Teoretická část

Úloha A

(a) Napište $\limsup_{n\to\infty} a_n$ jako limitu jisté posloupnosti (jako ve větě o existenci $\limsup_{n\to\infty} a_n$, pro shora omezenou posloupnost (a_n)).

(b) Napište (stačí jednu ze dvou verzí) Bolzano-Cauchyovu podmínku pro konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(c) Napište znění (Fermatovy) věty, která dává do souvislosti pojem první derivace a pojem lokálního extrému.

(1+2+3 body)

Úloha B Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x-x^2-x^3)}{x-x^2-x^3}.$$

Větu o limitě složené funkce, kterou užíváte, přesně zformulujte. Podrobně vysvětlete, jak ji užíváte (napište, co je f, a, apod.). Podrobně a srozumitelně ověřte platnost předpokladů užité věty.

(4 body)

Úloha C

Nechť funkce f je spojitá na intervalu $(0,1]$ a $\lim_{x\to 0+} f(x) = \infty$. Podrobně dokažte, že pak f je zdola omezená na intervalu $(0,1]$. Věty (tvrzení), které užíváte, přesně zformulujte a srozumitelně vysvětlete, jak je užíváte.

(4 body)

Úloha D1 Nechť funkce f má vlastní derivaci v bodě a. Podrobně dokažte, že pak f je spojitá v bodě a. Znění tvrzení (vět) z přednášky, které při důkazu používáte, přesně zformulujte bez důkazu.

(4 body)

Úloha D2 Zformulujte (1b) a podrobně dokažte L'Hospitalovo pravidlo pro limitu typu "$\frac{0}{0}$" ve vlastním bodě. Znění tvrzení (vět) z přednášky, které při důkazu používáte, přesně zformulujte bez důkazu.

(5 bodů)

(Body z D1 a D2 se nesčítají, počítá se lepší varianta.)

Postačující podmínky pro ústní zkoušení na známku **dobře**:
- dosažení aspoň **8*** bodů jak z početní, tak i z teoretické části.
- dosažení aspoň **19*** bodů z obou částí dohromady.

Nutné podmínky na hodnocení **velmi dobře**:
- dosažení aspoň **11*** bodů jak z početní, tak i z teoretické části.
- dosažení aspoň **25*** **(17)** bodů z obou částí dohromady.
- dosažení aspoň **4*** bodů z důkazové úlohy D1 nebo z úlohy D2.

Nutné podmínky na hodnocení **výborně**:
- dosažení aspoň **13*** **(8)** bodů jak z početní, tak i z teoretické části.
- dosažení aspoň **30*** **(20)** bodů z obou částí dohromady.
- dosažení aspoň **4*** **(3)** bodů z důkazové úlohy D2.

Početní část

Výpočet pište tak, aby bylo jasné, jakých vět a známých limit používáte. Užité věty není nutno formulovat, ale je třeba ověřit jejich předpoklady. Používáte-li základní limity, které byly na přednášce, vždy je napište (bez důkazu, v **obecném tvaru**). Pokud užíváte limitu, kterou znáte ze cvičení nebo odjinud, stručně ji znovu odvoďte. Používáte-li Heineho větu (pro limitu nebo spojitost), **vždy** napište na jakou funkci a jakou posloupnost ji používáte.

Příklad 1 Spočtěte (nebo dokažte, že neexistuje) limitu funkce

$$\lim_{x\to\infty} \ln\left(1+2^{[x]}\right)\cdot\ln\left(\frac{x}{x+2}\right),$$

kde $[x]$ je celá část čísla x.

Svůj postup srozumitelně vysvětlete.
(4 body)

Příklad 2 Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln^2 n\cdot\left(1-\cos\frac{1}{n}\right).$$

Svůj postup srozumitelně vysvětlete.
(4 body)

Příklad 3 Určete (nebo dokažte, že neexistuje) asymptotu v ∞ funkce

$$f(x) = x\cdot\operatorname{arctg}(2x).$$

Svůj postup srozumitelně vysvětlete.
(3 body)

Příklad 4 Vyšetřete průběh funkce zadané předpisem

$$f(x) = \frac{x}{e^{|1-x|}}.$$

Podstatnou součástí řešení je náčrt grafu, který souhlasí s vašimi závěry, které ovšem musí být podloženy výpočtem. (Nezapomeňte vyšetřit též jednostranné derivace, obor hodnot, lokální a absolutní extrémy, konvexitu, asymptoty, atd. a své závěry **napsat.**)
(7 bodů)

Postačující podmínky pro ústní zkoušení na známku **dobře**:
- dosažení aspoň **8*** bodů jak z početní, tak i z teoretické části.
- dosažení aspoň **19*** bodů z obou částí dohromady.

Nutné podmínky na hodnocení **velmi dobře**:
- dosažení aspoň **11*** bodů jak z početní, tak i z teoretické části.
- dosažení aspoň **25* (17)** bodů z obou částí dohromady.
- dosažení aspoň **4*** bodů z důkazové úlohy D1 nebo z úlohy D2.

Nutné podmínky na hodnocení **výborně**:
- dosažení aspoň **13* (8)** bodů jak z početní, tak i z teoretické části.
- dosažení aspoň **30* (20)** bodů z obou částí dohromady.
- dosažení aspoň **4* (3)** bodů z důkazové úlohy D2.

Početní část

Výpočet pište tak, aby bylo jasné, jakých vět a známých limit používáte. Užité věty není nutno formulovat, ale je třeba ověřit jejich předpoklady. Používáte-li základní limity, které byly na přednášce, vždy je napište (bez důkazu, v **obecném tvaru**). Pokud užíváte limitu, kterou znáte ze cvičení nebo odjinud, stručně ji znovu odvoďte. Používáte-li Heineho větu (pro limitu nebo spojitost), **vždy** napište na jakou funkci a jakou posloupnost ji používáte.

Příklad 1 Spočtěte limitu (nebo dokažte, že neexistuje) posloupnosti

$$\lim_{n\to\infty} n\sqrt{\ln(n+(-1)^n)}(\sqrt{\ln(n+1)}-\sqrt{\ln n}).$$

Svůj postup srozumitelně vysvětlete.
(4 body)

Příklad 2 Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg} n).$$

Svůj postup srozumitelně vysvětlete. Předpoklady užívaných vět ověřte.
(3 body)

Příklad 3 Určete asymptotu v ∞ (nebo dokažte, že neexistuje) funkce

$$f(x)=\frac{1}{\ln\left(\cos\frac{1}{[x]}\right)},$$

kde $[x]$ je celá část čísla x. Svůj postup srozumitelně vysvětlete.
(4 body)

Příklad 4 Vyšetřete průběh funkce zadané předpisem

$$f(x)=(x^2+1)\cdot e^{-|x+1|}.$$

Podstatnou součástí řešení je náčrt grafu, který souhlasí s vašimi závěry, které ovšem musí být podloženy výpočtem.

(Nezapomeňte vyšetřit též jednostranné derivace, obor hodnot, lokální a absolutní extrémy, konvexitu, asymptoty atd. a své závěry **napsat**.)
(7 bodů)

Nutné podmínky na hodnocení **dobře**:
- dosažení aspoň **8*** bodů jak z početní, tak i z teoretické části.
- dosažení aspoň **19*** bodů z obou částí dohromady.

Nutné podmínky na hodnocení **velmi dobře**:
- dosažení aspoň **11*** bodů jak z početní, tak i z teoretické části.
- dosažení aspoň **25*** **(17)** bodů z obou částí dohromady.
- dosažení aspoň **4*** bodů z důkazové úlohy D1 nebo z úlohy D2.

Nutné podmínky na hodnocení **výborně**:
- dosažení aspoň **13*** **(8)** bodů jak z početní, tak i z teoretické části.
- dosažení aspoň **30*** **(20)** bodů z obou částí dohromady.
- dosažení aspoň **4*** **(3)** bodů z důkazové úlohy D2.

Teoretická část

Úloha A

(a) Napište definici tvrzení "f je ryze konkávní funkce na $(0, 1)$".

(b) Napište znění Borelovy (= Heine-Borelovy) věty o pokrytí.

(2+2 body)

Úloha B Spočtěte limitu $\lim_{x\to\infty} \operatorname{arctg}(\cos x \cdot \operatorname{arccotg} x)$. Napište znění obecných vět, které jste při výpočtu použili, a *podrobně* vysvětlete jak (napište, co je f, g, a apod.). Použitá fakta o goniometrických a cyklometrických funkcích jen konstatujte.

(4 body)

Úloha C Nechť pro každé $x \in (0, 4)$ platí $|f'_-(x) + f'_+(x)| < 4$. Dokažte, že pak je f shora omezená na intervalu $(1, 2)$.

Napište přesné znění vět (tvrzení), které užíváte, a přesně vysvětlete jak.

(4 body)

Úloha D1 Nechť funkce f má konečnou a kladnou derivaci na intervalu $(0, 1)$. Podrobně dokažte, že pak funkce f je rostoucí na intervalu $(0, 1)$. Nesmíte ovšem použít žádnou podobnou větu o souvislosti derivace a monotonie. Jiné věty, které používáte, přesně zformulujte bez důkazu.

(4 body)

Úloha D2 Zformulujte a podrobně dokažte Weierstrassovu větu o extrémech spojité funkce. Věty (tvrzení), které používáte, přesně zformulujte bez důkazu.

(6 bodů)

(Body z D1 a D2 se nesčítají, počítá se lepší varianta.)

Nutné podmínky na hodnocení **dobře**:
- dosažení aspoň **8*** bodů jak z početní, tak i z teoretické části.
- dosažení aspoň **19*** bodů z obou částí dohromady.

Nutné podmínky na hodnocení **velmi dobře**:
- dosažení aspoň **11*** bodů jak z početní, tak i z teoretické části.
- dosažení aspoň **25*** **(17)** bodů z obou částí dohromady.
- dosažení aspoň **4*** bodů z důkazové úlohy D1 nebo z úlohy D2.

Nutné podmínky na hodnocení **výborně**:
- dosažení aspoň **13*** **(8)** bodů jak z početní, tak i z teoretické části.
- dosažení aspoň **30*** **(20)** bodů z obou částí dohromady.
- dosažení aspoň **4*** **(3)** bodů z důkazové úlohy D2.

Početní část

Výpočet pište tak, aby bylo jasné, jakých vět a známých limit používáte. Užité věty není nutno přesně formulovat, ale je třeba ověřit jejich předpoklady. Při užití Heineho věty napište, na jakou funkci a posloupnost ji užíváte. Používáte-li základní limity, které byly na přednášce, vždy je napište (bez důkazu, v obecném tvaru). Pokud užíváte limitu, kterou znáte z cvičení nebo odjinud, stručně ji znovu odvoďte.

Příklad 1 Spočtěte (pokud existuje) limitu funkce

$$\lim_{x\to 0}\left(1-\sqrt{|\arcsin x|}\right)^{\operatorname{cotg} x}.$$

Svůj postup srozumitelně vysvětlete.
($3\frac{1}{2}$ bodu)

Příklad 2 Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\operatorname{arccotg} n-\frac{1}{n}).$$

Svůj postup srozumitelně vysvětlete. Předpoklady užívaných vět ověřte.
(4 body)

Příklad 3 Spočtěte $\lim_{n\to\infty} a_n$, jestliže

$$a_1=2 \quad \text{a} \quad a_{n+1}=\sqrt{\frac{a_n+1}{2}}.$$

Svůj postup podrobně a srozumitelně vysvětlete.
($3\frac{1}{2}$ bodu)

Příklad 4 Vyšetřete průběh funkce zadané předpisem

$$f(x)=e^{-\left|\frac{x}{1-x}\right|} \quad \text{pro} \quad x\neq 1 \quad \text{a} \quad f(1)=0.$$

Podstatnou součástí řešení je náčrt grafu, který souhlasí s vašimi závěry, které ovšem musí být podloženy výpočtem.

(Nezapomeňte vyšetřit též jednostranné derivace, obor hodnot, lokální a absolutní extrémy, konvexitu, asymptoty atd. a své závěry **napsat**.)
(7 bodů)

Nutné podmínky na hodnocení **dobře**:
- dosažení aspoň **8*** bodů jak z početní, tak i z teoretické části.
- dosažení aspoň **19*** bodů z obou částí dohromady.

Nutné podmínky na hodnocení **velmi dobře**:
- dosažení aspoň **11*** bodů jak z početní, tak i z teoretické části.
- dosažení aspoň **25*** **(17)** bodů z obou částí dohromady.
- dosažení aspoň **4*** bodů z důkazové úlohy D1 nebo z úlohy D2.

Nutné podmínky na hodnocení **výborně**:
- dosažení aspoň **13*** **(8)** bodů jak z početní, tak i z teoretické části.
- dosažení aspoň **30*** **(20)** bodů z obou částí dohromady.
- dosažení aspoň **4*** **(3)** bodů z důkazové úlohy D2.

Teoretická část

Úloha A
(a) Napište definici výroku: Funkce f je rostoucí v bodě 3.
(b) Napište znění Heineho věty o souvislosti limity funkce a limit posloupností.
(2+2 body)

Úloha B Podrobně dokažte, že

$$\exists A \in \mathbb{R}\ \forall\, x > A: \qquad \operatorname{arctg} x + e^{-x}x^9 < \sqrt{x}\,(\log x)^{-9}.$$

Větu o souvislosti nerovností a limity (pokud ji užíváte), přesně zformulujte a *podrobně* vysvětlete, jak ji užíváte. (Napište, co je f, a, g apod. v našem případě a ověřte splnění předpokladů.) Pokud užíváte obecných limit z přednášky, uveďte je bez důkazu.
(3 body)

Úloha C Nechť pro každé $x \in (0, \infty)$ platí $f'(x) > \sqrt{x} - \log x$. Dokažte, že pak existuje $\lim_{n\to\infty} f(n - \sin n)$.
Obecná tvrzení z přednášky, která používáte, přesně zformulujte.
(5 bodů)

Úloha D1 Pro případ vlastních derivací zformulujte a podrobně dokažte větu o derivaci součinu dvou funkcí. Znění vět (tvrzení) z přednášky, které při důkazu používáte, přesně zformulujte bez důkazu.
(4 body)

Úloha D2 Zformulujte větu o derivaci složené funkce. Tuto větu dokažte v případě, že derivace vnitřní funkce v příslušném bodě je nulová. Znění vět (tvrzení) z přednášky, které při důkazu používáte, přesně zformulujte bez důkazu.
(6 bodů)

(Body z D1 a D2 se nesčítají, počítá se lepší varianta.)

Nutné podmínky na hodnocení **dobře**:
- dosažení aspoň **8*** bodů jak z početní, tak i z teoretické části.
- dosažení aspoň **19*** bodů z obou částí dohromady.

Nutné podmínky na hodnocení **velmi dobře**:
- dosažení aspoň **11*** bodů jak z početní, tak i z teoretické části.
- dosažení aspoň **25*** **(17)** bodů z obou částí dohromady.
- dosažení aspoň **4*** bodů z důkazové úlohy D1 nebo z úlohy D2.

Nutné podmínky na hodnocení **výborně**:
- dosažení aspoň **13*** **(8)** bodů jak z početní, tak i z teoretické části.
- dosažení aspoň **30*** **(20)** bodů z obou částí dohromady.
- dosažení aspoň **4*** **(3)** bodů z důkazové úlohy D2.

Početní část

Výpočet pište tak, aby bylo jasné, jakých vět a známých limit používáte. Užité věty není nutno formulovat, ale je třeba ověřit jejich předpoklady. Používáte-li základní limity, které byly na přednášce, vždy je napište (bez důkazu, v **obecném tvaru**). Pokud užíváte limitu, kterou znáte ze cvičení nebo odjinud, stručně ji znovu odvoďte. Používáte-li Heineho větu (pro limitu nebo spojitost), **vždy** napište na jakou funkci a jakou posloupnost ji používáte.

Příklad 1 Spočtěte (pokud existuje) limitu posloupnosti

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[3]{n^2+\sin n} - \sqrt[3]{n^2}\right) \ln(2^n + n(-1)^n).$$

Svůj postup srozumitelně vysvětlete.
(4,5 bodu)

Příklad 2 Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! \cdot 2^n}{n^{n+2}}.$$

Svůj postup srozumitelně vysvětlete.
(3 body)

Příklad 3 Spočtěte (pokud existuje) asymptotu v ∞ funkce

$$f(x) = (x+1)\, e^{\frac{1}{x+\sin(x^2)}} = (x+1) \exp\left(\frac{1}{x+\sin(x^2)}\right).$$

Svůj postup srozumitelně vysvětlete.
(3,5 bodu)

Příklad 4 Vyšetřete průběh funkce zadané předpisem

$$f(x) = \arccos\frac{x-1}{2x-1}.$$

Podstatnou součástí řešení je náčrt grafu, který souhlasí s vašimi závěry, které ovšem musí být podloženy výpočtem.

(Nezapomeňte vyšetřit též jednostranné derivace, obor hodnot, lokální a absolutní extrémy, konvexitu, asymptoty atd. a své závěry **napsat**.)
(7 bodů)

Nutné podmínky na hodnocení **dobře**:
- dosažení aspoň **8*** bodů jak z početní, tak i z teoretické části.
- dosažení aspoň **19*** bodů z obou částí dohromady.

Nutné podmínky na hodnocení **velmi dobře**:
- dosažení aspoň **11*** bodů jak z početní, tak i z teoretické části.
- dosažení aspoň **25* (17)** bodů z obou částí dohromady.
- dosažení aspoň **4*** bodů z důkazové úlohy D1 nebo z úlohy D2.

Nutné podmínky na hodnocení **výborně**:
- dosažení aspoň **13* (8)** bodů jak z početní, tak i z teoretické části.
- dosažení aspoň **30* (20)** bodů z obou částí dohromady.
- dosažení aspoň **4* (3)** bodů z důkazové úlohy D2.

Teoretická část

Úloha A

(a) Pomocí kvantifikátorů a nerovností napište výrok (o množině $M \subset \mathbb{R}$) ekvivalentní s výrokem $\inf M = 5$.

(b) Napište přesné znění věty (se všemi předpoklady) o oboustranné derivaci inverzní funkce.

(2 + 2 body)

Úloha B Spočtěte limitu (posloupnosti)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\arcsin(1/n)}.$$

Větu (věty), které užíváte, přesně zformulujte a *podrobně* vysvětlete, jak ji (je) užíváte. (Napište, co je f, a apod. v našem případě a ověřte splnění předpokladů.)

(4 body)

Úloha C (a) Nechť $\lim_{x\to 1_+} f(x) = 3$ a $g'_+(3) = 2$. Platí za uvedených předpokladů nutně, že existuje $\lim_{x\to 1+} g(f(x))$?

(b) Nechť $\lim_{x\to 1} f(x) = 3$ a $g'(3) = 2$. Platí za uvedených předpokladů nutně, že existuje $\lim_{x\to 1} g(f(x))$?

Podejte důkaz nebo uveďte protipříklad. Používáte-li nějaké věty (tvrzení) z přednášky, zformulujte je bez důkazu.

(4 body)

Úloha D1 Zformulujte a podrobně dokažte větu o vlastní limitě součinu posloupností. Znění vět (tvrzení) z přednášky, které při důkazu používáte, přesně zformulujte bez důkazu.

(4 body)

Úloha D2 Zformulujte podmínky na funkci f (z věty dokázané na přednášce, ve které se hovoří o f'), ze kterých vyplývá, že funkce f je konvexní na intervalu I. Příslušnou větu podrobně dokažte. Znění vět (tvrzení) z přednášky, které při důkazu používáte, přesně zformulujte bez důkazu.

(6 bodů)

(Body z D1 a D2 se nesčítají, počítá se lepší varianta.)

Nutné podmínky na hodnocení **dobře**:
- dosažení aspoň **8*** bodů jak z početní, tak i z teoretické části.
- dosažení aspoň **19*** bodů z obou částí dohromady.

Nutné podmínky na hodnocení **velmi dobře**:
- dosažení aspoň **11*** bodů jak z početní, tak i z teoretické části.
- dosažení aspoň **25* (17)** bodů z obou částí dohromady.
- dosažení aspoň **4*** bodů z důkazové úlohy D1 nebo z úlohy D2.

Nutné podmínky na hodnocení **výborně**:
- dosažení aspoň **13* (8)** bodů jak z početní, tak i z teoretické části.
- dosažení aspoň **30* (20)** bodů z obou částí dohromady.
- dosažení aspoň **4* (3)** bodů z důkazové úlohy D2.

E Početní část

Používáte-li základní limity, které byly na přednášce, vždy je napište (bez důkazu, v obecném tvaru). Pokud užíváte limitu, kterou znáte ze cvičení nebo odjinud, stručně ji znovu odvoďte.

Při užití věty o limitě složené funkce zdůvodněte splnění předpokladů.

Příklad 1 Spočtěte (pokud existuje) limitu funkce

$$\lim_{x\to\infty} \arcsin(\sqrt{x+2}-\sqrt{x})\cdot\ln(x+\sin x).$$

Svůj postup srozumitelně vysvětlete.
(3 body)

Příklad 2 Spočtěte (pokud existuje) limitu funkce

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1+x3^x}{1+x4^x}\right)^{\left(\frac{1}{x^2}\right)}.$$

Svůj postup srozumitelně vysvětlete.
(4 body)

Příklad 3 Nechť f je funkce zadaná předpisem $f(x)=\ln\left(e^{x+1}+x^2\right)$.
a) Napište rovnici tečny ke grafu funkce f v bodě $(0,f(0))$. (1 bod)
b) Určete (pokud existuje) asymptotu funkce f v ∞ a v $-\infty$. (1,5 + 1,5 bodů).
Svůj postup srozumitelně vysvětlete.

Příklad 4 Vyšetřete průběh funkce zadané předpisem

$$f(x)=\operatorname{arctg}\frac{x+2}{x},\quad f(0)=\frac{\pi}{2}.$$

Podstatnou součástí řešení je náčrt grafu, který souhlasí s vašimi závěry, které ovšem musí být podloženy výpočtem.

(Nezapomeňte vyšetřit též obě jednostranné derivace v bodě 0, obor hodnot, lokální a absolutní extrémy, konvexitu, asymptoty atd. a své závěry **napsat**.)
(7 bodů)

Nutné podmínky na hodnocení **dobře**:
- dosažení aspoň **8*** bodů jak z početní, tak i z teoretické části.
- dosažení aspoň **19*** 16 bodů z obou částí dohromady.

Nutné podmínky na hodnocení **velmi dobře**:
- dosažení aspoň **11*** bodů jak z početní, tak i z teoretické části.
- dosažení aspoň **25* (17)** bodů z obou částí dohromady.
- dosažení aspoň **4*** bodů z důkazové úlohy D1 nebo z úlohy D2.

Nutné podmínky na hodnocení **výborně**:
- dosažení aspoň **13* (8)** bodů jak z početní, tak i z teoretické části.
- dosažení aspoň **30* (20)** bodů z obou částí dohromady.
- dosažení aspoň **4* (3)** bodů z důkazové úlohy D2.

E Teoretická část

Úloha A (a) Pomocí nerovností a kvantifikátorů definujte, co to znamená, že $\sup M = 2$.

(b) Napište znění věty o vlastní derivaci inverzní funkce. (2+2 body)

Úloha B Podrobně dokažte, že limita

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{\sin x + 2}$$

neexistuje. Věty (tvrzení), které používáte, přesně zformulujte bez důkazu. Podrobně vysvětlete, jak tyto věty užíváte (napište, co je v našem konkrétním případě f, x_n apod.). (4 body)

Úloha C Nechť f je reálná funkce na $(0,\infty)$.

a) Pomocí kvantifikátorů definujte, co to znamená, že f je zdola omezená na $(0,\infty)$. (1 bod)

b) Podrobně dokažte, že f je zdola omezená na intervalu $(1,2)$, jestliže pro každý bod $x \in (0,\infty)$ platí

$$\lim_{y\to x+} f(y) = f(x) \qquad \text{a} \qquad -1 < \lim_{y\to x-} \frac{f(y)-f(x)}{y-x} < 1.$$

Věty (tvrzení), které používáte, přesně zformulujte bez důkazu. (3 body)

Úloha D1 a) Podrobně dokažte, že konvergentní posloupnost splňuje Bolzano-Cauchyovu podmínku.

b) Nechť f je rostoucí na $[0,1)$ a není omezená na $[0,1)$. Podrobně dokažte, že pak $\lim_{x\to 1-} f(x) = \infty$. Tvrzení, která používáte, zformulujte bez důkazu. (Nesmíte ovšem použít větu o limitě monotónní funkce, jejíž důkaz je podobný.) (2 + 4 body)

Úloha D2

a) Zformulujte a podrobně dokažte větu, která dává postačující podmínku pro lokální extrém funkce f v bodě a, a ve které se předpokládá existence $f''(a)$. Věty (tvrzení), které používáte, přesně zformulujte bez důkazu.

b) Podrobně dokažte, že pokud reálná posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ splňuje Bolzano - Cauchyovu podmínku, pak je konvergentní. Věty (tvrzení), které používáte, přesně zformulujte bez důkazu. (3 + 3 body)

(Body z D1 a D2 se nesčítají, počítá se lepší varianta.)

Nutné podmínky na hodnocení **dobře**:
- dosažení aspoň **8*** bodů jak z početní, tak i z teoretické části.
- dosažení aspoň **19*** bodů z obou částí dohromady.

Nutné podmínky na hodnocení **velmi dobře**:
- dosažení aspoň **11*** bodů jak z početní, tak i z teoretické části.
- dosažení aspoň **25* (17)** bodů z obou částí dohromady.
- dosažení aspoň **4*** bodů z důkazové úlohy D1 nebo z úlohy D2.

Nutné podmínky na hodnocení **výborně**:
- dosažení aspoň **13* (8)** bodů jak z početní, tak i z teoretické části.
- dosažení aspoň **30* (20)** bodů z obou částí dohromady.
- dosažení aspoň **4* (3)** bodů z důkazové úlohy D2.

C Teoretická část

Úloha A
(a) Napište Bolzano-Cauchyovu podmínku pro konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
(b) Napište znění druhé (Cauchyovy) věty o střední hodnotě.
(2+2 body)

Úloha B Nechť $f(x) = \operatorname{arctg} x + x$. Spočtěte $(f^{-1})'(0)$. Napište přesné znění věty, kterou užíváte, a přesně vysvětlete jak. Ověřte spnění předpokladů věty.
(4 body)

Úloha C Nechť funkce f je ryze konvexní na $(-\infty, 3)$ a $f(0) = 0$. Dokažte, že existuje limita posloupnosti

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n^{-1})}{n^{-1}}.$$

Napište přesné znění vět, které užíváte, a přesně vysvětlete jak.
(4 body)

Úloha D1 Uvažujme tři tvrzení:
(a) Funkce f je rostoucí v bodě 0 a existuje vlastní $f'(0)$.
(b) Existuje $f'(0) \in (0, \infty)$.
(c) Existuje $f'(0) \in [0, \infty)$.
Které z šesti implikací $((a) \Rightarrow (b), (a) \Rightarrow (c), \ldots)$ obecně platí? Uveďte podrobný důkaz nebo protipříklad. Věty (tvrzení), které používáte, přesně zformulujte bez důkazu. (**Nesmíte však použít** žádnou větu, ve které se vyskytuje pojem derivace.)
(6 bodů)

Úloha D2 Zformulujte (1b) a podrobně dokažte větu o derivaci složené funkce. Diskutujte i případ nekonečných derivací. Věty (tvrzení), které používáte, přesně zformulujte bez důkazu.
(6 bodů)

(Body z D1 a D2 se nesčítají, počítá se lepší varianta.)

Nutné podmínky na hodnocení **dobře**:
- dosažení aspoň **8*** bodů jak z početní, tak i z teoretické části.
- dosažení aspoň **19*** bodů z obou částí dohromady.

Nutné podmínky na hodnocení **velmi dobře**:
- dosažení aspoň **11*** bodů jak z početní, tak i z teoretické části.
- dosažení aspoň **25* (17)** bodů z obou částí dohromady.
- dosažení aspoň **4*** bodů z důkazové úlohy D1 nebo z úlohy D2.

Nutné podmínky na hodnocení **výborně**:
- dosažení aspoň **13* (8)** bodů jak z početní, tak i z teoretické části.
- dosažení aspoň **30* (20)** bodů z obou částí dohromady.
- dosažení aspoň **4* (3)** bodů z důkazové úlohy D2.

C Početní část

Používáte-li základní limity, které byly na přednášce, vždy je napište (bez důkazu, v obecném tvaru). Pokud užíváte limitu, kterou znáte z cvičení nebo odjinud, stručně ji znovu odvoďte.

Při užití Heineho věty napište, na jakou funkci a posloupnost ji užíváte. Při užití věty o limitě složené funkce zdůvodněte splnění předpokladů.

Příklad 1 Spočtěte (pokud existuje) limitu posloupnosti

$$\lim_{n\to\infty} \arcsin(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1})\cdot\ln(n+(-1)^n).$$

Svůj postup srozumitelně vysvětlete.
(4 body)

Příklad 2 Spočtěte (pokud existuje) limitu funkce

$$\lim_{x\to\pi/4} (\operatorname{tg} x)^{(\operatorname{tg} 2x+\operatorname{arctg}\sqrt{x})}.$$

Svůj postup srozumitelně vysvětlete.
(4 body)

Příklad 3 Určete asymptotu v ∞ funkce

$$f(x)=\sqrt{x^2+x\arccos(1/x)}$$

a vyjádřete $f'(2)$ bez užití cyklometrických funkcí.
(2+1 bod)

Příklad 4 Vyšetřete průběh funkce zadané předpisem

$$f(x)=x^2\cdot e^{-|x-1|}.$$

Podstatnou součástí řešení je náčrt grafu, který souhlasí s vašimi závěry, které ovšem musí být podloženy výpočtem.

(Nezapomeňte vyšetřit též jednostranné derivace, obor hodnot, lokální a absolutní extrémy, konvexitu, asymptoty atd. a své závěry **napsat**.)
(7 bodů)

Nutné podmínky na hodnocení **dobře**:
- dosažení aspoň **8*** bodů jak z početní, tak i z teoretické části.
- dosažení aspoň **19*** bodů z obou částí dohromady.

Nutné podmínky na hodnocení **velmi dobře**:
- dosažení aspoň **11*** bodů jak z početní, tak i z teoretické části.
- dosažení aspoň **25* (17)** bodů z obou částí dohromady.
- dosažení aspoň **4*** bodů z důkazové úlohy D1 nebo z úlohy D2.

Nutné podmínky na hodnocení **výborně**:
- dosažení aspoň **13* (8)** bodů jak z početní, tak i z teoretické části.
- dosažení aspoň **30* (20)** bodů z obou částí dohromady.
- dosažení aspoň **4* (3)** bodů z důkazové úlohy D2.