\overline{(\bar{z})} = z$

$|z|^2 = z\cdot\bar{z}$

$\overline{z_1+z_2} = \bar{z}_1+\bar{z}_2 \qquad \forall z_1,z_2 \in \mathbb{C}$

$\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1\cdot\bar{z}_2 \qquad \forall z_1,z_2 \in \mathbb{C}$

$$\frac{a+ib}{c+id} = \frac{(a+ib)(c-id)}{(c+id)(c-id)} = \frac{(a+ib)(c-id)}{c^2+d^2} = \frac{ac+bd+i(bc-ad)}{c^2+d^2}$$

$\forall a+ib,\ c+id \in \mathbb{C},\quad c+id \neq 0.$

<u>$\mathbb{C}$ je těleso, nelze ho uspořádat</u> (neb $i^2=[0,1]\cdot[0,1]=-1$)

Reálná funkce reálné proměnné

Definice Nechť $A, B \subset \mathbb{R}$ a $f: A \to B$ je zobrazení. Pak f se nazývá **reálná funkce reálné proměnné**.

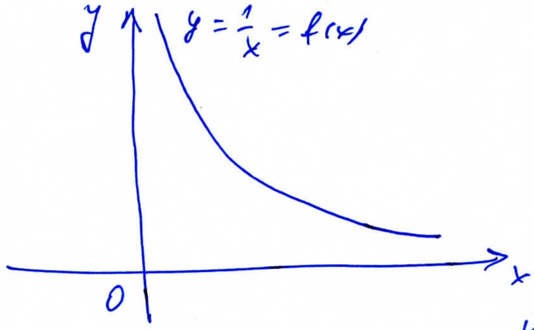
Buď $M \subset D(f)$. Pak f se nazývá:

(i) **omezená shora (zdola) na množině M**, je-li $f(M)$ omezená shora (zdola);

(ii) **omezená na množině M**, je-li $f(M)$ omezená.

(iii) Není-li f na množině M omezená shora (omezená zdola) (omezená), říkáme, že f je na množině M **shora neomezená** (**zdola neomezená**) (**neomezená**).

Př. $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in (0, +\infty)$, $A = M = B = (0, +\infty)$



f je zdola omezená na M
f není shora —— " ——
f není omezená na M.

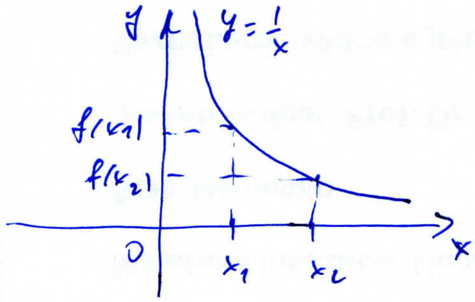
Definice. Buď $J \subset \mathbb{R}$ nezvrhlý interval, $f: J \to \mathbb{R}$, $D(f) = J$.
Jestliže platí:

- $\forall x_1, x_2 \in J: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$, říkáme, že fce f je **rostoucí v intervalu J**.
- $\forall x_1, x_2 \in J: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$, říkáme, že fce f je **klesající v intervalu J**.
- $\forall x_1, x_2 \in J: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$, říkáme, že fce f je **neklesající v J**.
- $\forall x_1, x_2 \in J: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$, říkáme, že fce f je **nerostoucí v J**.

Funkce **monotónní v J** jsou fce, které jsou rostoucí,
nebo nerostoucí,
nebo klesající,
nebo neklesající v J.

Funkce **ryze monotónní v J** — fce rostoucí v J
fce klesající v J.

Př. $f(x)=\frac{1}{x}$, $J=(0,+\infty)$.



f je klesající v J

Mohutnost množin

Definice. Říkáme, že množiny A, B mají **stejnou mohutnost** (označení $A \approx B$), existuje-li **bijekce** množiny A **na** množinu B.

Říkáme, že množina A **má mohutnost menší nebo rovnou mohutnosti množiny B** (označení $A \precsim B$), existuje-li **prosté** zobrazení množiny A **do** B.

Píšeme $A \prec B$, jestliže $A \precsim B$ a neplatí $A \approx B$.

Definice. Množina A se nazývá **konečná**, jestliže $A = \emptyset$, nebo existuje $n \in \mathbb{N}$ tak, že $X \approx \{1, 2, \dots, n\}$.
Řekneme, že **množina je nekonečná**, pokud není konečná.
Řekneme, že množina A je **spočetná**, jestliže A je konečná, nebo $A \approx \mathbb{N}$.

Nekonečná množina, která není spočetná, se nazývá **nespočetná**.

Př: $M = \{x;\ x = 2n,\ n \in \mathbb{N}\}$ (množina sudých kladných čísel)

$f(n) := 2n,\ n \in \mathbb{N}$ ... bijekce $\mathbb{N}$ na M.

Tedy $M \approx \mathbb{N}$ a přitom $M \subsetneq \mathbb{N}$.

(To u konečných množin není možné!)

Věta 13 (vlastnost relace $\approx$). Nechť A, B, C jsou množiny. Pak platí:

(i) $A \approx A$,

(ii) $A \approx B \Rightarrow B \approx A$,

(iii) $(A \approx B \wedge B \approx C) \Rightarrow A \approx C$.

Důkaz. ad (i): id_A je bijekce množiny A na A, a tedy $A \approx A$.

ad (ii): Je-li f bijekce množiny A na B, pak f^{-1} je bijekce množiny B na A.

ad (iii): Je-li f bijekce množiny A na B a g bijekce množiny B na C, pak $g \circ f$ je bijekce množiny A na C. □

Poznámka. Z Věty 13 plyne: Je-li $\mathcal{S}$ nějaký systém množin, pak binární relace $\approx$ na $\mathcal{S}$ je ekvivalence.

Obdobně se dokáže následující tvrzení:

Věta 14. Nechť A, B, C jsou množiny. Pak platí:

(i) $A \precsim A$,

(ii) $(A \precsim B \wedge B \precsim C) \Rightarrow A \precsim C$.

Důkaz ... domácí úkol.

Z Věty 14 a z následující věty plyne: Je-li $\mathcal{S}$ nějaký systém množin, pak binární relace $\precsim$ na $\mathcal{S}$ je částečným uspořádáním.

Věta 15 (Cantor-Bernstein). Nechť A a B jsou množiny. Jestliže $A \precsim B$ a $B \precsim A$, pak $A \approx B$.

Důkaz vynechám

Věta 16 (Cantor). Je-li X množina, pak $X \prec \exp X$. *)

Důkaz: vynechán

---

*) Mohutnost prázdné množiny se ztotožňuje s číslem 0.

Lemma 17 (o mohutnosti obrazu). Nechť A, B jsou množiny a $f: A \to B$, $A = D(f)$. Pak $f(A) \precsim A$.

Důkaz. Buď $b \in f(A)$. Pak ex. $a = g(b) \in A$ tak, že $b = f(a) = f(g(b))$.

prvek a zvolíme k b, tedy $a = g(b)$

Zobrazení $g: f(A) \to A$, $D(g) = f(A)$, je prosté, neboť:

Je-li $g(b_1) = g(b_2)$ pro $b_1, b_2 \in f(A)$, pak

$$b_1 = f(g(b_1)) = f(g(b_2)) = b_2.$$

dle def. zobrazení g.

Tedy $f(A) \precsim A$. □

Lemma 18. Zobrazení $\xi: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $D(\xi) = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, dané předpisem

(1) $$\xi([n,m]) = (n+m)^2 + m \quad \forall [n,m] \in D(\xi)$$

je prosté.

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ je spočetná

Důkaz. Je-li

(2) $$\xi([n_1,m_1]) = \xi([n_2,m_2]) \text{ pro } [n_i,m_i] \in D(\xi),\ i = 1,2,$$

pak

$$\underbrace{(n_1+m_1+1)^2}_{(n_1+m_1)^2 + 2(n_1+m_1)+1} > (n_1+m_1)^2 + m_1 = (n_2+m_2)^2 + m_2 > (n_2+m_2)^2.$$

Tedy $n_1+m_1+1 > n_2+m_2 \Rightarrow n_1+m_1 \geq n_2+m_2$.

Záměnou rolí $[n_1,m_1]$ a $[n_2,m_2]$ analogicky dostanu, že $n_1+m_1 = n_2+m_2$.

Proto platí

(3) $$n_1+m_1 = n_2+m_2.$$

Odtud, z (2) a (1) pak plyne, že

(4) $$m_1 = m_2.$$

Z (4) a (3) dostáváme, že $n_1 = n_2$. Tedy $[n_1,m_1] = [n_2,m_2]$.

□

Lemma 19 (o podmnožině spočetné množiny). Nechť A je spočetná množina a $B \subset A$. Pak B je spočetná.

Důkaz. Protože $B \subset A$, je identické zobrazení množiny B do A je prosté. Tedy $B \precsim A$. Protože A je spočetná, platí $A \precsim \mathbb{N}$. Použitím tranzitivnosti relace $\precsim$ dostáváme $B \precsim \mathbb{N}$. $\square$

Poznámka 20. $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \approx \mathbb{N}$.

Důkaz. Dle Lemmatu 18 platí

(1) $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \precsim \mathbb{N}$.

Protože $\varphi([1,n]) := n \quad \forall [1,n] \in \{1\} \times \mathbb{N}$ je bijekce množiny $\{1\} \times \mathbb{N}$ na $\mathbb{N}$, platí

(2) $\{1\} \times \mathbb{N} \approx \mathbb{N}$.

Dále $\{1\} \times \mathbb{N} \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, a tedy

(3) $\{1\} \times \mathbb{N} \precsim \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Z (2) a (3) plyne

(2) $\mathbb{N} \precsim \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Z (1), (2) a Věty 15 pak dostáváme $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \approx \mathbb{N}$. $\square$

Lemma 21 (o obrazu spočetné množiny). Nechť A je spočetná množina, B je množina a $f: A \to B$, $A = D(f)$. Pak $f(A)$ je spočetná množina.

Důkaz. Dle Lemmatu 17 platí, že $f(A) \precsim A$. Protože A je spočetná, je $A \precsim \mathbb{N}$. Tudíž (dle tranzitivnosti relace $\precsim$) platí $f(A) \precsim \mathbb{N}$. $\square$

Věta 22 (o spočetném sjednocení spočetných množin)
Nechť $\mathcal{A}$ je spočetná množina a nechť pro každé $\alpha \in \mathcal{A}$ je množina A_α spočetná. Pak $\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} A_\alpha$ je spočetná množina.

Důkaz. Protože $\mathcal{A}$ je spočetná množina, ex. $\varphi : \mathbb{N} \xrightarrow{na} \mathcal{A}$, které je prosté (pokud $\mathcal{A} = \emptyset$, je $D(\varphi) = \emptyset$)
Pro každé $\alpha \in \mathcal{A}$ je množina A_α spočetná, tedy ex. $g_\alpha : \mathbb{N} \xrightarrow{na} A_\alpha$, které je prosté (pokud $A_\alpha = \emptyset$, je $D(g_\alpha) = \emptyset$)
Definujme zobrazení $\psi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} A_\alpha$ předpisem

$$\psi(n,m) := g_{\varphi(n)}(m) \quad \forall n \in \varphi_{-1}(\mathcal{A}) \ \forall m \in (g_{\varphi(n)})_{-1}(A_{\varphi(n)}).$$

(pokud $\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} A_\alpha = \emptyset$ je vše triviální)
Zobrazení ψ je na, neboť $\forall x \in \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} A_\alpha$ ex. $\alpha \in \mathcal{A}$ takové, že $x \in A_\alpha$.
$\Downarrow$ ex. $n \in \mathbb{N}$ tak, že $\varphi(n) = \alpha$
$\Downarrow$ ex. $m \in \mathbb{N}$ tak, že platí $g_\alpha(m) = x$
Tedy $x = g_{\varphi(n)}(m) = \psi(n,m)$.

Protože $D(\psi) \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ a $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ je spočetná, je i $D(\psi)$ spočetná množina. Dále $\psi(D(\psi)) = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} A_\alpha$, a tedy $\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} A_\alpha$ je spočetná množina dle Lemmatu 21. $\square$

Lemma 23. (o kartézském součinu spočetných množin).
Jsou-li A_1, A_2 spočetné množiny, pak množina $A_1 \times A_2$ je spočetná.

Důkaz. Zřejmě $A_1 \times A_2 = \bigcup_{a_1 \in A_1} \{a_1\} \times A_2$. Dále
(spočetné sjednocení)

pro každé $a_1 \in A_1$ je $\{a_1\} \times A_2$ spočetná množina (neb $\varphi(a_2) := [a_1, a_2]$ $\forall a_2 \in A_2$ je bijekce množiny A_2 na množinu $\{a_1\} \times A_2$). Tedy $A_1 \times A_2$ je spočetná podle V6g22. $\square$

Př.: 1) $\mathbb{Z}$ je spočetná
2) $\mathbb{Q}$ je spočetná
3) $(0,1)$ je nespočetná
4) $\mathbb{R}$ je nespočetná
5) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ je nespočetná

(1)–(5): uděláno na přednášce

6) $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ...... dokázat na cvičení

Posloupnosti reálných čísel.

Definice. Posloupností reálných čísel nazýváme jakékoliv zobrazení množiny $\mathbb{N}$ do $\mathbb{R}$.

Značení:

$a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $\quad a(n) =: a_n$.

$\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\quad \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\quad \{a_n\}$.

Číslo a_n (pro pevné n) se nazývá n-tý člen posloupnosti $\{a_n\}$.

Př.: 1) $a_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$

2) $a_n = \frac{n}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$

3) $a_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$

4) $a_1 = 1$, $a_{n+1} := a_n + 1$, pro $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$.

$\boxed{\text{rekurentní předpis}}$

5) $a_1 = 1$, $a_2 = 1$,
$a_n = a_{n-2} + a_{n-1}$ $\forall n \geq 3$, $n \in \mathbb{N}$

KONEC 5. přednášky.

7. přednáška MA1, ZS, šk. r. 2015/16, 27. 10. 2015

Definice. Buď $\{a_n\}$ posl. reálných čísel. Řekneme, že posl. $\{a_n\}$ je:

1) **shora omezená**, je-li shora omezená množina $M := \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{a_n\}$ (množina všech členů posl. $\{a_n\}$),
2) **zdola omezená**, je-li zdola —"— —"— ,
3) **omezená**, je-li omezená —"— ,
4) **rostoucí**, jestliže $a_n < a_{n+1}$ $\forall n\in\mathbb{N}$,
5) **klesající**, —"— $a_{n+1} < a_n$ $\forall n\in\mathbb{N}$,
6) **neklesající**, —"— $a_n \le a_{n+1}$ $\forall n\in\mathbb{N}$,
7) **nerostoucí**, —"— $a_{n+1} \le a_n$ $\forall n\in\mathbb{N}$,
8) **monotónní**, jestliže platí některá z podmínek 4) – 7),
9) **ryze monotónní**, —"— —"— —"— 4) a 5).

(Vlastní) limita posloupnosti

Definice. Nechť $\{a_n\}$ je posl. reálných čísel a $A\in\mathbb{R}$. Řekneme, že **A je limitou posl. $\{a_n\}$**, jestliže

(*) $\forall \varepsilon>0\ \exists n_0\in\mathbb{N}\ \forall n\in\mathbb{N},\ n\ge n_0 : |a_n - A| < \varepsilon$.

Platí-li (*), píšeme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ (nebo $a_n \to A$).

Dále říkáme, že $\{a_n\}$ je **konvergentní**, jestliže ex. $A\in\mathbb{R}$ tak, že $a_n \to A$.

Nakreslit obrázek!

Př. $a_n = \frac{1}{n} \to 0$

Důkaz. Buď $\varepsilon>0$. Máme dokázat, že $\exists n_0\in\mathbb{N}$ tak, že $\forall n\in\mathbb{N},\ n\ge n_0$, platí $|\frac{1}{n} - 0| < \varepsilon$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{1}{n} < \varepsilon \iff \frac{1}{\varepsilon} < n.$$

Tedy stačí volit $n_0 = [\frac{1}{\varepsilon}] + 1$. ($\Rightarrow n_0 > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{1}{n_0} < \varepsilon$)

Pak $\forall n\in\mathbb{N},\ n\ge n_0$ máme $\frac{1}{n} \le \frac{1}{n_0} < \varepsilon$. $\square$

Cv. Dokažte (z definice), že $\frac{n}{n+1} \to 1$.

Poznámky. 1) Změna konečného počtu členů posloupnosti neovlivní ani konvergenci ani hodnotu limity této posloupnosti.

2) Nechť $\lim_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}$ a $k \in \mathbb{N}$. Buď

$$b_n := a_{n-k} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ n > k,$$

$$c_n := a_{n+k} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Pak $\lim_{n\to\infty} b_n = A$, $\lim_{n\to\infty} c_n = A$.

(o jednoznačnosti limity)

Věta 24. Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.

Důkaz. Předpokládejme, že $a_n \to A_1 \wedge a_n \to A_2$, kde $A_1, A_2 \in \mathbb{R}$. Pak

$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_1 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_1 : |a_n - A_1| < \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_2 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_2 : |a_n - A_2| < \varepsilon$

Buď $\varepsilon > 0 \ldots \exists n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tak, že $|a_n - A_1| < \varepsilon\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_1$

$|a_n - A_2| < \varepsilon\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_2$.

Tedy platí $|A_1 - A_2| \leq \underbrace{|A_1 - a_n|}_{<\varepsilon} + \underbrace{|a_n - A_2|}_{<\varepsilon} < 2\varepsilon$, kde $n \in \mathbb{N}$ je nějaké číslo splňující $n \geq \max\{n_1, n_2\}$. Tedy $|A_1 - A_2| < 2\varepsilon$. Protože $\varepsilon > 0$ bylo libovolné, je $A_1 = A_2$. □

Lemma 25. Nechť $K > 0$, $A \in \mathbb{R}$ a $\{a_n\}$ je posl. reálných čísel. Jestliže

(2*) $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0 : |a_n - A| < K\varepsilon$,

pak $a_n \to A$.

Důkaz. Buď $\overline{\varepsilon} > 0$. Zvolme $\varepsilon = \frac{\overline{\varepsilon}}{K}$. Pak dle (2*) platí

$\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0 : |a_n - A| < K\varepsilon = \overline{\varepsilon}$.

Tedy platí

$\forall \overline{\varepsilon} > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0 : |a_n - A| < \overline{\varepsilon}$,

tj. $a_n \to A$. □

Věta 26 (o omezenosti konvergentní posl.) Každá konvergentní posloupnost je omezená.

Důkaz. Nechť $a_n \to A$. Zvolme $\varepsilon = 1$. Pak ex. $n_0 \in \mathbb{N}$, $n_0 \geq 1$, tak, že $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : |a_n - A| < 1$. Tedy platí

$|a_n| \leq |a_n - A| + |A| < 1 + |A| \quad \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0$.

Zvolíme-li $K := \max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{n_0 - 1}|, 1 + |A|\}$, pak platí

$|a_n| \leq K \quad \forall n \in \mathbb{N}$. □

Definice. Nechť $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je posloupnost reálných čísel. Jestliže $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ je rostoucí posl. přirozených čísel, pak posloupnost $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ nazýváme vybranou posloupností z posloupnosti $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. (Někdy se říká, že $\{a_{n_k}\}$ je podposloupností posl. $\{a_n\}$.)

Př. $n_k = 2k$ .... $\{a_{2k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ .... $a_2, a_4, a_6, \dots$

$n_k = 2k-1$ ... $\{a_{2k-1}\}_{k\in\mathbb{N}}$ ... $a_1, a_3, a_5, \dots$

$n_k = k^2+1$ ... $\{a_{2k^2+1}\}_{k\in\mathbb{N}}$ .... $a_3, a_9, a_{19}, \dots$

Věta 27 (o limitě vybrané posloupnosti). Nechť $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je posl. reálných čísel a nechť $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, kde $A\in\mathbb{R}$. Je-li $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ rostoucí posl. přirozených čísel, pak $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = A$.

Důkaz. Buď $\varepsilon>0$. Protože $a_n \to A$, platí

$$\exists n_0\in\mathbb{N}\ \forall n\in\mathbb{N},\ n\geq n_0 : |a_n - A| < \varepsilon .$$

Je-li $\underbrace{k\geq n_0}_{k\in\mathbb{N},}$, je $n_k \geq k \geq n_0$, a tedy $|a_{n_k} - A| < \varepsilon$.

Ověřili jsme, že platí

$$\forall\varepsilon>0\ \exists n_0\in\mathbb{N}\ \forall k\in\mathbb{N},\ k\geq n_0 : |a_{n_k} - A| < \varepsilon ,$$

tj., že $a_{n_k}\to A$. $\square$

Př. $a_n = (-1)^n$, $n\in\mathbb{N}$. Z Věty 27 plyne, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ neexistuje, neboť $\lim\limits_{k\to\infty} a_{2k} = 1$ a $\lim\limits_{k\to\infty} a_{2k-1} = -1$.

Věta 28 (Aritmetika limit). Nechť $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ a $\lim_{n\to\infty} b_n = B$, kde $A, B \in \mathbb{R}$. Pak platí:

(i) $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = A + B$;

(ii) $\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = A \cdot B$;

(iii) je-li $B \neq 0$, pak $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$.

Důkaz. ad (i): Platí

(1) $|(a_n + b_n) - (A+B)| = |a_n - A + b_n - B| \leq |a_n - A| + |b_n - B| \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Buď $\varepsilon > 0$. Pak

(2) $\exists n_1 \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_1 : |a_n - A| < \varepsilon$,

(3) $\exists n_2 \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_2 : |b_n - B| < \varepsilon$.

Tedy $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0 := \max\{n_1, n_2\}$, dle (1)–(3) platí

$$|(a_n + b_n) - (A+B)| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon,$$

což dokazuje (dle Lemmatu 25) tvrzení (i).

ad (ii): Platí

$$|a_n b_n - AB| = |a_n b_n - A b_n + A b_n - AB| \leq |a_n b_n - A b_n| + |A b_n - AB|$$
$$= |b_n|\,|a_n - A| + |A|\,|b_n - B| \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Protože $|b_n| \leq K \ \forall n \in \mathbb{N}$ (dle Věty 26), dostáváme
$(K \in \mathbb{R})$

(4) $$|a_n b_n - AB| \leq K|a_n - A| + |A|\,|b_n - B| \leq$$
$$\leq \underbrace{\max\{K, |A|\}}_{=:C} (|a_n - A| + |b_n - B|) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Buď $\varepsilon > 0$. Pak

(5) $\exists n_1 \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_1 : |a_n - A| < \varepsilon$,

(6) $\exists n_2 \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_2 : |b_n - B| < \varepsilon$.

Tedy $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 := \max\{n_1, n_2\}$, dle (4)–(6) platí

$$|a_n b_n - AB| < C(\varepsilon + \varepsilon) = 2C\varepsilon,$$

což dokazuje (ii).

ad (iii). Nejprve dokážeme, že

(7) $$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{B}.$$

Platí

(8) $$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{B}\right| = \left|\frac{B-b_n}{b_n B}\right| = \frac{|b_n - B|}{|b_n|\,|B|} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \text{ pro něž } b_n \neq 0.$$

Z (7) plyne

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 : |b_n - B| < \frac{|B|}{2}.$$

Odtud $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, máme

$$|b_n| = |B - (B - b_n)| \geq |B| - |B - b_n| \geq |B| - \frac{|B|}{2} = \frac{|B|}{2}.$$

Odtud a z (8) dostáváme

(9) $$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{B}\right| = \frac{|b_n - B|}{|b_n|\,|B|} \leq \frac{2}{|B|^2} |b_n - B| \quad \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0.$$

Buď $\varepsilon > 0$. Z (7) plyne

$$\exists n_1 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_1 : |b_n - B| < \varepsilon.$$

Odtud a z (9) pak máme

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{B}\right| \leq \frac{2}{|B|^2}\varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq \max\{n_0, n_1\},$$

což dokazuje (7). Tvrzení (iii) nyní plyne z (7) a (ii).

□

Př: $$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{n^2-4n+1} =$$

TOTO JSEM ZATÍM NEUDĚLAL

1) Jmenovatel $n^2 - 4n + 1 = n(n-4) + 1 \geq 1$ $\forall n \geq 4$, tedy zlomek $\frac{n^2+1}{n^2-4n+1}$ je definován $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$.

2) Čitatel není shora omezen, tedy nemá vlastní limitu

3) Jmenovatel rovněž není shora omezen (neb $n(n-4)+1 \geq n \cdot 1 + 1 > n$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 5$)

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^2}}{\cancel{n^2}} \cdot \frac{1 + \frac{1}{n^2}}{1 - \frac{4}{n} + \frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{1}{n^2}}{1 - \frac{4}{n} + \frac{1}{n^2}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \overset{\to 0}{\frac{1}{n^2}}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 - \underset{\to 0}{\frac{4}{n}} + \underset{\to 0}{\frac{1}{n^2}}\right)} =$$

$$= \frac{1}{1} = 1.$$

Věta 2.9 (o limitě součinu omezené posl. a posl. s limitou 0).

Nechť $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ jsou posl. reálných čísel. Nechť $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ a nechť $\{b_n\}$ je omezená. Pak $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$.

Důkaz. Posl. $\{b_n\}$ je omezená. Tedy

$\exists K \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N} : |b_n| \leq K$.

Posl. $\{a_n\}$ má limitu 0. Tedy

$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : |a_n| < \varepsilon$.

Buď $\varepsilon > 0$. Pak

$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : |a_n b_n - 0| = |a_n|\,|b_n| < K\varepsilon$.

Tedy $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$. $\square$

KONEC PŘEDNÁŠKY

8. přednáška MA1, ZS, šk. r. 2015/16, 29. 10. 2015

Př. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+1}{n^2-4n+1}$

(řešeno na přednášce)

Věta 30. Nechť $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}$. Pak $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |A|$.

Důkaz plyne z předpokladu, že $a_n \to A$ a z nerovnosti

$$\big||a_n| - |A|\big| \leq |a_n - A| \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad \square$$

Věta 31. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \iff \lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$.

Důkaz. Platí

$$\big||a_n| - 0\big| = |a_n| = |a_n - 0| \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

odkud ihned plyne dané tvrzení. $\square$

Poznámka. Je-li $\{a_n\}$ posl. reálných čísel a $A \in \mathbb{R}$, pak

$$a_n \to A \iff (a_n - A) \to 0$$

(neb $|a_n - A| = |(a_n - A) - 0| \quad \forall n \in \mathbb{N}$).

Uspořádání a limity

Věta 32. (uspořádání a limity) Nechť $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}$ a $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B \in \mathbb{R}$.

(i) Jestliže

$\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0: \ a_n \leq b_n$,

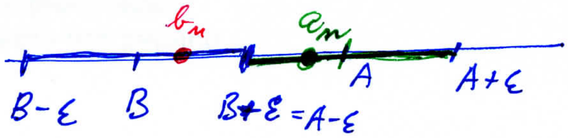
pak $A \leq B$.

(ii) Jestliže $A < B$, pak

$\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0: \ a_n < b_n$.

Důkaz. ad (i): Nechť naopak $A > B$. Zvolme $\varepsilon = \frac{A-B}{2}$.

Pak
$$A-\varepsilon = A - \frac{A-B}{2} = \frac{A+B}{2}$$
$$B+\varepsilon = B + \frac{A-B}{2} = \frac{A+B}{2}$$



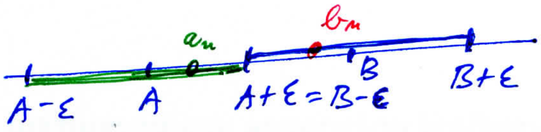
a platí:

$$\exists n_1 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_1:\ A-\varepsilon < a_n,$$
$$\exists n_2 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_2:\ b_n < B+\varepsilon.$$

Tedy
$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq \max\{n_0, n_1, n_2\}:\ b_n < B+\varepsilon = A-\varepsilon < a_n \text{ – spor.}$$

Proto $A \leq B$.

ad (ii): Nástin důkazu: $\varepsilon = \frac{B-A}{2}$



$$a_n < A+\varepsilon = B-\varepsilon < b_n \quad \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq \max\{n_1, n_2\} =: n_0.$$ □

Věta 33 (o dvou policajtech). Nechť $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ jsou posloupnosti reálných čísel. Předpokládejme, že platí:

(i) $\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0:\ a_n \leq c_n \leq b_n$;

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}$.

Pak $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = A$.

Důkaz. Buď $\varepsilon > 0$. Pak

$$\exists n_1 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_1:\ A-\varepsilon < a_n < A+\varepsilon,$$
$$\exists n_2 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_2:\ A-\varepsilon < b_n < A+\varepsilon.$$

Odtud a z předpokladu plyne
$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_3 := \max\{n_0, n_1, n_2\}:\ A-\varepsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < A+\varepsilon.$$

Tedy $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = A$. □

Př. Určete $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[3]{1+\frac{1}{n^2}}$. (řešení na přednášce) ./.

Definice. Posloupnost, která není konvergentní, se nazývá **divergentní**.

Př: 1) $a_n = n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ ($\{a_n\}$ není omezená $\Rightarrow$ je divergentní)

2) $a_n = -n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (—"— —"—)

3) $a_n = (-1)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ ($\{a_n\}$ je omezená, ale nemá limitu $\Rightarrow$ je divergentní)

Posloupnost $\{a_n\}$ z příkladu 1) má následující vlastnost:

$\forall K \in \mathbb{R} \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : a_n > K$.

(To plyne z Archimédovy vlastnosti ..... $\forall K \in \mathbb{R} \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : K < n_0 = a_{n_0}$)

Definice. Řekneme, že posl. reálných čísel $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ má limitu $+\infty$ ($-\infty$), jestliže

$\forall K \in \mathbb{R} \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : a_n > K$ *)

($\forall K \in \mathbb{R} \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : a_n < K$ **)).

Jestliže posl. má limitu $+\infty$ nebo $-\infty$, říkáme, že má **nevlastní** limitu.

Př: $\lim_{n \to \infty} n^2 = +\infty$

Řešení. Buď $K \in \mathbb{R}$. Chceme dokázat, že

(*) $\exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : a_n > K$.

1) Je-li $K \leq 0$, stačí volit $n_0 = 1$ a

2) Je-li $K > 0$, pak

$$a_n > K \Leftrightarrow n^2 > K \Leftrightarrow n > \sqrt{K}.$$

Zvolme tedy $n_0 = [\sqrt{K}] + 1$. Pak $n_0 \in \mathbb{N}$, $n_0 > \sqrt{K}$ a pro $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$ máme

$$n \geq n_0 > \sqrt{K} \Rightarrow a_n = n^2 > K.$$

Tedy (*) platí.

---

*) Snadno nahlédneme, že se lze omezit na $K > 0$.

**) —"— , že se lze omezit na $K < 0$.

Poznámka. Následující diagram znázorňuje všechny možné situace

- limita posl.
  - neexistuje
  - existuje
    - vlastní
    - nevlastní
      - $+\infty$
      - $-\infty$

Věta 34 (jednoznačnost limity podruhé). Každá posloupnost reálných čísel má nejvýše jednu limitu.

Důkaz. Již jsme dokázali, že nemůže platit:

$$a_n \to A \in \mathbb{R} \ \wedge \ a_n \to B \in \mathbb{R}, \quad \text{kde } A \neq B.$$

Zbývající případy:

(i) $a_n \to A \in \mathbb{R} \ \wedge \ a_n \to +\infty$,

(ii) $a_n \to A \in \mathbb{R} \ \wedge \ a_n \to -\infty$,

(iii) $a_n \to +\infty \ \wedge \ a_n \to -\infty$.

Ukážeme, že případ (i) nemůže nastat (případy (ii) a (iii) – dcv.).

V případě (i) platí:

$\exists n_1 \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_1 : |a_n - A| < 1$ (tedy $a_n < A+1$),

$\exists n_2 \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_2 : \ a_n > A+1$.

Tedy

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq \max\{n_1, n_2\} : \ a_n < A+1 < a_n \quad \text{– spor.}$$

Proto případ (i) nemůže nastat. $\square$

Ukazuje se účelné rozšířit množinu $\mathbb{R}$ o dva prvky $+\infty$ a $-\infty$.

Definice. $\mathbb{R}^* := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$

↑rozšířená množina reálných čísel

(i) Původní uspořádání v $\mathbb{R}$ rozšíříme do $\mathbb{R}^*$ tak, že definujeme:

1) $\forall x \in \mathbb{R} : \ -\infty < x$

2) $\forall x \in \mathbb{R} : \ x < +\infty$

3) $-\infty < +\infty$

(ii) Sčítání, násobení a dělení rozšíříme do $\mathbb{R}^*$ takto:

1) $\forall x \in \mathbb{R}^* \setminus \{+\infty\}: \quad -\infty + x = x + (-\infty) = -\infty$

2) $\forall x \in \mathbb{R}^* \setminus \{-\infty\}: \quad +\infty + x = x + (+\infty) = +\infty$

3) $\forall x \in \mathbb{R}^*, x > 0: \quad (\pm\infty) \cdot x = x \cdot (\pm\infty) = \pm\infty$

4) $\forall x \in \mathbb{R}^*, x < 0: \quad (\pm\infty) \cdot x = x \cdot (\pm\infty) = \mp\infty$

5) $\forall x \in \mathbb{R}: \quad \dfrac{x}{\pm\infty} = 0$

(iii) Definujeme $|\pm\infty| = +\infty$.

Poznámka. Není definováno:

$-\infty + (+\infty)$, $(+\infty) + (-\infty)$, $0 \cdot (\pm\infty)$, $(\pm\infty) \cdot 0$, $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$,

$\dfrac{x}{0}$, $x \in \mathbb{R}^*$.

Rozšíření reálných čísel je definováno tak, aby platila následující věta (její důkaz je podobný důkazu Věty 28, přenecháme ho za Dcv.).

Věta 35 (Aritmetika limit podruhé). Nechť $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ jsou posl. reálných čísel, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}^*$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B \in \mathbb{R}^*$. Pak

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = A + B$, má-li $A + B$ smysl;

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = A \cdot B$, má-li $A \cdot B$ smysl;

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{A}{B}$, má-li $\dfrac{A}{B}$ smysl.

Poznámka. Výraz $+\infty + (-\infty)$ není definován, protože z předpokladů $\lim a_n = +\infty$, $\lim b_n = -\infty$ nelze nic usoudit o $\lim (a_n + b_n)$ – viz násl. příklad.

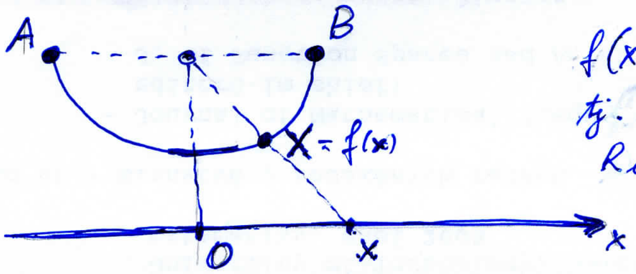
Př. $a_n = n$, $b_n = -n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow a_n + b_n = 0 \to 0$;

$a_n = 2n$, $b_n = -n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow a_n + b_n = n \to +\infty$;

$a_n = n$, $b_n = -2n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow a_n + b_n = -n \to -\infty$.

(přitom ve všech případech platí: $a_n \to +\infty$, $b_n \to -\infty$)

Podobně lze zdůvodnit proč některé další výrazy nejsou definovány.



$f(x) = X$ je bijekce $\mathbb{R}$ na $\mathbb{R}$,

tj. f^{-1} je bijekce množiny $\mathbb{R}$ na $\mathbb{R}$.

Rozšíříme f^{-1} na bijekci množiny $\mathbb{R}^* := \mathbb{R} \cup \{A, B\}$ na $\mathbb{R}^*$ tak, že položíme $f^{-1}(A) = -\infty$, $f^{-1}(B) = +\infty$.

KONEC PŘEDNÁŠKY

9. přednáška MA 1, ZS, šk. r. 2015/16, 3. 11. 2015

Poznámka. Věty 27, 30 a 32 platí i pro nevlastní limity.

o vybrané posl. $\qquad |a_n| \to |A| \qquad$ (uspořádání a limity)

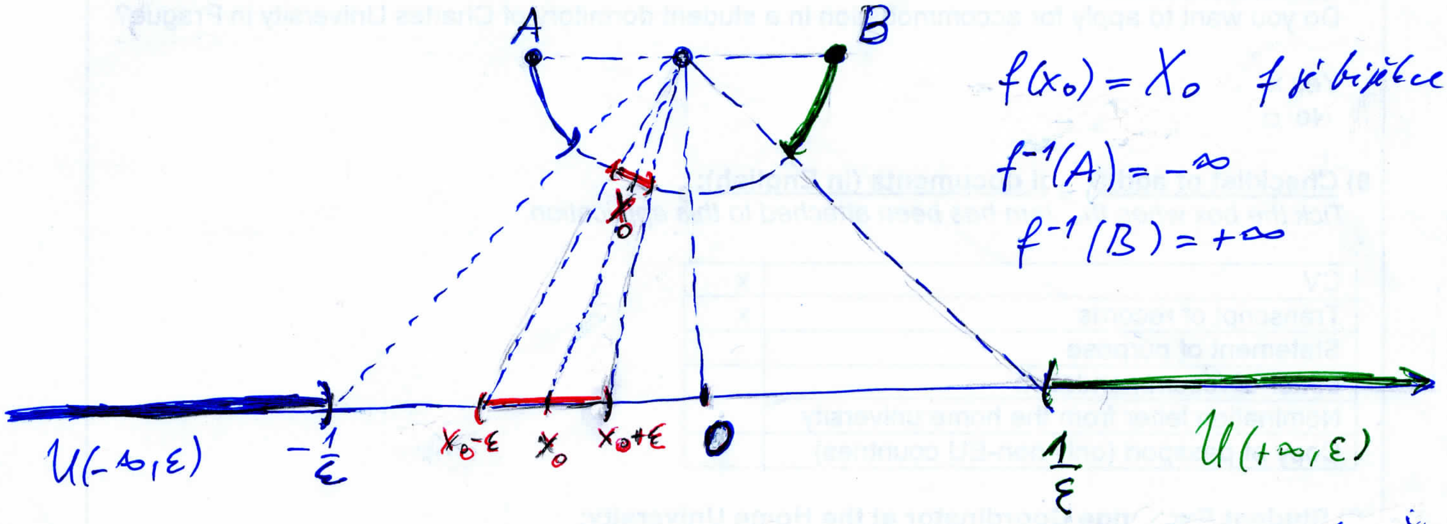
Př.
$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\frac{1}{+\infty+(+\infty)}=\frac{1}{+\infty}=0.$$

Poznámka. Buď $\varepsilon>0$ a $x_0\in\mathbb{R}$. Položme

$U(x_0,\varepsilon):=\{x\in\mathbb{R};\ |x-x_0|<\varepsilon\}$ ... ε-okolí bodu x_0

$U(+\infty,\varepsilon):=\{x\in\mathbb{R}^*;\ x>\frac{1}{\varepsilon}\}$ ... ε-okolí bodu $+\infty$

$U(-\infty,\varepsilon):=\{x\in\mathbb{R}^*;\ x<-\frac{1}{\varepsilon}\}$ ... ε-okolí bodu $-\infty$



$f(x_0)=X_0$ $\quad f$ je bijekce

$f^{-1}(A)=-\infty$

$f^{-1}(B)=+\infty$

Pak lze limitu posloupnosti $\lim_{n\to\infty}a_n=A\in\mathbb{R}^*$ (tedy konečnou i nekonečnou) ekvivalentně definovat jediným předpisem:

(*) $\quad \boxed{\forall\varepsilon>0\ \exists n_0\in\mathbb{N}\ \forall n\in\mathbb{N},\ n\geq n_0:\ a_n\in U(A,\varepsilon)}$

Definici (*) lze použít i pro definici $\lim_{n\to\infty}a_n=A\in\mathbb{R}^*$ pro posloupnost $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, kde $a_n\in\mathbb{R}^*$, $n\in\mathbb{N}$.

Pro nevlastní limity platí následující modifikace věty o dvou policajtech.

Věta 36 (i) Nechť $\{a_n\}$ a $\{c_n\}$ jsou posloupnosti (čísel z $\mathbb{R}^*$) splňující:

(i$_1$) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$,

(i$_2$) $\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : a_n \leq c_n$.

Potom $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = +\infty$

(ii) Nechť $\{b_n\}$ a $\{c_n\}$ jsou posloupnosti (čísel z $\mathbb{R}^*$) splňující:

(ii$_1$) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$,

(ii$_2$) $\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : c_n \leq b_n$.

Potom $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = -\infty$.

Důkaz: ad (i): Buď $K \in \mathbb{R}$. Pak

$$\exists n_1 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_1 : a_n > K.$$

Odtud a z (i$_2$) plyne

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq \max\{n_0, n_1\} : c_n \geq a_n > K,$$

a tedy $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = +\infty$.

ad (ii): Důkaz je analogický, udělat za DCv!

Věta 37 (o limitě podílu posl. s kladnou a nulovou limitou).

Nechť $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ jsou posl. (čísel z $\mathbb{R}^*$), $\lim_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}^*$, $A > 0$, a $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$. Předpokládejme, že

(1) $\qquad \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0:\ b_n > 0.$

Pak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty.$$

Důkaz. Víme, že $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$. Odtud plyne

(2) $\quad \forall \varepsilon > 0\ \exists n_1 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_1:\ |b_n| < \varepsilon.$

Je-li $\varepsilon > 0$, pak z (2) a (1) máme

(3) $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq \max\{n_0, n_1\}:\ 0 < b_n = |b_n| < \varepsilon.$

I. Nechť $\lim_{n\to\infty} a_n = A \in (0, +\infty)$. Pak

(4) $\qquad \exists n_2 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_2:\ a_n > A - \frac{A}{2} = \frac{A}{2}.$

Buď $K > 0$. Zvolme $\varepsilon > 0$ tak, aby $\frac{A}{2}\frac{1}{\varepsilon} > K$. (5)

Z (4), (1), (3) a (5) dostáváme

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq \max\{n_0, n_1, n_2\}:\ \frac{a_n}{b_n} \underset{b_n > 0 \text{ dle } (1)}{\overset{\text{dle }(4)}{>}} \frac{A}{2}\frac{1}{b_n} \overset{\text{dle }(3)}{>} \frac{A}{2}\frac{1}{\varepsilon} \underset{\text{dle }(5)}{>} K,$$

a tedy $\frac{a_n}{b_n} \to +\infty$.

II. Nechť $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$. Pak

(4') $\qquad \exists n_2 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_2:\ a_n > 1.$

Buď $K > 0$. Zvolme $\varepsilon > 0$ tak, aby $\frac{1}{\varepsilon} > K$. (5')

Z (4'), (1), (3) a (5') dostáváme

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq \max\{n_0, n_1, n_2\}:\ \frac{a_n}{b_n} \underset{b_n > 0 \text{ dle } (1)}{\overset{(4')}{>}} 1 \cdot \frac{1}{b_n} \overset{(3)}{>} \frac{1}{\varepsilon} \overset{(5')}{>} K,$$

a tedy opět $\frac{a_n}{b_n} \to +\infty$. $\square$

Rozšíření množiny reálných čísel umožňuje definovat pojmy suprema a infima pro libovolné podmnožiny v $\mathbb{R}$.

Definice. Nechť $M \subset \mathbb{R}$ a nechť $S \in \mathbb{R}^*$ má následující vlastnosti:

(i) $\forall x \in M: \ x \leq S$,

(ii) $\forall S' \in \mathbb{R}^*, \ S' < S, \ \exists x \in M: \ S' < x$.

Pak S nazýváme supremem množiny M.

Infimum množiny se definuje analogicky:

Nechť $M \subset \mathbb{R}$ a nechť $c \in \mathbb{R}^*$ má následující vlastnosti:

(i) $\forall x \in M: \ x \geq c$,

(ii) $\forall c' \in \mathbb{R}^*, \ c' > c, \ \exists x \in M: \ x < c'$.

Pak c nazýváme infimem množiny M.

Poznámky. (i) Je-li $M \subset \mathbb{R}$ neprázdná shora omezená množina, (zdola) pak pojem suprema (infima) množiny zavedený na 4. přednášce je shodný s nyní zavedeným pojmem suprema (infima) množiny.

(ii) Supremum shora neomezené množiny $M \subset \mathbb{R}$ je $+\infty$ (Infimum zdola) $(-\infty)$.

(iii) Supremum (Infimum) prázdné množiny je $-\infty$ $(+\infty)$.

(iv) Prázdná množina je jediná množina, která má supremum menší než infimum.

(v) Bylo by možné analogicky definovat supremum a infimum množiny $M \subset \mathbb{R}^*$ (viz např. Jarník DII str. 58) libovolné?

Věta 38 (o limitě monotónní posloupnosti). Každá monotónní posloupnost má limitu. Podrobněji:

(i) Je-li $\{a_n\}$ neklesající posl. reálných čísel, pak

$$\lim_{n\to} a_n = \sup\{a_n;\ n\in\mathbb{N}\} =: \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n .$$

(ii) Je-li $\{a_n\}$ nerostoucí posl. reálných čísel, pak

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n;\ n\in\mathbb{N}\} =: \inf_{n\in\mathbb{N}} a_n .$$

Důkaz. ad (i): Nechť $\{a_n\}$ je neklesající posl. a $S = \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n$. Je-li $S' < S$, pak z definice suprema plyne existence $n_0\in\mathbb{N}$ tak, že platí $S' < a_{n_0}$. Tedy

$$S' < a_{n_0} \le a_n \le S \quad \forall n\in\mathbb{N},\ n\ge n_0 .$$

Odtud plyne, že $\lim_{n\to\infty} a_n = S$ (neb $S' < S$ bylo libovolné).

ad (ii): Dcv.

Důsledek (i) Každá neklesající shora neomezená posloupnost má limitu rovnou $+\infty$.
(ii) Každá nerostoucí zdola neomezená posloupnost má limitu rovnou $-\infty$.
(iii) Každá monotónní omezená posloupnost je konvergentní.

Př. Posloupnost $b_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$, $n\in\mathbb{N}$, je klesající a omezená
$\left(0 < \dots\ b_{n+1} < b_n < \dots < b_1 = \left(1+\frac{1}{1}\right)^{1+1} = 2^2 = 4\right)$.
Tedy je konvergentní, $\lim_{n\to\infty} b_n =: B \in \mathbb{R}$.

Buď $a_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $n\in\mathbb{N}$. Pak $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \frac{B}{1} = B$.
Bývá zvykem tuto limitu značit symbolem e ... základ přirozených logaritmů ($e = 2{,}718281828 4\dots$).

Ověříme tvrzení z příkladu:

$$b_{n+1} < b_n \iff \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \iff$$

$$\iff \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2} < \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} \Big/ \cdot \frac{n+1}{n}$$

$$\iff \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2} \frac{n+1}{n} < \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+2}$$

$$\iff 1+\frac{1}{n} < \left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)^{n+2}$$

$$\iff 1+\frac{1}{n} < \left(\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}\right)^{n+2}$$

$$\iff 1+\frac{1}{n} < \underbrace{\left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+2}}_{} \quad \ldots \text{ platí, neboť}$$

$$\geq 1+\binom{n+2}{1}\cdot\frac{1}{n(n+2)} + \ldots > 1+(n+2)\frac{1}{n(n+2)} = 1+\frac{1}{n}.$$

↑ binomická věta

Tedy $b_{n+1} < b_n$, tj. $\{b_n\}$ je klesající.
Protože $\{b_n\}$ je zdola omezená, $\exists \lim_{n\to\infty} b_n =: B \in \mathbb{R}$

Dokážeme dále, že $\{a_n\}$ je rostoucí:

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+\underbrace{\binom{n}{1}\frac{1}{n}}_{=1} + \underbrace{\binom{n}{2}\frac{1}{n^2}}_{\frac{n(n-1)}{2\cdot 1}\frac{1}{n^2}} + \underbrace{\binom{n}{3}\frac{1}{n^3}}_{=\frac{n(n-1)(n-2)}{3\cdot 2}\frac{1}{n^3}} + \ldots + \binom{n}{n}\frac{1}{n^n}$$

$$(1) \quad a_n = 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\ldots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

$n \to n+1 \implies$

$$(2) \quad a_{n+1} = 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)+\ldots$$
$$\ldots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)+$$
$$+\frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n}{n+1}\right)$$

$\implies$ $a_n < a_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ (neb $\left(1-\frac{k}{n}\right) < \left(1-\frac{k}{n+1}\right)$ a navíc v (2) je o poslední člen více)

Tedy $\{a_n\}$ je rostoucí.

celkem tedy máme

$$\underset{\substack{\shortparallel \\ (1+\frac{1}{1})^1 = 2}}{a_1} < a_2 < \dots < a_n < a_{n+1} < \dots \overset{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{e} < \dots b_{n+1} < b_n < \dots < b_2 < \underset{\substack{\shortparallel \\ (1+\frac{1}{1})^2 = 4}}{b_1}$$

$\Rightarrow \quad 2 < e < 4$

$e = 2{,}7\,1828\,1828\dots$

KONEC PŘEDNÁŠKY

Lemma. Je-li $k \in \mathbb{N}$ a $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ posloupnost nezáporných čísel, pro kterou platí $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}$, pak $A \geq 0$ a $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{A}$.

Aplikace lemmatu:

Př. Určete $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\left(1+\frac{1}{n}\right)^3}$.

10. přednáška MA-1a, ZS, šk. r. 2015/16, 5. 11. 2015

Limes inferior a limes superior

1. **Definice.** Nechť $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je posl. reálných čísel.

Je-li $\{a_n\}$ shora neomezená, položíme $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n := +\infty$.

Je-li $\{a_n\}$ shora omezená, položíme $\beta_n := \sup\limits_{k\geq n} a_k$, $n\in\mathbb{N}$,

a $\limsup\limits_{n\to+\infty} a_n := \lim\limits_{n\to\infty} \beta_n$

(tato limita existuje, neboť $\{\beta_n\}$ je nerostoucí posl. reálných čísel).

Je-li $\{a_n\}$ zdola neomezená, položíme $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n := -\infty$.

Je-li $\{a_n\}$ zdola omezená, položíme $\alpha_n := \inf\limits_{k\geq n} a_k$, $n\in\mathbb{N}$,

a $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n := \lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n$

(tato limita existuje, neboť $\{\alpha_n\}$ je neklesající posl. reálných čísel).

Pozn. 1) Vždy platí $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n \in \mathbb{R}^*$, $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n \in \mathbb{R}^*$.

2) posl. $\{a_n\}$ je shora omezená $\iff \limsup a_n < +\infty$.

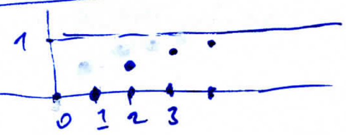
3) posl. $\{a_n\}$ je zdola omezená $\iff \liminf a_n > -\infty$.

Př. 1) $a_n := (-1)^n$ $\forall n\in\mathbb{N}$ $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ neexistuje.

Posl. $\{a_n\}$ je omezená, $\alpha_n = -1$ $\forall n\in\mathbb{N}$, $\beta_n = 1$ $\forall n\in\mathbb{N}$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty}\alpha_n = -1\\ \limsup_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty}\beta_n = 1.\end{aligned}}$$

2) $a_n = 1 - \frac{1}{n}$ $\forall n\in\mathbb{N}$



$\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1}$

Posl. $\{a_n\}$ je omezená,

$\alpha_n = a_n$, $\beta_n = 1$ $\forall n\in\mathbb{N}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} a_n = 1\\ \limsup_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty}\beta_n = 1\end{aligned}}$

3) $a_n = (-1)^n n$ $\forall n\in\mathbb{N}$ $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ neexistuje

$\{a_n\}$ není ani shora ani zdola omezená

Tedy $\boxed{\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty, \ \limsup\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty}$

(o lim sup a lim inf)

Věta 39 (i) Nechť $B := \limsup_{n\to\infty} a_n$. Pak ex. vybraná posl. $\{a_{n_k}\}$ tak, že $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = B$.

(ii) Nechť $A := \liminf_{n\to\infty} a_n$. Pak existuje vybraná posl. $\{a_{n_k}\}$ tak, že $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = A$.

Důkaz. ad (i): Předpokládejme nejprve, že

(1) $\{a_n\}$ není shora omezená.

Pak $B = +\infty$. Dále ex. $n_1 \in \mathbb{N}$ tak, že $a_{n_1} > 1$.

Předpokládejme, že jsme již nalezli přirozená čísla

$n_1 < n_2 < \dots < n_k$ taková, že $a_{n_j} > j \quad \forall j \in \{1, \dots, k\}$.

Protože množina $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} \{a_{n_k+j}\}$ není shora omezená, existuje $n_{k+1} > n_k$, $n_{k+1} \in \mathbb{N}$, tak, že $a_{n_{k+1}} > k+1$.

Tedy dle principu mat. indukce jsme zkonstruovali posl. $\{a_{n_k}\}$ vybranou z posl. $\{a_n\}$ takovou, že

$$a_{n_k} > k \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Odtud plyne, že $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = +\infty = B$.

Předpokládejme nyní, že

(2) $\{a_n\}$ je shora omezená.

Pak jsou dvě možnosti:

(2_1) $\quad B = \limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} B_n \in \mathbb{R}$,

(2_2) $\quad B = \limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} B_n = -\infty$.

ad (2_1): z def-ce li-ty ($\lim_{n\to\infty} B_n = B \in \mathbb{R}$) plyne

$$\exists m_1 \in \mathbb{N}: \quad B - 1 < \underbrace{B_{m_1}}_{= \sup_{k \geq m_1} a_k} < B + 1$$

Tedy (z definice suprema)

$$\exists n_1 \in \mathbb{N},\ n_1 \geq m_1 : \quad B-1 < a_{n_1} < B+1 .$$

Předp., že jsme již nalezli přirozená čísla $n_1 < n_2 < \dots < n_k$ tak, že

$$B - \frac{1}{j} < a_{n_j} < B + \frac{1}{j} \quad \forall\ j \in \{1, \dots, k\} .$$

Pak (z definice $\lim\limits_{n\to\infty} B_n = B$) dostáváme

$$\exists\ m_{k+1} \in \mathbb{N},\ m_{k+1} > n_k : \ B - \frac{1}{k+1} < \underset{\sup\limits_{j \geq m_{k+1}} a_j}{\underset{\parallel}{B_{m_{k+1}}}} < B + \frac{1}{k+1} .$$

Tedy (z definice suprema)

$$\exists\ n_{k+1} \in \mathbb{N},\ n_{k+1} \geq m_{k+1}\ (> n_k) : \ B - \frac{1}{k+1} < a_{n_{k+1}} < B + \frac{1}{k+1} .$$

Dle principu mat. indukce jsme sestrojili posloupnost $\{a_{n_k}\}$ vybranou z posl. $\{a_n\}$ tak, že platí

$$B - \frac{1}{k} < a_{n_k} < B + \frac{1}{k} , \quad \forall k \in \mathbb{N} .$$

Odtud plyne, že $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = B$.

ad (2_2): Z definice $\lim\limits_{n\to\infty} B_n = B = -\infty$ dostáváme

$$\exists n_1 \in \mathbb{N} : \quad \underbrace{B_{n_1}}_{= \sup\limits_{k \geq n_1} a_k \geq a_{n_1}} < -1$$

Tedy $a_{n_1} < -1$.

Předpokládejme, že jsme již nalezli přirozená čísla $n_1 < n_2 < \dots < n_k$ tak, že $a_{n_j} < -j \quad \forall j \in \{1, \dots, k\}$.

Z (2_2) pak plyne

$$\exists\ n_{k+1} \in \mathbb{N},\ n_{k+1} > n_k : \quad \underbrace{B_{n_{k+1}}}_{\geq a_{n_{k+1}}} < -(k+1) .$$

Dle principu mat. indukce jsme sestrojili posl. $\{a_{n_k}\}$ vybranou z posl. $\{a_n\}$ tak, že

$$a_{n_k} < -k \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Odtud plyne, že $\lim\limits_{k\to+\infty} a_{n_k} = -\infty = B$.

Tím je část (i) Věty 39 dokázána.

Důkaz části (ii) je obdobný. — Dcv.

Věta 40 (vztah mezi lim, lim sup a lim inf).

Buď $\{a_n\}$ posl. reálných čísel. Pak $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ existuje právě tehdy, je-li $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = \liminf\limits_{n\to\infty} a_n$.

Důkaz. I. Předp., že ex. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$. Pak každá vybraná posloupnost z posloupnosti $\{a_n\}$ má stejnou limitu. Z Věty 39 pak plyne, že $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = A = \liminf\limits_{n\to\infty} a_n$.

II. Předp., že $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = \liminf\limits_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}^*$.

II_1. Nechť nejprve $A \in \mathbb{R}$. Pak (viz Poznámka na listě 1) posloupnost $\{a_n\}$ je omezená, a proto

$$\lim_{n\to\infty} \beta_n = A = \lim_{n\to\infty} \alpha_n .$$

Tedy

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_1 \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_1 : A-\varepsilon < \alpha_n < A+\varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_2 \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_2 : A-\varepsilon < \beta_n < A+\varepsilon.$$

Buď $\varepsilon > 0$, $n_0 := \max\{n_1, n_2\}$. Pak

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : \underline{\underline{A-\varepsilon}} < \alpha_n \leq \underline{\underline{a_n}} \leq \beta_n < \underline{\underline{A+\varepsilon}},$$

tzn., že $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$.

II_2. Předp. nyní, že $\limsup a_n = \underbrace{\liminf a_n = A = +\infty}_{\Downarrow}$.

posl. $\{a_n\}$ je zdola omezená (jinak by $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$)

Tedy $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = +\infty$, což znamená, že

$$\forall K>0\ \exists n_0\in\mathbb{N}\ \forall n\in\mathbb{N},\ n\geq n_0:\ \underbrace{\alpha_n}_{=\inf\limits_{j\geq n} a_j \leq a_n} > K.$$

Tedy $\forall K>0\ \exists n_0\in\mathbb{N}\ \forall n\in\mathbb{N},\ n\geq n_0:\ a_n>K$

$\Leftrightarrow\quad \lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty = A.$

II_3. Předpokládejme nyní, že $\underline{\underline{\limsup\limits_{n\to\infty} a_n}} = \liminf\limits_{n\to\infty} a_n = \underline{\underline{A=-\infty}}.$

$\Downarrow$ posl. $\{a_n\}$ je shora omezená

$\Downarrow$

$\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = -\infty$

Tedy $\forall K>0\ \exists n_0\in\mathbb{N}\ \forall n\in\mathbb{N},\ n\geq n_0:\ \underbrace{\beta_n}_{=\sup\limits_{j\geq n} a_j \geq a_n} < -K.$

Proto platí $\forall K>0\ \exists n_0\in\mathbb{N}\ \forall n\in\mathbb{N},\ n\geq n_0:\ a_n<-K$

$\Leftrightarrow\quad \lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty = A.\ \square$

Definice Nechť $\{a_n\}$ je posl. reálných čísel. Pak číslo $A\in\mathbb{R}^*$ se nazývá *hromadnou hodnotou* (hromadným bodem) posl. $\{a_n\}$, jestliže ex. vybraná posl. $\{a_{n_k}\}$ tak, že $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = A$. Množinu všech hromadných hodnot posl. $\{a_n\}$ značíme symbolem $H(\{a_n\})$.

Věta 41 (o množině $H(\{a_n\})$). Nechť $\{a_n\}$ je posl. reálných čísel. Pak

(i) $H(\{a_n\})\neq\emptyset$,

(ii) $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = \max H(\{a_n\})$,

(iii) $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = \min H(\{a_n\})$.

Důsledek. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ existuje $\Leftrightarrow$ množina $H(\{a_n\})$ je jednobodová.

Důkaz Věty 41. ad (i): Z Věty 39 plyne, že $H(\{a_n\}) \neq \emptyset$.

ad (ii): Je jasné, že $\limsup_{n\to\infty} a_n \in H(\{a_n\})$ (dle Věty 39).

1) Je-li $\limsup_{n\to\infty} a_n = +\infty$, pak jistě

$\limsup_{n\to\infty} a_n = \max H(\{a_n\})$ (větší hodnota než $+\infty$ v množině $H(\{a_n\})$ neexistuje)

2) Buď $\limsup_{n\to\infty} a_n = B < +\infty$. Pak $B = \lim_{n\to\infty} \beta_n$. (*)

nechť $\varepsilon > 0$. Z (*) plyne:

$\exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 : \underbrace{\beta_n}_{= \sup_{j\geq n} a_j \geq a_n} < B + \varepsilon.$

Tedy

$$a_n < B + \varepsilon \quad \forall\, n \geq n_0 \qquad (2*).$$

Buď $\{a_{n_k}\}$ posl. vybraná z posl. $\{a_n\}$ a nechť

$a_{n_k} \to c$. Protože $n_k \geq k$, tak z (2*) máme

$$\begin{array}{ccc} a_{n_k} & < B+\varepsilon & \forall\, k \geq n_0 \\ \downarrow & \downarrow & \\ c & \leq B+\varepsilon & \end{array}$$

Protože $\varepsilon > 0$ bylo libovolné, je $c \leq B$.

Tím je důkaz (ii) dokončen.

(iii) se dokáže analogicky jako (ii). □

11. přednáška MA-1a, ZS, šk. r. 2015/16, 9. 11. 2015

Věta 42 (Bolzano – Weierstrass). Nechť $\{a_n\}$ je omezená posloupnost reálných čísel. Pak existuje vybraná posloupnost $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$, která je konvergentní.

Důkaz. Věta je důsledkem Věty 41 (i), která tvrdí, že $H(\{a_n\}) \neq \emptyset$.

Věta 43 (Cantor). Nechť $\langle a_n, b_n\rangle \subset \mathbb{R}$ jsou intervaly splňující $\langle a_{n+1}, b_{n+1}\rangle \subset \langle a_n, b_n\rangle$ $\forall n\in\mathbb{N}$. Pak

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \langle a_n, b_n\rangle \neq \emptyset .$$

Důkaz. 1) $a_n \le a_{n+1}$ $\forall n\in\mathbb{N} \Rightarrow$ posl. $\{a_n\}$ je neklesající

$\Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n =: a$

2) $b_{n+1} \le b_n$ $\forall n\in\mathbb{N} \Rightarrow$ posl. $\{b_n\}$ je nerostoucí $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} b_n =: b$

3) $a_n \le b_n$ $\forall n\in\mathbb{N} \Rightarrow a \le b \Rightarrow$ ex. $x\in\langle a,b\rangle \Rightarrow$

$\Rightarrow x\in\langle a_n, b_n\rangle$ $\forall n\in\mathbb{N} \Rightarrow x\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\langle a_n, b_n\rangle \Rightarrow$

$\Rightarrow \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \langle a_n, b_n\rangle \neq \emptyset .$

Věta 44 (Bolzano – Cauchy). Posl. reálných čísel $\{a_n\}$ je konvergentní právě tehdy, jestliže platí

(BC) $\forall \varepsilon>0\ \exists n_0\in\mathbb{N}\ \forall m,n\in\mathbb{N},\ m,n\ge n_0:\ |a_m - a_n| < \varepsilon .$

Důkaz: 1) Nechť $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A\in\mathbb{R}$. Pak

$\forall \varepsilon>0\ \exists n_0\in\mathbb{N}\ \forall n\in\mathbb{N},\ n\ge n_0:\ |a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}.$

Odtud plyne: Je-li $\varepsilon>0$, pak

$|a_m - a_n| \le |a_m - A| + |A - a_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$ $\forall m,n\in\mathbb{N},\ m,n\ge n_0.$

Tedy platí (BC).

2) Nechť platí (BC).

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 : |a_{n_0} - a_n| < \varepsilon$$

tj. $a_{n_0} - \varepsilon < a_n < a_{n_0} + \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$

$\Rightarrow \quad a_{n_0} - \varepsilon \leq \alpha_n \leq a_n \leq \beta_n < a_{n_0} + \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$

(kde $\alpha_n = \inf_{k \geq n} a_k$, $\beta_n = \sup_{k \geq n} b_k$)

$$(*) \quad a_{n_0} - \varepsilon \leq \liminf_{n\to\infty} a_n \leq \limsup_{n\to\infty} a_n \leq a_{n_0} + \varepsilon$$

$$\Rightarrow \left| \liminf_{n\to\infty} a_n - \limsup_{n\to\infty} a_n \right| \leq 2\varepsilon .$$

Protože $\varepsilon > 0$ bylo libovolné, platí $\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n$, tedy $\lim_{n\to\infty} a_n$ existuje a platí $\lim_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n$.

Z $(*)$ dále plyne, že $\limsup_{n\to\infty} a_n \in \mathbb{R}$. Tudíž $\{a_n\}$ je konvergentní. □

<u>Definice</u>. Řekneme, že systém množin G_γ, $\gamma \in \Gamma$, pokrývá množinu M, je-li $M \subset \bigcup_{\gamma \in \Gamma} G_\gamma$.

<u>Věta 45 (Borel)</u>. Nechť $I = \langle a, b \rangle$ je (omezený uzavřený) interval v $\mathbb{R}$ a I_γ, $\gamma \in \Gamma$, je systém otevřených intervalů, který pokrývá I. Pak existuje konečná množina $\Delta \subset \Gamma$ tak, že $I \subset \bigcup_{\gamma \in \Delta} I_\gamma$.

<u>Důkaz</u>. Buď $M := \{x \in \langle a, b \rangle;\ \exists \Gamma_x \subset \Gamma,\ \Gamma_x$ je konečná, $\langle a, x \rangle \subset \bigcup_{\gamma \in \Gamma_x} I_\gamma \}$.

1) $M \neq \emptyset$ (neb $a \in M$)

2) M je shora omezená (neb $\forall x \in M : x \leq b$).

Buď $c := \sup M$. $(\Rightarrow c \leq b)$ (také $a \leq c$ neb $a \in M$)

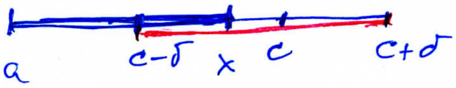
<u>Dokážeme, že $c = b$ (sporem)</u>. Nechť tedy $c < b$.

Protože $c \in I$, existuje $\gamma_c \in \Gamma$ tak, že $c \in I_{\gamma_c}$. Dále (neb I_{γ_c} je ot. interval) existuje $\delta>0$ tak, že $(c-\delta, c+\delta)\subset I_{\gamma_c}$. Protože $c-\delta<c$, dle definice suprema existuje $x\in M$ tak, že

$$c-\delta<x\le c.$$

Ovšem

(*) $x\in M \Rightarrow \left(\exists\, \gamma_1,\dots,\gamma_m\in\Gamma: \langle a,x\rangle\subset\bigcup_{j=1}^{m} I_{\gamma_j}\right)$



Pak ale

$$\langle a, c+\tfrac{\delta}{2}\rangle \subset \langle a,x\rangle\cup(c-\delta,c+\delta)\subset \underbrace{\bigcup_{j=1}^{m} I_{\gamma_j}\cup I_{\gamma_c}}$$

↑ konečné sjednocení intervalů ze systému I_γ, $\gamma\in\Gamma$.

Tedy $c+\frac{\delta}{2}\in M$ – spor (neb $c=\sup M$).

Proto $c=b$.

Zbývá dokázat, že $b=\sup M\in M$. Protože $b\in\langle a,b\rangle\subset\bigcup_{\gamma\in\Gamma}I_\gamma$, existuje $\gamma_b\in\Gamma$ tak, že $b\in I_{\gamma_b}$. Protože I_{γ_b} je ot. interval, existuje $\delta>0$ tak, že $(b-\delta,b+\delta)\subset I_{\gamma_b}$. Dle definice suprema ($b=\sup M$) ex. $x\in M$ tak, že $b-\delta<x$.

Odtud (vzhledem k (*)) plyne

$$\langle a,b\rangle\subset\langle a,x\rangle\cup(b-\delta,b+\delta)\subset\underbrace{\bigcup_{j=1}^{m} I_{\gamma_j}\cup I_{\gamma_b}},$$

↑ konečné sjednocení intervalů ze systému I_γ, $\gamma\in\Gamma$

tedy $b\in M$. □

Definice Buď $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ posl. komplex. čísel.*) Řekneme, že posl. $\{a_n\}$ je konvergentní, jestliže

$\exists A\in\mathbb{C}\ \forall\varepsilon>0\ \exists n_0\in\mathbb{N}\ \forall n\in\mathbb{N}, n\ge n_0: |a_n-A|<\varepsilon$

(pak píšeme, že $\lim_{n\to\infty}a_n=A$).

---

*) Posl. komplex. čísel rozumíme zobrazení množiny $\mathbb{N}$ do $\mathbb{C}$.

Věta 46 (o limitě posl. komplex. čísel). Posloupnost komplexních čísel $\{a_n\}$ má limitu $A = A_1 + iA_2 \in \mathbb{C}$ $(A_1, A_2 \in \mathbb{R})$ právě tehdy, když $\lim_{n\to\infty} \mathrm{Re}\, a_n = A_1 \in \mathbb{R}$ a $\lim_{n\to\infty} \mathrm{Im}\, a_n = A_2 \in \mathbb{R}$.

Důkaz. Protože pro libovolné komplex. číslo $z = x + iy$ (x, y reálná) platí $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$, a tedy

$$\max\{|x|, |y|\} \le |z| \le |x| + |y|,$$

dostáváme

$$|a_n - A| \to 0 \iff \left(|\mathrm{Re}\, a_n - A_1| \to 0 \wedge |\mathrm{Im}\, a_n - A_2| \to 0\right).$$

$\square$

Př. $a_n := \sqrt[n]{n} + i\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$. Určete $\lim_{n\to\infty} a_n$.

1) $\mathrm{Re}\, a_n = \sqrt[n]{n} \to 1$, neboť

$\sqrt[n]{n} = 1 + h_n$, kde $h_n > 0\ \forall n$, $\Rightarrow n = (1+h_n)^n \underset{\uparrow}{\ge} \binom{n}{2} h_n^2$
dle binom. věty

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \underbrace{\sqrt{\dfrac{n}{\binom{n}{2}}}}_{=\sqrt{\frac{n}{\frac{n(n-1)}{2}}} = \sqrt{\frac{2}{n-1}} \to 0} \ge h_n > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow h_n \to 0,$$

a tedy $\underline{\sqrt[n]{n} = 1 + h_n \to 1 + 0 = 1}$.

2) $\mathrm{Im}\, a_n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \dfrac{1}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^n} = \dfrac{1}{\left(\frac{n-1}{n-1} + \frac{1}{n-1}\right)^n} =$

$$= \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{n-1}} \longrightarrow \frac{1}{e}\cdot\frac{1}{1} = \frac{1}{e}$$

Tedy $\overset{\text{dle věty 46}}{\text{ex.}}$ $\underline{\lim_{n\to\infty} a_n =: A \in \mathbb{C}}$ a platí

$$\underline{A} = \mathrm{Re}\, A + i\, \mathrm{Im}\, A \underset{\text{věta 46}}{=} \lim_{n\to\infty} \mathrm{Re}\, a_n + i \lim_{n\to\infty} \mathrm{Im}\, a_n = 1 + i\frac{1}{e} = \underline{1 + \frac{i}{e}}.$$

Věta 47 (Stolz). Nechť $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ jsou posl. reálných čísel. Nechť $\{y_n\}$ je rostoucí posl. a taková, že $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$. Pak platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n},$$

existuje-li poslední limita. *)

Důkaz vynecháme.

Př. Dokažte, že platí

$$z_n \to A \in \mathbb{R}^* \Rightarrow \frac{z_1+z_2+\dots+z_n}{n} \to A.$$

Řešení. Volím $x_n := z_1+\dots+z_n \Rightarrow x_{n+1}-x_n = z_{n+1}$

$y_n := n \Rightarrow y_{n+1}-y_n = n+1-n = 1$ $\Big\} \Rightarrow$

↑ je to rostoucí posl., $y_n \to +\infty$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{z_{n+1}}{1} = \lim_{n\to\infty} z_n = A.$$

Tedy dle Věty 47 platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = A.$$

Z uvedeného např. plyne:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\dots+\sqrt[n]{n}}{n} = 1,$$

neboť

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

! ŘEŠTE NA CVIČENÍ DANÝ PŘÍKLAD BEZ POUŽITÍ VĚTY 47.

DÁLE NA CVIČENÍ POMOCÍ VĚTY 47 URČETE

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^k+2^k+\dots+n^k}{n^{k+1}}, \text{ kde } k \in \mathbb{N}.$$

---

*) Posloupnost $\{x_n\}$ může být i posl. komplex. čísel.

Číselné řady

Definice. Buď $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ posl. reálných čísel. Symbol

(1) $$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

nazýváme **řadou**, číslo a_n nazýváme **n-tým členem řady (1)** a číslo

$$s_k := \sum_{n=1}^{k} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_k\,, \quad k \in \mathbb{N},$$

k-tým částečným součtem řady (1). Součtem řady (1) nazveme limitu S posl. částečných součtů, pokud tato limita existuje. Součet řady budeme značit symbolem $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (tedy $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$). *)

Řekneme, že řada **konverguje**, je-li $S \in \mathbb{R}$. Je-li $S \in \{\pm\infty\}$, říkáme, že řada **diverguje** (k $+\infty$, nebo k $-\infty$). Jestliže $\lim_{k\to\infty} s_k$ neexistuje, říkáme, že řada **osciluje**.

Př.: Určete součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.

Řešení:

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$s_1 = \frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{2}$$

$\vdots$

$$s_k = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \dots + \frac{1}{k(k+1)} = \left(1-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{k+1} \to 1$$

pro $k \to \infty$.

Tedy $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$ (řada je konvergentní a má součet 1).

---

*) Symbol $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ značí jednak řadu, jednak součet této řady (pokud existuje).

Věta 48 (nutná podmínka konvergence pro řady).

Jestliže $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, pak $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Důkaz. $a_n = s_n - s_{n-1} \to S - S = 0$. $\square$

$$\begin{array}{ccc} s_n & & s_{n-1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ S & & S \end{array}$$

Př. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$ diverguje, neboť $a_n \not\to 0$ (je $|a_n| = 1 \not\to 0$).

Z věty o aritmetice limit ihned plyne:

Věta 49. (i) Je-li $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní a $\alpha \in \mathbb{R}$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n$ je konvergentní a platí $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(ii) Jsou-li řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergentní, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ je konvergentní a platí $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Věta 50. Buď $m \in \mathbb{N}$. Potom řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=m+1}^{\infty} a_n$ buďto obě konvergují, nebo obě divergují k $+\infty$, nebo obě divergují k $-\infty$, nebo obě oscilují. Jestliže konvergují, pak platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + \dots + a_m + \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n$$

(tj. součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ dostanu tak, že sečtu prvních m členů $a_1, \dots, a_m$ a k nim přičtu „zbytek řady po m-tém členu", tj. součet řady $\sum_{n=m+1}^{\infty} a_n$).

Poznámka. Z Věty 50 plyne: přidám-li, odstraním-li, nebo změním-li v řadě konečný počet členů, nemění se nic na chování řady.

(V případě konvergence se mění zřejmým způsobem hodnota součtu.)

Důkaz Věty 50. Buď $k \in \mathbb{N}$, $k > m$. Pak pro

$s_k := \sum_{n=1}^{k} a_n$, $\sigma_k := \sum_{n=m+1}^{m+k} a_n$ platí

$$S_k = \sum_{n=1}^{k} a_n = a_1 + \dots + a_m + \sum_{n=m+1}^{\overset{k}{\widehat{m+k-m}}} a_n = a_1 + \dots + a_m + \underbrace{\sigma_{k-m}}_{=:\tilde{\sigma}_k}.$$

Tedy

$$\lim_{k\to\infty} s_k \text{ ex.} \iff \text{ex.} \lim_{k\to\infty} \tilde{\sigma}_k \iff \text{ex.} \lim_{k\to\infty} \sigma_{k-m} \iff \text{ex.} \underbrace{\lim_{k\to\infty} \sigma_k}_{= \lim_{k\to\infty} \sigma_{k-m}}$$

$\Rightarrow$ c.b.d. $\square$

Řady s nezápornými členy

Je-li $a_n \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$, pak $\{s_k\}$ je neklesající posl.

Tedy

$\{s_k\}$ je konvergentní $\iff$ $\{s_k\}$ je shora omezená.

Důležitým nástrojem pro zkoumání řad s nezápornými členy je:

Věta 51 (Srovnávací kritérium). Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou řady s nezápornými členy. Nechť

(1) $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$: $0 \leq a_n \leq b_n$.

Pak platí:

(i) Je-li $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergentní, je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní.

(ii) Je-li $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentní, je $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergentní.

Důkaz. (ii) je důsledkem (i).

ad (i): BÚNO lze předpokládat, že $n_0 = 1$ (cf. Věta 50)

Nechť $s_k = \sum_{n=1}^{k} a_n$, $t_k = \sum_{n=1}^{k} b_n$, $k \in \mathbb{N}$.

Z (1) plyne

(2) $0 \leq s_k \leq t_k$ $\forall k \in \mathbb{N}$.

Je-li $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergentní, pak $\{t_k\}$ je shora omezená. Odtud a z (2) plyne, že $\{s_k\}$ je shora omezená, a tedy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentní. $\square$

Př. Dokažte, že $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ je konvergentní.

Řešení. Víme, že $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ je konvergentní (a má součet 1).

Protože

$$0 < \frac{1}{n^2} \leq \frac{2}{n(n+1)} \quad (\text{neb } n(n+1) \leq 2n^2)$$

plyne ze srovnávacího kritéria, že $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ je konvergentní (a její součet ≤ 2).

Věta 52 (limitní srovnávací kritérium). Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou řady s nezápornými členy. Nechť $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c$.

(i) Je-li $c \in (0, +\infty)$, pak

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje} \iff \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ konverguje}.$$

(ii) Je-li $c = 0$, pak

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ konverguje} \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje}.$$

(iii) Je-li $c = +\infty$, pak

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje} \implies \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ konverguje}.$$

Důkaz. ad (i): a) Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. Buď $\varepsilon > 0$ takové, že $c - \varepsilon > 0$. Pak

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0: \; \frac{a_n}{b_n} > c - \varepsilon,$$

a tedy

$$a_n > (c-\varepsilon) b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0.$$

Proto $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje dle Věty 51 a Věty 49.

b) Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje. Buď $\varepsilon > 0$. Pak

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0: \; \frac{a_n}{b_n} < c + \varepsilon,$$

a tedy $\quad a_n < (c+\varepsilon) b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0.$

Protože $\sum_{n=1}^{\infty} (c+\varepsilon) b_n$ je konvergentní, dle Věty 51 je

i $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní.

Důkaz (ii) a (iii) – Dcv. $\square$

Př. Geometrická řada $\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$ konverguje $\Leftrightarrow |q|<1$.

Řešení: $s_n = 1+q+\dots+q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q}$ $\forall q \neq 1$.

(i) Je-li $|q|<1$, pak $|q^n| = |q|^n \to 0$, a proto

$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{1-q}$.

Tedy pro $|q|<1$ řada $\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$ konverguje a má součet

$\frac{1}{1-q}$.

(ii) Je-li $|q|\geq 1$, pak $|q^{n-1}| = |q|^{n-1} \geq 1$.

$\Rightarrow$ není splněna nutná podmínka konvergence ($\lim_{n\to\infty} a_n = 0$)

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$ není konvergentní, je-li $|q|\geq 1$.

Př. Harmonická řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ je divergentní (a přitom splňuje nutnou podmínku konvergence ... $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$).

Řešení: Stačí ukázat, že posl. částečných součtů $\{s_k\}$ není shora omezená. To bude jistě pravda, pokud dokážeme, že

(1) $\quad s_{2^k} > \frac{k}{2} \quad \forall k \in \mathbb{N}$.

Buď $k=1$. Pak $s_{2^1} = 1 + \frac{1}{2} > \frac{1}{2}$ (tedy (1) platí pro $k=1$).

Předpokládejme, že (1) platí pro nějaké $k \in \mathbb{N}$. Potom

$$s_{2^{k+1}} = \underbrace{s_{2^k}}_{> \frac{k}{2} \text{ dle (1)}} + \underbrace{\overbrace{\frac{1}{2^k+1} + \frac{1}{2^k+2} + \dots + \frac{1}{2^{k+1}}}^{2^k \text{ sčítanců (neb } 2^{k+1} = 2^k + 2^k)}}_{> 2^k \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2}} > \frac{k}{2} + \frac{1}{2} = \frac{k+1}{2}.$$

Tedy (dle mat. indukce) (1) platí. $\square$

Věta 53 (odmocninové Cauchyovo kritérium). Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s nezápornými členy.

(i) Jestliže

(*) $\exists q \in (0,1)\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : \sqrt[n]{a_n} < q$,

pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentní.

Speciálně, je-li $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentní.

(ii) Jestliže

(2*) $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ pro nekonečně mnoho $n \in \mathbb{N}$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Speciálně, je-li $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Důkaz. ad (i): BÚNO lze předp., že $n_0 = 1$. Pak

$\forall n \in \mathbb{N}: \sqrt[n]{a_n} < q \Rightarrow (a_n < q^n =: b_n\ \forall n \in \mathbb{N})$

Protože $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} q^n = q \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}}_{\text{konverguje – viz 12. přednáška}}$ konverguje, tak

(dle srovnávacího kritéria) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

Speciálně, je-li $L := \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$, pak ex. $q \in (0,1)$ tak, že $L < q < 1$. Odtud a z definice limity plyne, že

$\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : \sqrt[n]{a_n} < q$.

Tedy platí (*) a z již dokázaného plyne dané tvrzení.

ad (ii): Je-li $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ pro nekonečně mnoho $n \in \mathbb{N}$, pak $a_n \geq 1$ pro nekonečně mnoho n, a tedy neplatí $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Proto $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje (k $+\infty$)

Speciálně, je-li $L := \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$, pak z definice limity máme:

$\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : \sqrt[n]{a_n} > 1$.

Tedy platí (2*) $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje. $\square$

Věta 54 (d'Alembertovo podílové kritérium). Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s kladnými členy.

(i) Jestliže

(1) $\exists q \in (0,1)\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : \frac{a_{n+1}}{a_n} < q$,

pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

Speciálně, je-li $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, pak $\sum_{n=1}^{\infty}$ je konvergentní.

(ii) Jestliže

(2) $\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$,

pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Speciálně, je-li $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Důkaz: ad (i): BÚNO lze předp., že $n_0 = 1$. Pak

$$a_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdot \ldots \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot a_1 \leq a_1 q^{n-1} =: b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Protože $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = a_1 \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$ konverguje, tak (dle srovnávacího kritéria) konverguje i $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Speciálně, je-li $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} =: L < 1$, pak

$\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : \frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{1+L}{2} =: q \in (0,1)$.

Tedy platí podmínka (1) a z již dokázaného plyne dané tvrzení.

ad (ii): BÚNO lze předp., že $n_0 = 1$. Pak dle (2) platí

$$a_n = \underbrace{\boxed{\frac{a_n}{a_{n-1}}}}_{\geq 1} \cdot \underbrace{\boxed{\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}}}_{\geq 1} \cdot \ldots \cdot \underbrace{\boxed{\frac{a_2}{a_1}}}_{\geq 1} a_1 \geq a_1 > 0.$$

Tedy neplatí $a_n \to 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Speciálně, je-li $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, pak z definice limity plyne:

$\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$.

Tedy platí (2*) $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje. $\square$

Poznámka: Podílové kritérium je často snazší pro použití než odmocninové kritérium, je však slabší v následujícím smyslu: Jestliže konvergence řady plyne z podílového kritéria, pak plyne i z odmocninového kritéria. To je důsledkem následujícího tvrzení:

Věta 55. Je-li $\{a_n\}$ posl. kladných čísel, pak

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n},$$

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}.$$

Speciálně tedy platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = A \in \mathbb{R}^* \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = A.$$

Důkaz vynecháme, speciální část bude dokázána na cvičení.

Věta 56 (kondenzační kritérium) Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s nezápornými členy a nechť $a_{n+1} \leq a_n \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Pak

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje} \iff \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}} \text{ konverguje.}$$

$$= a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} a_{2^{n-1}}$$

Důkaz. Označme $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$

$$t_k = a_1 + 2a_2 + \dots + 2^k a_{2^k}.$$

Stačí dokázat, že

(*) $\{s_n\}$ je shora omezená $\iff$ $\{t_k\}$ je shora omezená.

Je-li $n < 2^k$, pak

$$s_n \leq a_1 + (a_2 + a_3) + \dots + (\overbrace{a_{2^k} + \dots + a_{2^{k+1}-1}}^{2^k \text{ sčítanců}})$$

$$\leq a_1 + 2a_2 + \dots + 2^k a_{2^k} = t_k,$$

tedy

(1) $\quad s_n \leq t_k.$

Je-li $n > 2^k$, pak

$$s_n \geq a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + \dots + (\overbrace{a_{2^{k-1}+1} + \dots + a_{2^k}}^{2^{k-1} \text{ sčítanců}})$$

$$\geq \frac{1}{2}a_1 + a_2 + 2a_4 + \dots + 2^{k-1} a_{2^k} = \frac{1}{2} t_k ,$$

tedy

(2) $$2 s_n \geq t_k .$$

Z (1) a (2) plyne (*). □

Příklad. Vyšetřete konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{Z}$ ($\alpha \in \mathbb{R}$)

Ještě nemáme obecnou mocninu

Řešení (platí i pro $\alpha \in \mathbb{R}$).

1) Je-li $\alpha \leq 0$, je $\frac{1}{n^\alpha} = n^{-\alpha} \geq 1 \Rightarrow$ není splněna podmínka $a_n \to 0$, tedy $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ diverguje ($k + \infty$) pro $\alpha \leq 0$.

2) Buď $\alpha > 0$. Pak $0 < a_{n+1} < a_n$. Dále

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \frac{1}{(2^n)^\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(2^{1-\alpha}\right)^n \dots$$

geometrická řada s kvocientem $2^{1-\alpha}$. Tedy tato řada konverguje, je-li $2^{1-\alpha} < 1 \Leftrightarrow \alpha > 1$ a diverguje, je-li $0 < \alpha \leq 1$.

Závěr. Řada konverguje pro $\alpha > 1$, diverguje pro $\alpha \leq 0$.

Věta 57 (Raabeovo kritérium). Buď $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ řada s kladnými členy.

(i) Jestliže

$$\exists r > 1 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \geq r,$$

pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.

(ii) Jestliže

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \leq 1,$$

pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Důkaz vynecháme (viz Jarník DII, str. 114).

Věta 58 (Bolzanova – Cauchyova podmínka pro konvergenci řady).

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje právě tehdy, když platí

(BC) $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0, \forall k \in \mathbb{N} : \left|\sum_{i=n+1}^{n+k} a_i\right| < \varepsilon .$

Důkaz. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje $\Leftrightarrow \{s_k\}$ splňuje BC-podmínku pro konvergenci posloupnosti, tj.

(*) $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n, m \in \mathbb{N}, n, m \geq n_0 : |s_m - s_n| < \varepsilon .$

$\Updownarrow$

(**) $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0, \forall k \in \mathbb{N} : \underbrace{|s_{n+k} - s_n| < \varepsilon}_{\left|\sum_{i=n+1}^{n+k} a_i\right| < \varepsilon}$,

což je podmínka (BC). $\square$

14. přednáška MA-1a, ZS, šk. r. 2015/16, 24.11.2015

Definice. O řadě $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ říkáme, že je absolutně konvergentní, konverguje-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Jestliže $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, ale $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverguje, pak říkáme, že $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je neabsolutně konvergentní.

Poznámka. Absolutně konvergentní řady mají některé důležité vlastnosti, kterými se budeme zabývat později.

Př. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2}$ konverguje absolutně (to už víme)

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ konverguje neabsolutně (uvidíme později; zatím víme, že nekonverguje absolutně).

Věta 59. Absolutně konvergentní řada je konvergentní.

Důkaz. Jestliže $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konverguje, pak splňuje BC-podmínku, tj.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0, \ \forall k \in \mathbb{N}: \sum_{i=n+1}^{n+k} |a_i| < \varepsilon.$$

Protože $\left| \sum_{i=n+1}^{n+k} a_i \right| \leq \sum_{i=n+1}^{n+k} |a_i|$,

splňuje BC-podmínku i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentní. □

Poznámky k řadám komplex. čísel

Je-li $\{a_n\}_1^{\infty}$ posl. komplex. čísel, pak pojmy řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a její konvergence (absolutní konvergence, neabsolutní konvergence) se definují zcela analogicky jako v případě, že $\{a_n\}_1^{\infty}$ je posl. reálných čísel.

Z Věty 46 (o limitě posl. komplex. čísel), 11. přednáška, vak ihned plyne

Věta 60. Buď $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ řada komplex. čísel a $S = S_1 + i S_2$, kde $S_1, S_2 \in \mathbb{R}$. Pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje a má součet S právě tehdy, když řady $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im} a_n$ konvergují a $S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} a_n$, $S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im} a_n$.

Také platí analogie Věty 58:

Věta 58*. Řada komplexních čísel $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje právě tehdy, když platí

(BC) $\forall \varepsilon>0\ \exists n_0\in\mathbb{N}\ \forall n\in\mathbb{N}, n\geq n_0, \forall k\in\mathbb{N}: \left|\sum_{i=n+1}^{n+k} a_i\right| < \varepsilon.$

Důkaz plyne z Věty 60, z Věty 58 použité na řady $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im} a_n$ a z odhadu

$$\max\{|\operatorname{Re} z|, |\operatorname{Im} z|\} \leq |z| \leq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z| \quad \forall z\in\mathbb{C}. \qquad \square$$

Z uvedeného plyne, že Věta 59 zůstává v platnosti i pro řadu komplexních čísel.

Neabsolutně konvergentní řady

Lemma 61 (Abelova parciální sumace). Nechť $n\in\mathbb{N}$, $n>1$, $a_i, b_i\in\mathbb{C}$ pro $i=1,\dots,n$. Buď $s_k := \sum_{i=1}^{k} a_i$. Pak

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n-1} s_k(b_k-b_{k+1}) + s_n b_n.$$

Důkaz: Položme $s_0=0$. Pak

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n} (s_k - s_{k-1}) b_k = \sum_{k=1}^{n} s_k b_k - \sum_{k=1}^{n} \underbrace{s_{k-1}}_{k-1=i} b_k =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} s_k b_k - \underbrace{\sum_{i=0}^{n-1} s_i b_{i+1}}_{=\sum_{k=1}^{n-1} s_k b_{k+1}\ (\text{neb } s_0=0)} = \sum_{k=1}^{n-1} s_k(b_k-b_{k+1}) + s_n b_n. \qquad \square$$

Věta 62 (Dirichletovo a Abelovo kritérium). Nechť $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ je posloupnost komplex. čísel a $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ je monotónní posl. reálných čísel. Pak $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ konverguje, jestliže

(D) $\left\{\sum_{k=1}^{n} a_k\right\}_{n=1}^{\infty}$ je omezená posl. a $\lim_{k\to\infty} b_k = 0$

nebo

(A) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konverguje a posl. $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ je omezená.

Důkaz provedeme později.

Poznámka. Jedná se o 2 kritéria neabsolutní konvergence řady $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$. První z nich, založené na předpokladu (D), se nazývá Dirichletovo, druhé, —"— —"— (A), se nazývá Abelovo.

Speciálním případem Dirichletova kritéria je Leibnizovo kritérium.

Věta 63 (Leibnizovo kritérium). Nechť $0 \leq a_{k+1} \leq a_k \; \forall k \in \mathbb{N}$. Pak

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k \text{ konverguje} \iff \lim_{k\to\infty} a_k = 0.$$

Důkaz. (i) Řada $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k$ má omezené částečné součty a $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ je monotónní. Je-li tedy $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$, pak dle Dirichletova kritéria $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$ konverguje.

(ii) Jestliže naopak $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$ konverguje, pak

$$0 = \lim_{k\to\infty} (-1)^k a_k \iff \lim_{k\to\infty} |(-1)^k a_k| = 0 \iff$$

$$\iff \lim_{k\to\infty} |a_k| = 0 \iff \lim_{k\to\infty} a_k = 0. \quad \square$$

Př. Ukažte, že $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ konverguje.

Řešení. Posloupnost $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ je nerostoucí posl. nezáporných čísel, pro kterou platí $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Dále řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ má omezené částečné součty. Tedy podle Leibnizova kritéria $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ konverguje.

Důkaz Věty 62. (i) Předp., že platí (D). Pak

(1) $$\exists M \in (0,+\infty)\ \forall n \in \mathbb{N} : \left| \sum_{k=1}^{n} a_k \right| \le M .$$

Buď $\varepsilon > 0$. Pak

(2) $$\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall k \in \mathbb{N},\ k \ge n_0 : \ |b_k| < \frac{\varepsilon}{2M} .$$

BÚNO lze předp., že $\{b_k\}$ je nerostoucí (jinak místo $\{b_k\}$ vezmeme $\{-b_k\}$).

Buď $n \in \mathbb{N}$, $n \ge n_0$ pevné a $k \in \mathbb{N}$. Položíme-li

$\alpha_k := a_{n+k}$, $\beta_k := b_{n+k}$, pak dle (1) platí

(3) $$\left|\sum_{j=1}^{k} \alpha_j\right| = \left|\sum_{j=1}^{k} a_{n+j}\right| = \left|\sum_{i=n+1}^{n+k} a_i\right| = \left|\sum_{i=1}^{n+k} a_i - \sum_{i=1}^{n} a_i\right| \le$$
$$\le \left|\sum_{i=1}^{n+k} a_i\right| + \left|\sum_{i=1}^{n} a_i\right| \le 2M .$$

Podle Abelovy parciální sumace $\forall m \in \mathbb{N}$ máme

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+m} a_k b_k\right| = \left|\sum_{k=1}^{m} \alpha_k \beta_k\right| = \left|\sum_{k=1}^{m-1} s_k (\beta_k - \beta_{k+1}) + s_m \beta_m\right| \le$$

$$s_k := \sum_{i=1}^{k} \alpha_i$$

$$\le \sum_{k=1}^{m-1} \underbrace{|s_k|}_{\le 2M \text{ dle (3)}} |\beta_k - \beta_{k+1}| + \underbrace{|s_m|}_{\le 2M \text{ dle (3)}} |\beta_m| \le$$

$$\le 2M \Big(\sum_{k=1}^{m-1} \underbrace{|\beta_k - \beta_{k+1}|}_{= \beta_k - \beta_{k+1} \text{ neb } b_k \searrow \text{ a } \beta_k = b_{n+k}} + \underbrace{|\beta_m|}_{= b_{n+m} = \beta_m} \Big)$$

$$= 2M \Big(\underbrace{\sum_{k=1}^{m-1} (\beta_k - \beta_{k+1}) + \beta_m}_{\beta_1} \Big) = 2M \beta_1 = 2M b_{n+1} <$$

$$\underset{\text{dle (2)}}{<} 2M \frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon .$$

Tedy $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ splňuje BC-podmínku $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ konverguje.

(ii) Předpokládejme nyní, že platí předpoklad (A). Omezená monotónní posl. $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ má konečnou limitu, označme ji b.

Položme $c_k = b_k - b$, $k \in \mathbb{N}$. Pak $\{c_k\}$ je omezená monotónní posl. a platí $\lim\limits_{k\to\infty} c_k = 0$. Protože

$$\sum_{k=1}^{n} a_k c_k = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k - b \sum_{k=1}^{n} a_k \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

a

$$(*) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konverguje,}$$

vidíme, že

$$(2*) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} a_k c_k \text{ konverguje} \iff \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k \text{ konverguje.}$$

Z (*) plyne, že řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ má omezené částečné součty. Tedy $\sum_{k=1}^{\infty} a_k c_k$ konverguje dle Dirichletova kritéria. Odtud a z (2*) plyne konvergence řady $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$. $\square$

Limita a spojitost funkce.

Definice. Buď $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Řekneme, že f je:

sudá, jestliže $\forall x \in D(f): -x \in D(f) \wedge f(-x) = f(x)$,

lichá, jestliže $\forall x \in D(f): -x \in D(f) \wedge f(-x) = -f(x)$,

periodická s periodou $p \in (0, +\infty)$, jestliže

$$\forall x \in D(f): x \pm p \in D(f) \wedge f(x \pm p) = f(x).$$

Je-li $M \subset D(f)$, řekneme, že **f je konstantní na M**, jestliže

$$\forall x, y \in M: f(x) = f(y).$$

<u>Definice</u>. Je-li $a \in \mathbb{R}^*$ a $\delta > 0$, pak definujeme:

$P(a,\delta) := U(a,\delta) \setminus \{a\}$ ... prstencové okolí bodu a.
(redukované)

Dále pro $a \in \mathbb{R}$ a $\delta > 0$ definujeme:

$U_+(a,\delta) := \langle a, a+\delta)$ ... pravé okolí bodu a,

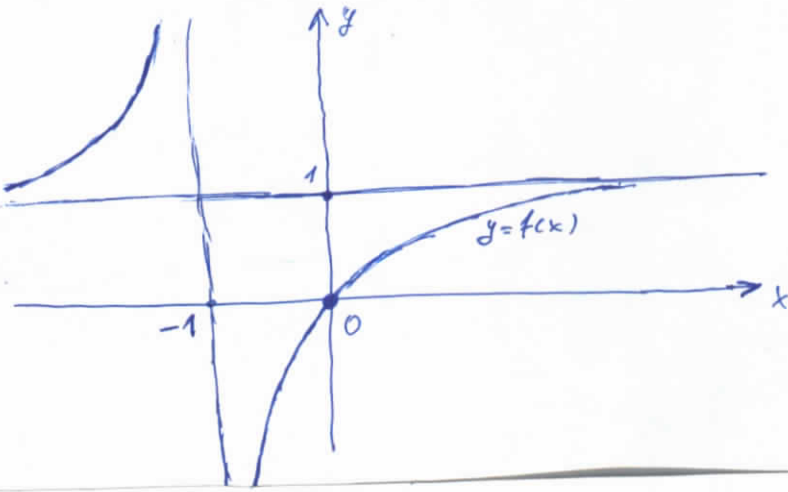
$U_-(a,\delta) := (a-\delta, a\rangle$ ... levé okolí bodu a,

$P_+(a,\delta) := U_+(a,\delta) \setminus \{a\}$ ... pravé prstencové okolí bodu a,

$P_-(a,\delta) := U_-(a,\delta) \setminus \{a\}$ ... levé prstencové okolí bodu a.

Pokud nás nezajímá konkrétní hodnota δ, pak někdy symbol δ z těchto značení vynecháváme a např. místo $U(a,\delta)$ píšeme jen $U(a)$.

Uvažujme fci $f(x) := \frac{x}{x+1}$. Platí $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Zajímá nás chování fce f pro velká x, přesněji pro $x \to +\infty$.
Protože $f(x) = \frac{x}{x+1} = \frac{x+1}{x+1} - \frac{1}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$,
vidíme, že hodnoty fce f pro $x \to +\infty$ se blíží k hodnotě 1.



Tento fakt vyjádříme slovy, že fce f má v bodě $+\infty$ limitu 1. Aby tento výrok měl přesný smysl, je třeba pojem limity fce přesně definovat.

Definice. Buď $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Říkáme, že fce f má v bodě $a \in \mathbb{R}^*$ limitu $A \in \mathbb{R}^*$ (značíme $\lim_{x\to a} f(x) = A$), jestliže

$\forall U(A)\ \exists P(a)\ \forall x \in P(a): f(x) \in U(A)$.

Podrobněji:

(*) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in P(a,\delta): f(x) \in U(A,\varepsilon)$.

Poznámky. (i) Je-li $\lim_{x\to a} f(x) = A$, pak f musí být definována v nějakém $P(a)$ (což je neprázdná množina).

(ii) V (*) se stačí omezit na malá kladná ε.

(iii) Je-li $a \in D(f)$, pak hodnota limity fce f v bodě a nezávisí na $f(a)$.

(iv) $\lim_{x\to a} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0: f(P(a,\delta)) \subset U(A,\varepsilon)$.

(v) Mohou nastat tyto případy:

$\lim_{x\to a} f(x)$ < neexistuje; existuje < vlastní; nevlastní < $+\infty$

(vi) Je-li $a \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}$, pak

$$(*) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in \underbrace{(a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\}}_{0 < |x-a| < \delta} : |f(x) - A| < \varepsilon .$$

Je-li $a \in \mathbb{R}$ a $A = +\infty$, pak

$$(*) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in (a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\} : f(x) > \frac{1}{\varepsilon} .$$

Je-li $a = +\infty$ a $A \in \mathbb{R}$, pak

$$(*) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \underbrace{\forall x \in P(+\infty, \delta)}_{\forall x \in \mathbb{R},\ x > \frac{1}{\delta}} : |f(x) - A| < \varepsilon .$$

Atd.

Př. 1. Nechť $f(x) = x$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Dokažte, že

1) $\lim_{x \to a} f(x) = a$ $\forall a \in \mathbb{R}$,

2) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Řešení. ad (1): Máme dokázat

$$(\mathrm{I}) \quad \forall U(a,\varepsilon)\ \exists P(a,\delta)\ \forall \underbrace{x \in P(a,\delta)}_{\Updownarrow \atop 0<|x-a|<\delta} : \underbrace{f(x) \in U(a,\varepsilon)}_{\Updownarrow \atop {|f(x)-a|<\varepsilon \atop {\Updownarrow \atop |x-a|<\varepsilon}}}$$

Odtud plyne, že k danému $\varepsilon > 0$ stačí volit $\delta = \varepsilon$ a (I) pak platí.

ad 2): Máme dokázat

$$(\mathrm{II}) \quad \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in \mathbb{R},\ x > \frac{1}{\delta} : \underbrace{f(x)}_{=x} > \frac{1}{\varepsilon} .$$

Opět tedy stačí k danému $\varepsilon > 0$ volit $\delta = \varepsilon$ a (II) pak platí.

Př. 2. Nechť $f(x) = c \in \mathbb{R}$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Dokažte, že pak $\lim_{x \to a} f(x) = c$ $\forall a \in \mathbb{R}^*$.

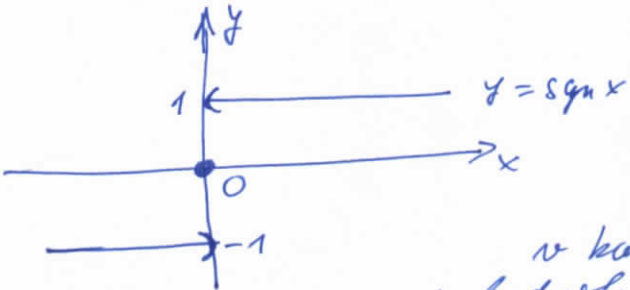
Řešení. Máme dokázat: $\forall U(c)\ \exists P(a)\ \forall x \in P(a) : \underbrace{\underbrace{f(x)}_{=c} \in U(c)}$

To ovšem platí vždy. Proto stačí volit $P(a)$ libovolné.

Př. 3. Buď $f(x) = \frac{x}{x+1}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Z definice limity dokažte, že $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$.

Dů. (udělat na cvičení)

Buď $f(x) = \operatorname{sgn} x := \begin{cases} 1, & x \in (0, +\infty) \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x \in (-\infty, 0) \end{cases}$



Snadno nahlédneme, že $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ neexistuje (neboť v každém $P(0)$ leží body, v nichž je hodnota fce f rovna 1, a také body, v nichž je hodnota fce f rovna -1.

Tato funkce však má v bodě 0 jednostranné limity.

Definice. Nechť $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Řekneme, že fce f má v bodě $a \in \mathbb{R}$ zprava limitu $A \in \mathbb{R}^*$ (značíme $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = A$), jestliže

$$\forall \mathcal{U}(A)\ \exists P_+(a)\ \forall x \in P_+(a): f(x) \in \mathcal{U}(A).$$

Analogicky definujeme $\lim\limits_{x \to a-} f(x)$.

Př. $\lim\limits_{x \to 0+} \operatorname{sgn} x = 1$, $\lim\limits_{x \to 0-} \operatorname{sgn} x = -1$

To ihned plyne z definice (stačí volit $P_+(0)$ a $P_-(0)$ libovolné).

Snadným důsledkem uvedených definic je následující tvrzení.

Věta 64. Je-li $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ a $A \in \mathbb{R}^*$, pak

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \iff \left(\lim_{x \to a+} f(x) = A \wedge \lim_{x \to a-} f(x) = A \right).$$

Věta 65 (o jednoznačnosti limity fce). Funkce má v bodě nejvýše jednu limitu.

Důkaz – sporem.

Nechť $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A_1 \wedge \lim\limits_{x\to a} f(x) = A_2 \wedge A_1 \neq A_2$.

Odtud máme:

(1) $\forall U(A_1)\ \exists P_1(a)\ \forall x \in P_1(a) : f(x) \in U(A_1)$

(2) $\forall U(A_2)\ \exists P_2(a)\ \forall x \in P_2(a) : f(x) \in U(A_2)$.

Protože $A_1 \neq A_2$, existují $U(A_1)$ a $U(A_2)$ tak, že $U(A_1) \cap U(A_2) = \emptyset$.

Z (1) a (2) dostaneme, že existují příslušná $P_1(a)$ a $P_2(a)$.

Pak pro $x \in P_1(a) \cap P_2(a)$ platí $f(x) \in U(A_1) \cap U(A_2) = \emptyset$, což je spor.

Tedy Věta 65 platí. $\square$

Poznámka. Platí i analogie Věty 65 pro jednostranné limity.

Věta 66 (Heine). Nechť $a, A \in \mathbb{R}^*$ a fce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je definována na nějakém prstencovém okolí bodu a. Pak $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ právě tehdy, když pro každou posloupnost splňující

$a \neq x_n\ \forall n \in \mathbb{N},\ x_n \to a$, platí $f(x_n) \to A$.

Důkaz. (i) Předp., že $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$. $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall U(A)\ \exists P(a)\ \forall x \in P(a) : f(x) \in U(A)$. $(*)$

Buď dáno $U(A)$. Dle $(*)$ ex. $P(a)$. Nechť $a \neq x_n \to a$.
Pak $\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 : x_n \in P(a)$, a tedy dle $(*)$ platí $f(x_n) \in U(A)$.

Tedy $\forall U(A)\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 : f(x_n) \in U(A)$

$\Leftrightarrow f(x_n) \to A$.

(ii) Předp., že $\forall \{x_n\}$ splňující $a \neq x_n\ \forall n \in \mathbb{N},\ x_n \to a$, platí $f(x_n) \to A$. Důkaz provedeme sporem. Předp., že $(*)$ neplatí. Tedy

$\exists U(A)\ \forall P(a)\ \exists x \in P(a) : f(x) \notin U(A)$. $(2*)$

Buď $n \in \mathbb{N}$. Pak dle (2*) k $P(a, \frac{1}{n})$ $\exists \underbrace{x_n \in P(a, \frac{1}{n})}_{\Downarrow \; a \neq x_n \to a}$ tak, že $f(x_n) \notin U(A)$.

$\Downarrow$

$f(x_n) \not\to A$.

Dostáváme tedy spor. Proto (*) platí. $\square$

Definice. Buď $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$. Řekneme, že fce f je:

spojitá v bodě a, jestliže $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$,

spojitá zprava v bodě a, jestliže $\lim_{x \to a+} f(x) = f(a)$,

spojitá zleva v bodě a, jestliže $\lim_{x \to a-} f(x) = f(a)$.

Poznámky. (i) Funkce f je spojitá v bodě a $\iff$

$\iff \forall U(f(a)) \; \exists P(a) \; \forall x \in P(a): \; f(x) \in U(f(a))$

$\iff \forall U(f(a)) \; \exists U(a) \; \forall x \in U(a): \; f(x) \in U(f(a))$.

(ii) Z Věty 64 plyne, že fce f je spojitá v bodě a právě tehdy, je-li spojitá v bodě a zprava i zleva.

Důsledkem Věty 66 (Heine) je následující tvrzení.

Věta 67 (Heineova věta pro spojitost). Buď $a \in \mathbb{R}$ a $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fce, která je definována na nějakém $U(a)$. Pak fce f je spojitá v bodě a právě tehdy, když pro každou posloupnost $\{x_n\}$ splňující $x_n \to a$ platí $f(x_n) \to f(a)$.

Poznámka. Platí i jednostranné verze Vět 66 a 67.

Věta 68 (o vztahu limity a omezenosti). Nechť $\lim_{x\to a} f(x) = A \in \mathbb{R}$. Pak ex. $P(a)$ tak, že f je omezená na $P(a)$.

Důkaz. Z definice limity plyne:

$$\exists P(a)\ \forall x \in P(a) : f(x) \in U(A,1)$$
$$\Updownarrow$$
$$|f(x)-A|<1 \iff A-1<f(x)<A+1.$$

$\square$

Z Heineovy věty pro limity a z věty o aritmetice limit pro posloupnosti ihned plyne:

Věta 69 (o aritmetice limit) Nechť $a \in \mathbb{R}^*$, $\lim_{x\to a} f(x) = A \in \mathbb{R}^*$, $\lim_{x\to a} g(x) = B \in \mathbb{R}^*$. Pak

(i) $\lim_{x\to a} (f(x)+g(x)) = A+B$, má-li $A+B$ smysl;

(ii) $\lim_{x\to a} (f(x)\cdot g(x)) = A\cdot B$, má-li $A\cdot B$ smysl;

(iii) $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$, má-li $\frac{A}{B}$ smysl.

Věta 70. Je-li $\lim_{x\to a} f(x) = A$, pak $\lim_{x\to a} |f(x)| = |A|$.

Důsledek 71. Jsou-li fce f, g spojité v bodě $a \in \mathbb{R}$, pak také fce $f+g$, $f\cdot g$, $|f|$ jsou spojité v bodě a. Je-li navíc $g(a) \neq 0$, pak také fce $\frac{f}{g}$ je spojitá v bodě a.

Důsledek Vět 69 a 70

Př. 3 z listu 3

Př: Buď $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ daná předpisem $f(x) = \frac{x}{x+1}$.

Dokažte, že

(1) $$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1.$$

Řešení: $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Tedy f je definovaná např. v $P(+\infty, 1)$, a proto má smysl mluvit o $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

Máme dokázat

(2) $$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in P(+\infty, \delta): f(x) \in U(1, \varepsilon).$$

Buď $\varepsilon > 0$. Pak podmínka $f(x) \in U(1,\varepsilon)$ znamená

$$|f(x) - 1| < \varepsilon \iff \left|\frac{x}{x+1} - 1\right| < \varepsilon \iff \left|\frac{x-(x+1)}{x+1}\right| < \varepsilon \iff \frac{1}{|x+1|} < \varepsilon,$$

což má dle (2) platit $\forall x > \frac{1}{\delta}$, kde $\delta > 0$.

Je-li $\delta > 0$ a $x > \frac{1}{\delta}$, je $x > 0$, a proto $|x+1| = x+1 > 0$. Tedy pak

$$\frac{1}{|x+1|} < \varepsilon \iff \frac{1}{x+1} < \varepsilon \iff \frac{1}{\varepsilon} < x+1 \iff \frac{1}{\varepsilon} - 1 < x \quad (3).$$

Omezme se na $\varepsilon \in (0,1)$. Nerovnost (3) má platit $\forall x > \frac{1}{\delta}$, kde $\delta > 0$. Zvolme tedy $\delta > 0$ tak, aby

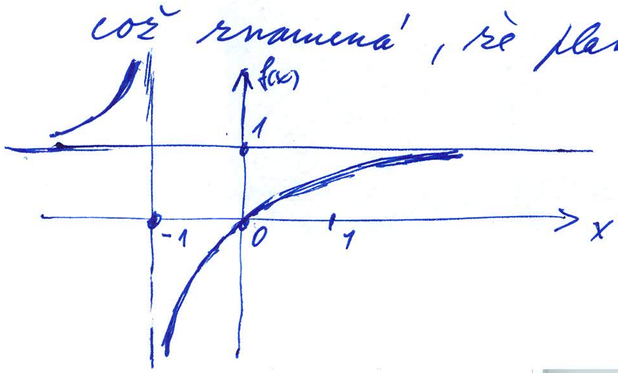
$$\frac{1}{\varepsilon} - 1 < \frac{1}{\delta}, \text{ tj. } \delta < \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon} - 1} = \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}.$$

Je-li $\varepsilon \in (0,1)$, $\delta \in \left(0, \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)$ a $x > \frac{1}{\delta}$, pak platí

$$\frac{1}{\varepsilon} - 1 < \frac{1}{\delta} < x \implies \frac{1}{\varepsilon} - 1 < x \implies \frac{1}{\varepsilon} < x+1 \implies \underbrace{\frac{1}{x+1}}_{= 1 - \frac{x}{x+1}} < \varepsilon \implies$$

$$\implies \varepsilon > 1 - \frac{x}{x+1} = \left|1 - \frac{x}{x+1}\right| = \left|\frac{x}{x+1} - 1\right| = |f(x) - 1|.$$

Tedy platí (2) (pro $\varepsilon \in (0,1)$) $\implies$ (2) platí $\forall \varepsilon > 0$, což znamená, že platí (1).



Definice. Nechť $n \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$, $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, $a_0 \neq 0$. Pak fci

$$P(x) := a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \quad x \in \mathbb{R},$$

nazýváme polynom stupně n.

Poznámka. Protože fce $f(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$, a fce $g(x) = c$, $x \in \mathbb{R}$, kde $c \in \mathbb{R}$, jsou spojité v $\mathbb{R}$ *) (viz Př. 1 a Př. 2 z 15. přednášky), je každý polynom spojitý v celém $\mathbb{R}$.

Je-li $R := \dfrac{P}{Q}$, kde P a Q jsou polynomy, pak $D(R) = \{x \in \mathbb{R};\ Q(x) \neq 0\}$ a dle věty o spojitosti podílu (= Důsledek 71) je R spojitá fce v $D(R)$.

Př. $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x+2)}{\cancel{x-1}} = \lim_{x \to 1} (x+2) = 1 + 2 = \underline{\underline{3}}$

Důsledkem Heineovy věty (Věta 66) a Věty 29 (o limitě součinu omezené posl. a posl. s limitou 0) ze 7. přednášky je následující věta.

Věta 72 (o limitě součinu omezené fce a fce s limitou 0). Nechť $a \in \mathbb{R}^*$, $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ a nechť ex. $\delta > 0$ tak, že g je omezená na $P(a, \delta)$. Pak $\lim_{x \to a} f(x) g(x) = 0$.

Podobně, důsledkem Věty 66 (Heineova) a Věty 37 (o limitě podílu posl. s kladnou a nulovou limitou) z 9. přednášky je

Věta 73 (o limitě podílu fcí s kladnou a nulovou limitou). Nechť $a \in \mathbb{R}^*$, $\lim_{x \to a} f(x) = A \in \mathbb{R}^*$, $A > 0$, a nechť $\lim_{x \to a} g(x) = 0$. Jestliže

$$\exists \delta > 0\ \forall x \in P(a, \delta) : g(x) > 0,$$

pak

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty.$$

---

*) Tj. spojité v každém bodě $x \in \mathbb{R}$.

Předpokládám, že fce sin studenti znají ze střední školy

Př. Nechť $h(x) = x \sin \frac{1}{x}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dokažte, že $\lim_{x \to 0} h(x) = 0$.

Řešení. Položme $f(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \sin \frac{1}{x}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Pak $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$ (to víme z 15. přednášky) a fce g je omezená v $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Tedy podle Věty 72 platí

$$0 = \lim_{x \to 0} f(x) g(x) = \lim_{x \to 0} h(x).$$

Věta 74 (o limitě složené fce). Nechť $a, A, B \in \mathbb{R}^*$,

$$\lim_{x \to a} f(x) = A, \quad \lim_{y \to A} g(y) = B.$$

Nechť platí jedna z podmínek:

(P) $\exists P(a)\ \forall x \in P(a) : f(x) \neq A$;

(S) fce g je spojitá v bodě A.

Pak $\lim_{x \to a} g(f(x)) = B$.

Důkaz. Podle Věty 66 (Heine) máme dokázat: Je-li $\{x_n\}$ posl. splňující

(1) $x_n \neq a\ \forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \to a$,

pak

(2) $g(f(x_n)) \to B$.

Víme:

(3) $x_n \neq a\ \forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \to a \Rightarrow f(x_n) \to A$,

(4) $y_n \neq A\ \forall n \in \mathbb{N}$, $y_n \to A \Rightarrow g(y_n) \to B$.

Nechť posl. $\{x_n\}$ splňuje (1). Pak dle (3) platí

(5) $y_n := f(x_n) \to A$.

(i) Předpokládejme, že je splněna podmínka (P). Z (1) pak plyne, že

(6) $\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : x_n \in P(a)$.

BÚNO lze předp., že $n_0 = 1$. Pak dle (P) máme $y_n = f(x_n) \neq A \ \forall n \in \mathbb{N}$. Odtud, z (5) a (4) plyne, že

$$g(f(x_n)) = g(y_n) \to B,$$

tj. platí (2).

(ii) Předpokládejme nyní, že je splněna podmínka (S). Pak místo (4) dokonce platí

$$(4') \qquad y_n \to A \implies g(y_n) \to g(A) = B.$$

Odtud a z (5) dostáváme

$$g(f(x_n)) = g(y_n) \to g(A) = B,$$

tj. opět platí (2). $\square$

Důsledkem Věty 74 je následující tvrzení.

Věta 75. (o spojitosti složené fce) Nechť fce f je spojitá v bodě $a \in \mathbb{R}$ a fce g je spojitá v bodě $f(a)$. Pak fce $h := g \circ f$ je spojitá v bodě a.

Př. Buď g fce spojitá v bodě 0. Dokažte, že pak

$$\lim_{x \to +\infty} g\left(\tfrac{1}{x}\right) = g(0).$$

Řešení. Víme, že $\lim_{y \to 0} g(y) = g(0)$. Položíme-li $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, pak dle Př. 1 z 15. přednášky a dle VAL máme $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{+\infty} = 0$. Proto podle Věty 74 s podmínkou (S) dostáváme

$$\lim_{x \to +\infty} g\left(\tfrac{1}{x}\right) = \lim_{x \to +\infty} g(f(x)) = g(0). \quad \square$$

Platí varianty věty o limitě složené fce pro jednostranné limity. Bez důkazu uvedeme jednu z nich.

Věta 74'. Nechť $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $A \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $B \in \mathbb{R}^*$,

$$\lim_{x \to a+} f(x) = A \;, \quad \lim_{y \to A-} g(y) = B .$$

Jestliže

$$\exists P_+(a) \; \forall x \in P_+(a) : f(x) < A ,$$

pak

$$\lim_{x \to a+} g(f(x)) = B .$$

Věta 76 (o limitách a uspořádání). Buď $a \in \mathbb{R}^*$.

(i) Je-li $\lim_{x \to a} f(x) < \lim_{x \to a} g(x)$, pak

$$\exists P(a) \; \forall x \in P(a) : f(x) < g(x) .$$

(ii) Nechť

$$\exists P(a) \; \forall x \in P(a) : f(x) \le g(x) .$$

Jestliže existují $\lim_{x \to a} f(x)$ a $\lim_{x \to a} g(x)$, pak

$$\lim_{x \to a} f(x) \le \lim_{x \to a} g(x) .$$

(iii) (dva policajti proti) Nechť

$$\exists P(a) \; \forall x \in P(a) : f(x) \le g(x) \le h(x) .$$

Je-li $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = A \in \mathbb{R}$,

pak $\lim_{x \to a} g(x) = A$.

(iv) (jeden policajt proti). Nechť

$$\exists P(a) \; \forall x \in P(a) : f(x) \le g(x) .$$

Je-li $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$, pak $\lim_{x \to a} g(x) = +\infty$.

Je-li $\lim_{x \to a} g(x) = -\infty$, pak $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$.

Důkaz. Důkazy jsou analogické důkazům příslušných tvrzení pro posloupnosti. Proto dokážeme jen část (i), důkazy ostatních částí ponechám za Dcv.

ad (i): Nechť

(1) $A_1 := \lim_{x\to a} f(x)$, $A_2 := \lim_{x\to a} g(x)$, $A_1 < A_2$.

Pak $\exists\, \mathcal{U}(A_1)\ \exists\, \mathcal{U}(A_2) : \mathcal{U}(A_1) \cap \mathcal{U}(A_2) = \emptyset$,
a tedy platí

(2) $\forall y_1 \in \mathcal{U}(A_1)\ \forall y_2 \in \mathcal{U}(A_2) : y_1 < y_2$.

Z definic limit uvedených v (1) plyne:

$$(3)\ \begin{cases} \exists P_1(a)\ \forall x \in P_1(a) : f(x) \in \mathcal{U}(A_1), \\ \exists P_2(a)\ \forall x \in P_2(a) : g(x) \in \mathcal{U}(A_2). \end{cases}$$

Nechť $P(a) := P_1(a) \cap P_2(a)$. Pak dle (3) a (2) platí

$$\forall x \in P(a) : f(x) < g(x). \quad \square$$

Věta 77 (limita monotónní fce). Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, a fce f je monotónní na (a,b). Pak existují $\lim_{x\to a+} f(x)$, $\lim_{x\to b-} f(x)$ a platí:

(i) Je-li f neklesající na (a,b), potom
$\lim_{x\to a+} f(x) = \inf f((a,b))$ a $\lim_{x\to b-} f(x) = \sup f((a,b))$.

(ii) Je-li f nerostoucí na (a,b), potom
$\lim_{x\to a+} f(x) = \sup f((a,b))$ a $\lim_{x\to b-} f(x) = \inf f((a,b))$.

Důkaz. Dokážeme (i) ((ii) se dokáže analogicky).
Označme $m = \inf f((a,b))$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Z vlastnosti infima plyne, že ex. $y \in f((a,b))$ tak, že $y < m + \varepsilon$.
Protože $y \in f((a,b))$, existuje $\bar{x} \in (a,b)$ takový, že $y = f(\bar{x})$. Protože f je neklesající na (a,b), platí

$$\forall x \in (a, \bar{x}) : f(x) \le f(\bar{x}) < m + \varepsilon.$$

Protože m je dolní odhad množiny $f((a,b))$, platí

$$\forall x \in (a,b): \quad m \leq f(x).$$

Celkem tedy máme

$$\forall x \in (a,\bar{x}): \quad m \leq f(x) < m+\varepsilon.$$

$\Rightarrow$ Položíme-li $\delta := \bar{x} - a > 0$, pak platí

$$\forall x \in P_+(a,\delta): \quad |f(x) - m| = f(x) - m < \varepsilon,$$

tj. dokázali jsme, že

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in P_+(a,\delta): |f(x) - m| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \quad \lim_{x \to a+} f(x) = m = \inf f((a,b)).$$

Důkaz rovnosti

$$\lim_{x \to b-} f(x) = \sup f((a,b))$$

./. si analogicky!

□

17. přednáška MA-1, ZS, šk. r. 2015/16, 3. 12. 2015

Definice. Buď $I \subset \mathbb{R}$ nedegenerovaný interval a f zobrazení intervalu I do $\mathbb{R}$. Řekneme, že f je spojitá na intervalu I (značení $f \in C(I)$), jestliže:

(i) f je spojitá zprava v každém bodě $a \in I$, který není koncovým bodem intervalu I,

(ii) f je spojitá zleva v každém bodě $a \in I$, který není počátečním bodem intervalu I.

Věta 78 (Bolzanova o nabývání mezihodnot). Nechť $\langle a,b\rangle \subset \mathbb{R}$ a $f \in C(\langle a,b\rangle)$. Je-li $f(a) < f(b)$ a $y \in (f(a), f(b))$, pak ex. $c \in (a,b)$ tak, že $f(c) = y$. (Analogické tvrzení platí i v případě, že $f(b) < f(a)$.)

Důkaz. Buď $M := \{x \in \langle a,b\rangle \,;\, f(x) \leq y\}$. Pak:

1, $M \neq \emptyset$ (neb $a \in M$).

2, M je shora omezená (neb b je horní odhad množiny M).

Tedy $\exists\, c \in \mathbb{R}$ tak, že $c := \sup M$. Navíc $a \leq c$ (neb $a \in M$), $c \leq b$ (neb b je horní odhad množiny M), tedy $a \leq c \leq b$.

Dokážeme, že $f(c) = y$:

Kdyby $f(c) > y$, pak $c \neq a$ (neb $f(a) < y$ dle volby y). Ze spojitosti fce f zleva v bodě c plyne, že $\exists\, \delta > 0$ tak, že $f(x) > y$ $\forall\, x \in (c-\delta, c\rangle$. Tedy celý interval $(c-\delta, c\rangle$ nepatří do M – to je spor s definicí suprema (protože $c-\delta < c := \sup M$, musí ex. $c_\delta \in M$ tak, že $c-\delta < c_\delta$, tedy $c - \delta < \underset{\in M}{c_\delta} \leq c$).

$$c_\delta \in M \Longrightarrow c_\delta \leq c = \sup M$$
$$\Downarrow$$
$$f(c_\delta) \leq y$$

Kdyby $f(c) < y$, pak $c \neq b$ (neb $y < f(b)$ dle volby y). Ze spojitosti fce f zprava v bodě c plyne, že $\exists\, \delta > 0$ tak, že $f(x) < y$ $\forall\, x \in \langle c, c+\delta)$. Tedy $\langle c, c+\delta) \subset M$ – spor (neb $c = \sup M$).

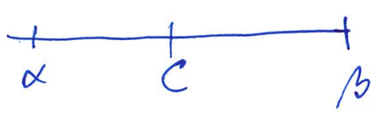
Proto $f(c) = y$. $\square$

Věta 79 (spojitý obraz intervalu). Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval a $f \in C(I)$. Pak $f(I)$ je interval. *)

Důkaz: 1) Je-li f konstantní na I, pak $f(I)$ je jednobodová množina, a tedy interval.

2) Nechť f není konstantní na I. Pak $f(I)$ obsahuje alespoň 2 body. Tedy čísla $\alpha := \inf f(I)$, $\beta := \sup f(I)$ splňují $\alpha < \beta$. Dokážeme, že $f(I)$ je interval s krajními body α a β. K tomu stačí ověřit platnost implikace

% (*) $\quad \alpha < C < \beta \implies C \in f(I)$ (tj. ex. $c \in I$ tak, že $f(c) = C$)



Z definice infima a suprema plyne, že:

neb $\alpha < C$ a $C < \beta$

ex. $A \in f(I)$ tak, že $A < C$,

ex. $B \in f(I)$ tak, že $C < B$.

Tedy $f(a) = A < C < B = f(b)$. Buď $J_{a,b}$ uzavřený interval s krajními body a, b. Protože $f \in C(J_{a,b})$, dle Věty 78 $\exists\, c \in \overset{\circ}{J}_{a,b}$ tak, že $f(c) = C$, tj. $C \in f(I)$.

Tím je platnost implikace (*) ověřena. $\square$

Věta 80 (o spojitosti inverzní fce). Nechť fce f je spojitá a rostoucí (klesající) v intervalu $I \subset \mathbb{R}$. **) Pak inverzní fce f^{-1} je spojitá a rostoucí (klesající) v intervalu $J := f(I)$.

---

*) Dle definice intervalu (viz 5. přednáška) jednobodová množina $\{a\} \subset \mathbb{R}$ je interval ($\{a\} = \langle a, a \rangle$).

**) Pojem rostoucí (klesající) fce byl zaveden na 5. přednášce pro interval, který je nedegenerovaný. Tedy ve Větě 80 je I nedegenerovaný interval.

Důkaz. 1) Protože f je spojitá a nekonstantní v I, tak $f(I) =: J$ je nedegenerovaný interval.

2) Fce f^{-1} je rostoucí v J, neboť platí

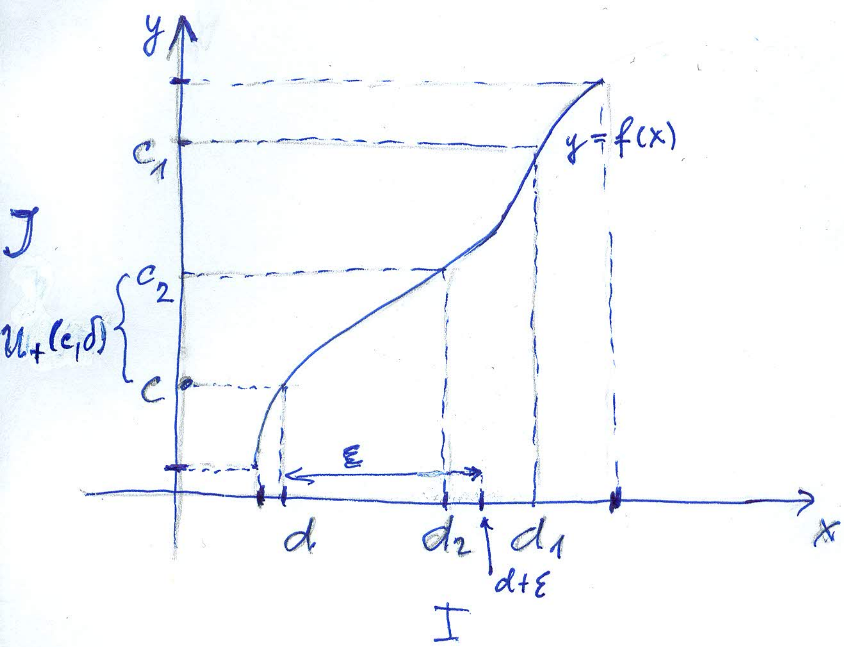
$$y_1, y_2 \in J: \quad \underbrace{y_1}_{=f(x_1)} < \underbrace{y_2}_{=f(x_2)} \Rightarrow f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$$

$$\Leftrightarrow \quad f(x_1), f(x_2) \in J: \quad \underbrace{f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow x_1 < x_2}_{\text{toto platí, neboť}}$$

(kdyby bylo $x_1 \geq x_2$, bylo by $f(x_1) \geq f(x_2)$ – spor)

3) Dokážeme spojitost zprava fce f^{-1} v každém bodě c, který není koncovým bodem intervalu J. *)

Nechť tedy $c \in J$. Protože c není koncový bod intervalu J, $\exists\, c_1 \in J$, $c_1 > c$. Nechť $d := f^{-1}(c)$, $d_1 := f^{-1}(c_1)$.



Buď $\varepsilon > 0$. Jistě ex. bod $d_2 \in I$ tak, že

$$d < d_2 \leq d + \varepsilon, \quad d_2 < d_1$$

($d+\varepsilon$ nemusí ležet v I pro velká ε)

Buď $c_2 := f(d_2)$. Pak $c < c_2$.

Volím $\delta := c_2 - c$.

Nechť $y \in U_+(c, \delta)$, tj. $y \in \langle c, c+\delta) = \langle c, c_2)$. Pak

$$\underbrace{f^{-1}(c) \leq f^{-1}(y)}_{\text{neb } f^{-1} \text{ roste}} < f^{-1}(c+\delta) = f(c_2) = d_2 \leq d + \varepsilon = f^{-1}(c) + \varepsilon$$

$$\Rightarrow \quad |f^{-1}(y) - f^{-1}(c)| < \varepsilon. \quad \square$$

*) Obdobně by se dokázala spojitost fce f zleva v každém bodě, který není počátečním bodem intervalu J.

Definice. Buď $M \subset \mathbb{R}$ a f zobrazení množiny M do $\mathbb{R}$. Řekneme, že fce f nabývá v bodě $a \in M$:

(i) maxima na M, jestliže $\forall x \in M: f(x) \leq f(a)$;

(ii) minima na M, —"— $\forall x \in M: f(x) \geq f(a)$;

(iii) ostrého maxima na M, —"— $\forall x \in M \setminus \{a\}: f(x) < f(a)$;

(iv) —"— minima na M, —"— $\forall x \in M \setminus \{a\}: f(x) > f(a)$.

Věta 81. (o nabývání maxima). Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a $f: \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$. Jestliže $f \in C(\langle a,b\rangle)$, pak f nabývá v $\langle a,b\rangle$ maxima (minima).

Důsledek. Je-li $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f: \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$, $f \in C(\langle a,b\rangle)$, pak f je omezená na $\langle a,b\rangle$.

Důkaz Věty 81. Dokážeme existenci $\max M$, kde

$$M = f(\langle a,b\rangle) = \{f(x);\ x \in \langle a,b\rangle\}.$$

Buď $S := \sup M$. Pak ex. $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ taková, že $y_n \in M$ $\forall n \in \mathbb{N}$ a $y_n \to S$.

$\Downarrow$

$y_n = f(x_n)$, kde $x_n \in \langle a,b\rangle$.

Dále dle Věty 42 (Bolzano–Weierstrass) (11. přednáška) existuje vybraná posloupnost $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$, která je konvergentní, tj. $x_{n_k} \to x_0$ pro $k \to \infty$. Protože $a \leq x_{n_k} \leq b$, je $x_0 \in \langle a,b\rangle$. Ze spojitosti fce f na $\langle a,b\rangle$ pak plyne

$$\left.\begin{array}{l} f(x_{n_k}) \to f(x_0) \\ \shortparallel \\ y_{n_k} \to S \end{array}\right\} \Rightarrow S = f(x_0). \qquad \square$$

Elementární fce

Nechť $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Pak definujme

$$(f \pm g)(x) := f(x) \pm g(x) \quad \forall x \in D(f) \cap D(g) \quad \text{(součet, rozdíl fcí } f \text{ a } g\text{)}$$

$$(f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x) \quad \forall x \in D(f) \cap D(g) \quad \text{(součin fcí } f \text{ a } g\text{)}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) := \frac{f(x)}{g(x)} \quad \forall x \in D(f) \cap D(g),\ g(x) \neq 0 \quad \text{(podíl fcí } f \text{ a } g\text{)}$$

Buď Id identické zobrazení množiny $\mathbb{R}$ na $\mathbb{R}$. Protože jsme definovali součin fcí lze definovat indukcí přirozené mocniny identity:

$$Id^1 := Id, \qquad Id^{n+1} := Id \cdot Id^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Dále položíme $Id^0 \equiv 1$.

Protože jsme definovali podíl dvou fcí, můžeme definovat mocniny identity se záporným celým exponentem:

$$Id^{-n} := \frac{1}{Id^n} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (\Rightarrow Id^{-n} \text{ je definována v } \mathbb{R} \setminus \{0\})$$

Každý polynom P je lineární kombinací fcí Id^k, tj.

(*) $$P = \sum_{k=0}^{n} a_k\, Id^k, \quad \text{kde } a_k \in \mathbb{R},\ k = 0, \dots, n,\ n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$$

Racionální fce R je podíl dvou polynomů P a Q,

$$R = \frac{P}{Q}, \quad \text{kde } Q \not\equiv 0.$$

Pro hodnoty fce Id^n v bodě x používáme běžný symbol x^n, tj. $x^n := Id^n(x)$.

Pak např. hodnota polynomu P z (*) v bodě x je

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k.$$

KONEC 14. přednášky

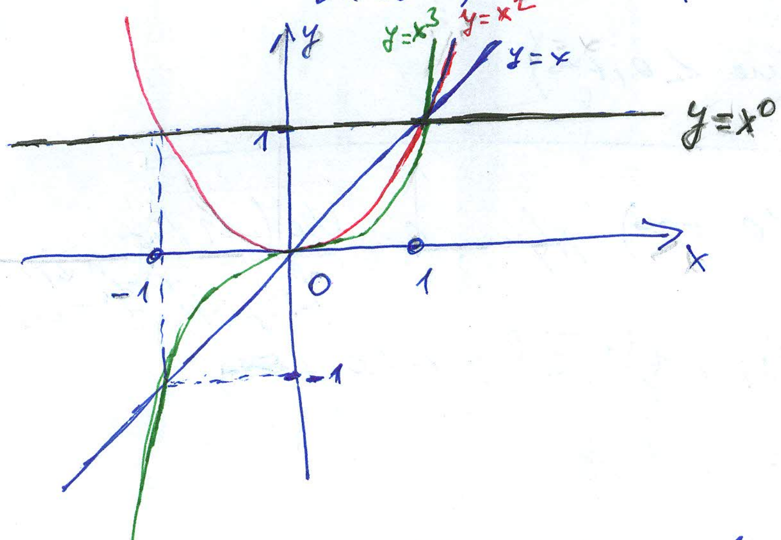
18. přednáška MA-1, ZS, šk. r. 2015/16, 8. 12. 2015

Poznámky:

1) Je-li $n \in \mathbb{N}$ liché, je fce Id^n (lichá) rostoucí spojitá fce v $\mathbb{R}$, $D(Id^n) = \mathbb{R}$, $R(Id^n) = \mathbb{R}$. To je důsledkem Věty 11 (o n-té odmocnině) a faktu, že jde o lichou fci

2) Je-li $n \in \mathbb{N}$ sudé, je fce Id^n (sudá) rostoucí fce (spojitá) na $\langle 0, +\infty)$, klesající spojitá na $(-\infty, 0\rangle$,

$D(Id^n) = \mathbb{R}$, $R(Id^n) = \langle 0, +\infty)$. důsledek Věty 11

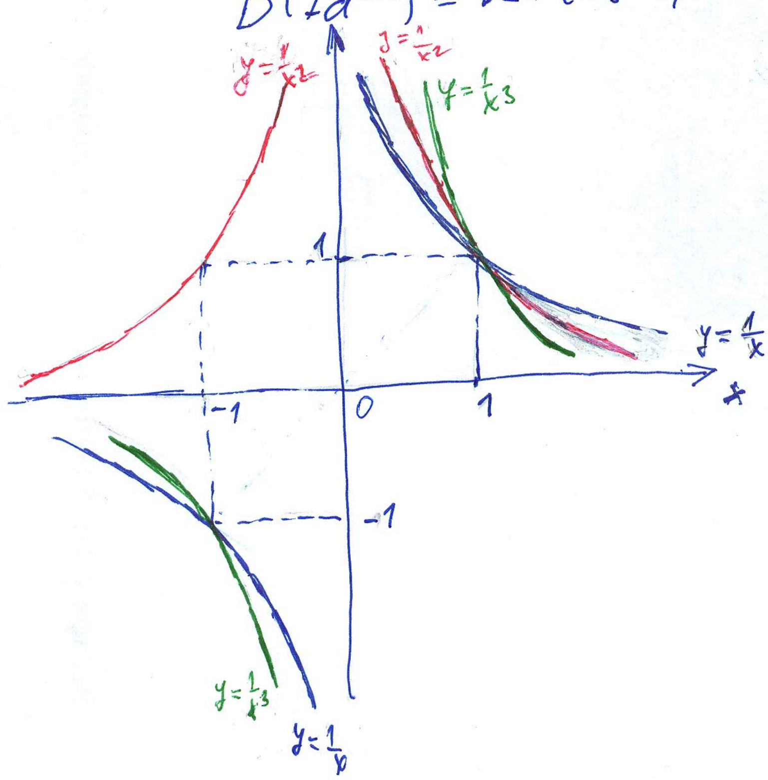


3) Je-li $n \in \mathbb{N}$ liché, je fce Id^{-n} (lichá) spojitá klesající v $(0, +\infty)$ a v $(-\infty, 0)$,

$D(Id^{-n}) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $R(Id^{-n}) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

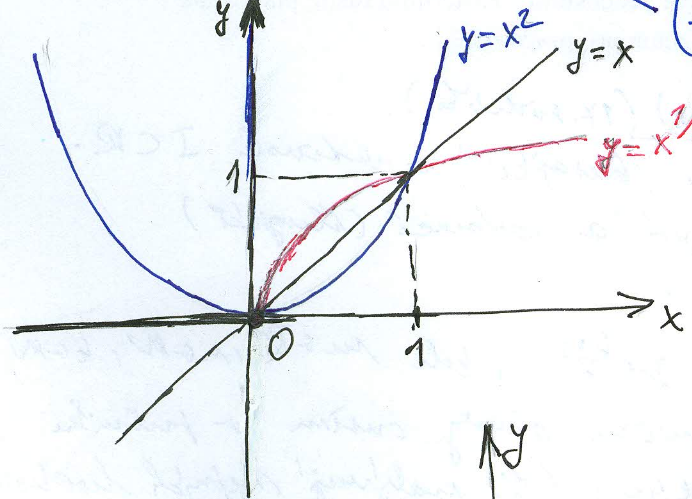
4) Je-li $n \in \mathbb{N}$ sudé, je fce Id^{-n} (sudá) spojitá rostoucí v $(-\infty, 0)$, spojitá klesající v $(0, +\infty)$,

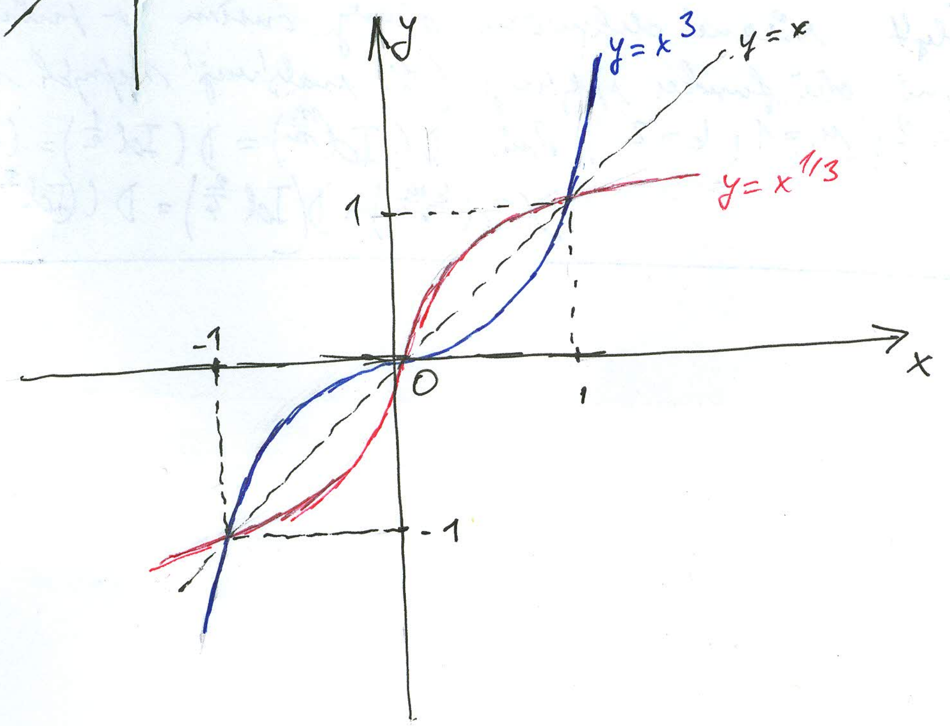
$D(Id^{-n}) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $R(Id^{-n}) = (0, +\infty)$.



Definice

$n\in\mathbb{N}$ $\quad Id^{1/n} := \begin{cases} (Id^n)^{-1}, & n\in\mathbb{N},\ n \text{ liché} \\ \left(Id^n\big|_{\langle 0,+\infty)}\right)^{-1} & n\in\mathbb{N},\ n \text{ sudé} \end{cases}$





$n\in\mathbb{N}$, $m\in\mathbb{Z}$, pak

$$Id^{\frac{m}{n}} := (Id^m)^{1/n}$$

$$\Rightarrow \quad Id^{\frac{m}{n}}(x) = x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m} \quad \forall x\in D(Id^{\frac{m}{n}})$$

Otázka: jak definovat Id^a pro $a\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$?

To lze udělat např. pomocí exponenciální a logaritmické fce.

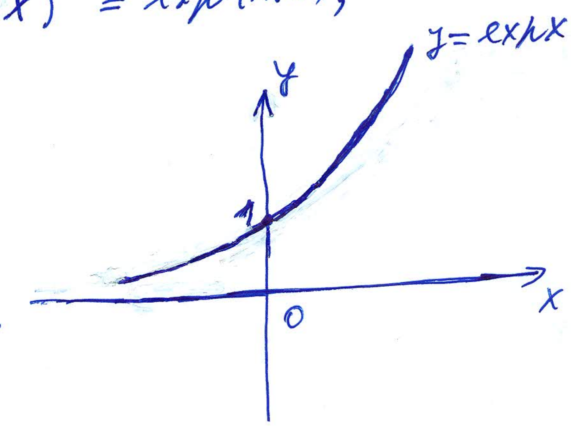
Věta 82 (existence exponenciální fce). Existuje právě jedna fce $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s vlastnostmi:

1) $D(\exp) = \mathbb{R}$,
2) $\forall x, y \in \mathbb{R} : (\exp x) \cdot (\exp y) = \exp(x+y)$,
3) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\exp x - 1}{x} = 1$.

Důkaz odložíme.

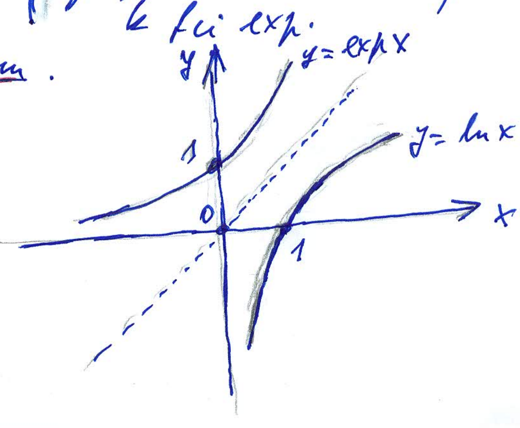
Věta 83 (vlastnosti fce exp)

1) exp je spojitá a rostoucí v $\mathbb{R}$,
2) $\exp 0 = 1$,
3) $\forall x \in \mathbb{R} : \exp x > 0$,
4) $\forall x \in \mathbb{R} : \exp(-x) = \dfrac{1}{\exp x}$,
5) $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in \mathbb{R} : (\exp x)^n = \exp(nx)$,
6) $\lim\limits_{x \to +\infty} \exp x = +\infty$,
7) $\lim\limits_{x \to -\infty} \exp x = 0$,
8) $R(\exp) = (0, +\infty)$.



Důkaz odložíme.

Definice. Funkce $\ln : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ je definována předpisem $\ln := (\exp)^{-1}$ (tj. jako inverzní fce k fci exp.) a nazývá se přirozeným logaritmem.



Věta 84 (vlastnosti fce ln).

1) $D(\ln) = (0, +\infty)$, $R(\ln) = \mathbb{R}$,

2) ln je spojitá a rostoucí v $(0, +\infty)$,

3) $\ln 1 = 0$,

4) $\forall x \in (1, +\infty) : \ln x > 0$,

5) $\forall x \in (0, 1) : \ln x < 0$,

6) $\forall x, y \in (0, +\infty) : \ln x + \ln y = \ln(x+y)$,

%. 7) $\forall x \in (0, +\infty) : \ln \frac{1}{x} = -\ln x$,

8) $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in (0, +\infty) : \ln x^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \ln x$,

9) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$,

10) $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$,

11) $\lim\limits_{x \to 0_+} \ln x = -\infty$.

Důkaz odložíme.

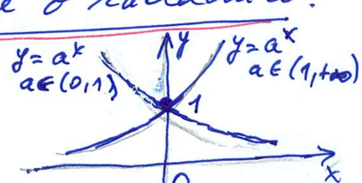
%.

Definice.

(i) $a^b := \exp(b \ln a)$, $a \in (0, +\infty)$, $b \in \mathbb{R}$

(ii) $\log_a x := \dfrac{\ln x}{\ln a}$ $\forall x \in (0, +\infty)$, kde $a \in (0, +\infty) \setminus \{1\}$

Fce $\log_a$ se nazývá logaritmická fce o základu a.



(iii) Je-li $a \in (0, +\infty)$, pak fci
$$x \mapsto a^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$
nazýváme obecná exponenciální fce (exponenciální fce o základu a)

(iv) Je-li $b \in \mathbb{R}$, pak fci
$$x \mapsto x^b \quad \forall x \in (0, +\infty)$$
nazýváme obecná mocnina.

Tato definice obecné mocniny x^b například, že $x \in (0, +\infty)$, $b = \frac{m}{n}$, kde $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, souhlasí s dříve

Poznámka. Inverzní fce k fci $y = a^x$ je fce $x = \log_a y$.

Skutečně: $y = a^x = \exp(x \ln a) \iff \ln y = x \ln a \iff$

$$\iff x = \frac{\ln y}{\ln a} = \log_a y .$$

Důkaz Věty 83 (Vlastnosti fce exp).

ad 1) Dokážeme, že exp je spojitá v $\mathbb{R}$. (že exp je rostoucí v $\mathbb{R}$ dokážeme později z Lagrangeovy věty)

Buď $x \in \mathbb{R}$. Pak z vlastnosti 3) Věty 82 plyne

$$(*) \quad \lim_{h\to 0} \frac{\exp(x+h) - \exp x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(\exp x)(\exp h) - \exp x}{h} = (\exp x) \lim_{h\to 0} \frac{\exp h - 1}{h} =$$

$$= (\exp x) \cdot 1 = \exp x$$

Odtud plyne

$$\lim_{h\to 0} \left[\exp(x+h) - \exp x \right] = \lim_{h\to 0} \Bigg[\underbrace{\frac{\exp(x+h) - \exp x}{h}}_{\to \exp x} \cdot \underbrace{h}_{\to 0} \Bigg] = 0$$

$$\iff \lim_{h\to 0} \exp(x+h) = \exp x \iff \lim_{y\to x} \exp y = \exp x \iff$$

$\iff$ fce exp je spojitá v bodě x.

ad 2) Z vlastnosti $\lim_{x\to 0} \frac{\exp x - 1}{x} = 1$ plyne, že $\exists x \in \mathbb{R}$ tak, že $\exp x \neq 0$. Kdyby $\exp x = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$, pak by

$$1 = \lim_{x\to 0} \frac{\exp x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{-1}{x} = -\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \quad - \text{spor}$$

(protože poslední limita neexistuje)

Tedy $\exists x_0 \in \mathbb{R}$ tak, že $\exp x_0 \neq 0$. Pak ale

$$\exp x_0 = \exp(x_0 + 0) = (\exp x_0)(\exp 0) \implies \exp 0 = 1 .$$

3) dokáži až po 4)

ad 4) Buď $x \in \mathbb{R}$. Pak

$$1 = \exp 0 = \exp(x + (-x)) = (\exp x) \cdot (\exp(-x)) .$$

Odtud plyne, že

$$(2*) \quad \exp x \neq 0 ,$$
$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp x} .$$

ad 3) Buď $x \in \mathbb{R}$. Pak

$$\exp x = \exp\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right) = \left(\exp\frac{x}{2}\right)^2 \geq 0 .$$

Tedy

$$\exp x \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} .$$

Odtud a z (2*) dostáváme $\underline{\exp x > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}}$.

ad 5) Buď $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$. K důkazu, že

(3*) $$\exp(nx) = (\exp x)^n$$

použijeme mat. indukci.

Pro $n=1$ rovnost (3*) platí. Předp. že (3*) platí pro nějaké $n \in \mathbb{N}$. Pak

$$\exp((n+1)x) = \exp(nx+x) = (\exp nx)\exp x =$$

$$\underset{\uparrow}{=} (\exp x)^n \exp x = (\exp x)^{n+1} .$$

dle indukčního předp.

Tedy (3*) platí $\forall n \in \mathbb{N}$ (a $\forall x \in \mathbb{R}$).

ad 6) Protože exp je rostoucí fce, stačí dokázat, že (což dokážeme později)

(4*) $$\lim_{n\to\infty} \exp n = +\infty .$$

To platí, neboť $\forall n \in \mathbb{N}$ máme

$$\exp n = \exp(n\cdot 1) = (\exp 1)^n \xrightarrow[\Uparrow]{} +\infty .$$

$\exp 1 > \exp 0 = 1$

Rovnost (4*) znamená

(5*) $\forall K > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : \exp n > K$.

Buď $K > 0$. K číslu K dle (5*) ex. $n_0 \in \mathbb{N}$.

Pak $\forall x \in \mathbb{R}, x \geq n_0 : \exp x \underset{\uparrow}{\geq} \exp n_0 > K$

exp roste

$$(\Leftarrow) \quad \lim_{x\to+\infty} \exp x = +\infty .$$

ad 7)

$$\lim_{x\to-\infty} \exp x = \lim_{y\to+\infty} \exp(-y) = \lim_{y\to+\infty} \frac{1}{\exp y} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

$x = -y$ (podmínka (P) + věta o limitě složené fce

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(-x) = +\infty$

$\lim\limits_{y\to+\infty} g(y) = \lim\limits_{y\to+\infty} \exp(-y)$

$g(y) := \exp(-y)$, $f(x) := -x$ $\Rightarrow$ $g(f(x)) = \exp(-f(x)) = \exp(-(-x)) = \exp x$

ad 8) Buď $c \in (0, +\infty)$. Ukážeme, že

(5*) $$c \in R(\exp).$$

Protože dle 6) platí $\lim_{x \to +\infty} \exp x = +\infty$, tak

$$\exists x_1 \in \mathbb{R} : \exp x_1 > c.$$

Protože dle 7) platí $\lim_{x \to -\infty} \exp x = 0$, tak

$$\exists x_2 \in \mathbb{R} : \exp x_2 < c.$$

Fce exp je spojitá na $\langle x_2, x_1 \rangle$ a $c \in (f(x_2), f(x_1))$,
(je $x_2 < x_1$ neb exp roste v $\mathbb{R}$)
dle Věty 78 (Bolzanova o nabývání mezihodnot) existuje $x \in (x_2, x_1)$ tak, že $\exp x = c$. Tedy platí (5*), a proto $(0, +\infty) \subset R(\exp)$. Protože dle vlastnosti 3) platí $\exp x > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$, platí $R(\exp) \subset (0, +\infty)$.

Celkem tedy $R(\exp) = (0, +\infty)$. □

(Zbývá ovšem dokázat, že exp je rostoucí v $\mathbb{R}$, což učiníme později (a pouze pomocí Věty 82)).
