Teoretická část

Úloha A

(a) Napište znění Dirichletova a Abelova kritéria pro konvergenci řad.

(b) Definujte pojem Newtonova integrálu. Napište větu o Bolzano-Cauchyově podmínce pro existenci Newtonova integrálu.

(2 + 2 body)

Úloha B

(a) Napište definici tečné nadroviny funkce n proměnných v bodě a. Nechť H je tečná rovina funkce $f(x,y) = x^y$ v bodě $(1,3,1)$. Leží bod $(2,2,4)$ v H ? (Výsledek musí být podložen výpočtem, ale zdůvodňování existence H není nutné.)

(b) Nechť P je Taylorův polynom 2. řádu funkce $f(x) = \operatorname{arctg} x$ v bodě 1. Spočtěte $P(2)$.

(2+2 body)

Úloha C Nechť a_n, $n = 1, 2, \dots$, jsou reálná čísla a funkce $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ je definovaná a spojitá na intervalu $(-4, 1)$. Srozumitelně zdůvodněte, že funkce $g(x) := \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n$ je definovaná a spojitá na intervalu $[-3, 3]$. Tvrzení (fakta) z 2. semestru, která používáte, zformulujte bez důkazu.

(4 body)

Úloha D1

(i) Definujte pojem stejnoměrně spojité funkce na intervalu I. (1* b)

(ii) Zformulujte (1* b) a podrobně dokažte větu, která říká, že za jistých okolností je spojitá funkce stejnoměrně spojitá. Užíváte-li Bolzano-Weistrassovu větu, zformulujte ji bez důkazu.

(5 bodů)

Úloha D2 Zformulujte (1* b) a podrobně dokažte větu o derivaci složeného zobrazení. Tvrzení (lemmata), která užíváte, zformulujte bez důkazu.

(7 bodů)

(Body z D1 a D2 se nesčítají, počítá se lepší varianta.)

Nutné podmínky na hodnocení **dobře**:
- dosažení aspoň **8*** bodů jak z početní, tak i z teoretické části.
- dosažení aspoň **19*** bodů z obou částí dohromady.

Nutné podmínky na hodnocení **velmi dobře**:
- dosažení aspoň **11*** bodů jak z početní, tak i z teoretické části.
- dosažení aspoň **25*** **(17)** bodů z obou částí dohromady.
- dosažení aspoň **4*** bodů z důkazové úlohy D1 nebo z úlohy D2.

Nutné podmínky na hodnocení **výborně**:
- dosažení aspoň **13*** (8) bodů jak z početní, tak i z teoretické části.
- dosažení aspoň **30*** **(20)** bodů z obou částí dohromady.
- dosažení aspoň **5*** (4) bodů z důkazové úlohy D2.

Početní část

Výpočet pište tak, aby bylo jasné, jakých vět a faktů používáte. Užité věty z přednášky není nutno formulovat, ale je třeba ověřit jejich předpoklady. Pokud užíváte limitu, integrál apod., které nebyly na přednášce, ale znáte je ze cvičení nebo odjinud, stručně je znovu odvoďte.

Příklad 1 Vyšetřete konvergenci Newtonova integrálu

$$\int_1^\infty \ln^2\left(\frac{x+3}{x}\right) \cdot \ln x \, dx.$$

(3 body)

Příklad 2 Na nějakém okolí nuly rozviňte do mocninné řady se středem v 0 funkci

$$f(x) = \frac{x}{x^2+3x+2}.$$

Určete $f^{(5)}(0)$.
(4 body)

Příklad 3 Na maximálních intervalech spočtěte

$$\int \frac{1}{x(\ln^2 x - \ln x + 1)^2} \, dx.$$

(6 bodů)

Příklad 4 Nechť

$$f(x,y) = \frac{3x^3y + xy^3 + 2x^5}{x^4+y^2}, \qquad f(0,0) = 0.$$

Existuje totální diferenciál funkce f a) v bodě $(0,0)$? (4,5 b), b) v bodě $(1,1)$? (1,5 b)
Srozumitelně vysvětlete.
(6 bodů)

Nutné podmínky na hodnocení **dobře**:
- dosažení aspoň **8*** bodů jak z početní, tak i z teoretické části.
- dosažení aspoň **19*** bodů z obou částí dohromady.

Nutné podmínky na hodnocení **velmi dobře**:
- dosažení aspoň **11*** bodů jak z početní, tak i z teoretické části.
- dosažení aspoň **25* (17)** bodů z obou částí dohromady.
- dosažení aspoň **4*** bodů z důkazové úlohy D1 nebo z úlohy D2.

Nutné podmínky na hodnocení **výborně**:
- dosažení aspoň **13* (8)** bodů jak z početní, tak i z teoretické části.
- dosažení aspoň **30* (20)** bodů z obou částí dohromady.
- dosažení aspoň **5* (4)** bodů z důkazové úlohy D2.

Teoretická část

Úloha A
(a) Napište znění Taylorovy věty s Lagrangeovým tvarem zbytku.
(b) Definujte pojmy stejnoměrně spojité a lipschitzovské funkce na $(0, 1)$.
(2 + 2 body)

Úloha B Jediným použitím vhodné věty o substituci dokažte, že

$$\int_{3\pi/4}^{20\pi+\pi/4} \frac{\cos x}{\arccos\left(\frac{2\sin x+1}{3}\right)+3}\,dx = 0.$$

Napište přesné znění této věty o substituci a srozumitelně ověřte její předpoklady (napište, co je f, φ, atd.).
(4 body)

Úloha C Nechť funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ má totální diferenciál v bodě $a = (a_1, a_2)$. Dokažte (ovšem bez použití obecnější věty z přednášky), že existuje parciální derivace $f_1'(a) = \frac{\partial f}{\partial x}(a)$.
(Znění věty o limitě složeného zobrazení psát nemusíte, ale napište, co je vnitřní a co vnější zobrazení, a které jejich vlastnosti užíváte.)
(4 body)

Úloha D1 (i) Definujte pojem horního a dolního Darbouxova součtu. (0,5*)
(ii) Nechť $f \in \mathcal{R}([a, b])$ a $g \in \mathcal{R}([a, b])$. Podrobně dokažte, že $f + g \in \mathcal{R}([a, b])$.
(iii) Věty a tvrzení z 2. semestru, které jste použili v (ii), zformulujte bez důkazu.
(6 bodů)

Úloha D2 (a) Zformulujte Dirichletovo kritérium pro konvergenci řad. (0,5*)
(b) Zformulujte tvrzení o (BC) podmínce, které budete využívat v bodu (d). (0,5*)
(c) Zformulujte tvrzení týkající se Abelovy parciální sumace, které budete využívat v bodu (d). (1*)
(d) Dirichletovo kritérium podrobně dokažte.
(7 bodů)

(Body z D1 a D2 se nesčítají, počítá se lepší varianta.)

Nutné podmínky na hodnocení **dobře**:
- dosažení aspoň 8* bodů jak z početní, tak i z teoretické části.
- dosažení aspoň 19* bodů z obou částí dohromady.

Nutné podmínky na hodnocení **velmi dobře**:
- dosažení aspoň 11* bodů jak z početní, tak i z teoretické části.
- dosažení aspoň 25* (17) bodů z obou částí dohromady.
- dosažení aspoň 4* bodů z důkazové úlohy D1 nebo z úlohy D2.

Nutné podmínky na hodnocení **výborně**:
- dosažení aspoň 13* (8) bodů jak z početní, tak i z teoretické části.
- dosažení aspoň 30* (20) bodů z obou částí dohromady.
- dosažení aspoň 5* (4) bodů z důkazové úlohy D2.

Početní část

Výpočet pište tak, aby bylo jasné, jakých vět a faktů používáte. Užité věty z přednášky není nutno formulovat, ale je třeba ověřit jejich předpoklady. Pokud užíváte limitu, integrál apod., které nebyly na přednášce, ale znáte je ze cvičení nebo odjinud, stručně je znovu odvoďte.

Příklad 1 Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2(2n) \cdot \ln n}{\sqrt{n}}.$$

Svůj postup srozumitelně vysvětlete, všechny předpoklady použitých vět ověřte (fakta dokázaná na přednášce stačí napsat v **obecné formě** bez důkazu).
(4 body)

Příklad 2 Na nějakém okolí nuly (určete je) rozviňte do mocninné řady se středem v 0 funkci

$$f(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2}).$$

Určete $f^{(7)}(0)$ a $f^{(8)}(0)$. Je $f^{(7)}(0) = 0$? Svůj postup srozumitelně vysvětlete.
(4 body)

Příklad 3 Na intervalu $(-\pi, 3\pi)$ spočtěte

$$\int \frac{1}{5 - 4\cos x}\, dx.$$

Svůj postup srozumitelně vysvětlete.
(5 bodů)

Příklad 4 Vyšetřete konvergenci Newtonova integrálu

$$\int_0^{\pi/2} \ln(\cos x) \cdot \operatorname{cotg}^{\alpha} x \, dx$$

v závislosti na $\alpha \in \mathbb{R}$.
(6 bodů)

Nutné podmínky na hodnocení **dobře**:
- dosažení aspoň **8*** bodů jak z početní, tak i z teoretické části.
- dosažení aspoň **19*** bodů z obou částí dohromady.

Nutné podmínky na hodnocení **velmi dobře**:
- dosažení aspoň **11*** bodů jak z početní, tak i z teoretické části.
- dosažení aspoň **25*** **(17)** bodů z obou částí dohromady.
- dosažení aspoň **4*** bodů z důkazové úlohy D1 nebo z úlohy D2.

Nutné podmínky na hodnocení **výborně**:
- dosažení aspoň **13*** **(8)** bodů jak z početní, tak i z teoretické části.
- dosažení aspoň **30*** **(20)** bodů z obou částí dohromady.
- dosažení aspoň **5*** **(4)** bodů z důkazové úlohy D2.

Teoretická část

Úloha A

(a) Napište znění druhé věty o střední hodnotě integrálního počtu.

(b) Nechť (X, ρ) je metrický prostor a $M \subset X$. Definujte množiny M', $\overline{M}$, M^0 a ∂M.

(2 + 2 body)

Úloha B

Nechť funkce f je třídy C^1 na $\mathbb{R}^2$. Spočtěte $\frac{\partial g}{\partial u}(2,1)$ pomocí parciálních derivací funkce f, jestliže

$$g(u,v) = f(u^2 v, v^u).$$

Zformulujte znění vět, které jste použili, a vysvětlete jak.

(4 body)

Úloha C Nechť $f(x) = \cos x$, $a \in \mathbb{R}, h = 10^{-3}$. Pokud nahradíme diferenci $f(a+h)-f(a)$ diferenciálem $d_h f(a) = (df(a))(h)$, nedopustíme se chyby (v absolutní hodnotě) větší než 10^{-6}. Dokažte. Větu, kterou jste použili, přesně zformulujte.

(4 body)

Úloha D1

(i) Napište znění Dirichletova a Abelova kritéria pro konvergenci řad. (1,5 b)

(ii) Podrobně dokažte Abelovo kritérium na základě znalosti Dirichletova kritéria. Napište znění tvrzení o řadách, které jste při důkazu použili.

(5 bodů)

Úloha D2

a) Definujte $(R^*) \int_a^b f(x)\, dx$ (tedy Riemannův integrál pomocí Riemannovy definice, tj. pomocí Riemannových součtů). Pojem Riemannova součtu a pojem limity, který v definici používáte, přesně definujte. (1b)

b) Podrobně dokažte větu o existenci Riemannova integrálu spojité funkce (při Darbouxově i Riemannově definici). Použité věty (tvrzení, fakta) z 2. semestru zformulujte bez důkazu.

(7 bodů)

(Body z D1 a D2 se nesčítají, počítá se lepší varianta.)

Nutné podmínky na hodnocení **dobře**:
- dosažení aspoň **8*** bodů jak z početní, tak i z teoretické části.
- dosažení aspoň **19*** bodů z obou částí dohromady.

Nutné podmínky na hodnocení **velmi dobře**:
- dosažení aspoň **11*** bodů jak z početní, tak i z teoretické části.
- dosažení aspoň **25*** **(17)** bodů z obou částí dohromady.
- dosažení aspoň **4*** bodů z důkazové úlohy D1 nebo z úlohy D2.

Nutné podmínky na hodnocení **výborně**:
- dosažení aspoň **13*** **(8)** bodů jak z početní, tak i z teoretické části.
- dosažení aspoň **30*** **(20)** bodů z obou částí dohromady.
- dosažení aspoň **5*** **(4)** bodů z důkazové úlohy D2.

Teoretická část

Úloha A (2 + 2 body)

(a) Napište znění první věty o střední hodnotě integrálního počtu.

(b) Definujte pojem metrického prostoru (X, ρ) a pro $A \subset X$ definujte množinu hromadných bodů A'.

Úloha B Nechť $F(x, y) = (xy^2, x - y)$ pro $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Nechť $a = (1, 3)$ a $v = (2, 1)$. Zdůvodněte, že existuje $F'(a)$ a spočtěte jacobián $J_F(a)$ a derivaci podle vektoru $D_vF(a)$. Věty, které jste použili, přesně zformulujte.
(4 body)

Úloha C Nechť $0 < a_1 < a_2 < \dots$ a $\lim_{n\to\infty} a_n = 5$. Nechť řada komplexních čísel $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverguje. Podrobně dokažte, že pak řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(b_n + \frac{(-1)^n}{\ln(n+1)} \right) \cdot a_n$$

diverguje. Věty (fakta) o řadách, které používáte, přesně zformulujte bez důkazu a jasně vysvětlete, jak je užíváte.
(4 body)

Úloha D1 (i) Napište úplnou definici symbolu $(R) \int_a^b f$ (tj. Riemannova integrálu podle Darbouxovy definice). (1 b.)

(ii) Nechť $a < b < c$ a f je funkce na intervalu $[a, c]$, pro kterou existují $(R) \int_a^b f$ a $(R) \int_b^c f$. Dokažte, že pak

$$(R) \int_a^c f = (R) \int_a^b f + (R) \int_b^c f.$$

Použitá tvrzení (fakta) zformulujte bez důkazu.
(5 bodů)

Úloha D2 (i) Napište definici totálního diferenciálu (0,5 b.).

(ii) Zformulujte (slabou) větu o přírustku funkce, kterou budete potřebovat v bodě (iii). (1 b.)

(iii) Zformulujte a podrobně dokažte větu o vztahu spojitosti parciálních derivací a existence totálního diferenciálu.
(7 bodů)

(Body z D1 a D2 se nesčítají, počítá se lepší varianta.)

Nutné podmínky na hodnocení **dobře**:
- dosažení aspoň **8*** bodů jak z početní, tak i z teoretické části.
- dosažení aspoň **19*** bodů z obou částí dohromady.

Nutné podmínky na hodnocení **velmi dobře**:
- dosažení aspoň **11*** bodů jak z početní, tak i z teoretické části.
- dosažení aspoň **25*** **(17)** bodů z obou částí dohromady.
- dosažení aspoň **4*** bodů z důkazové úlohy D1 nebo z úlohy D2.

Nutné podmínky na hodnocení **výborně**:
- dosažení aspoň **13*** **(8)** bodů jak z početní, tak i z teoretické části.
- dosažení aspoň **30*** **(20)** bodů z obou částí dohromady.
- dosažení aspoň **5*** **(4)** bodů z důkazové úlohy D2.

Početní část

Výpočet pište tak, aby bylo jasné, jakých vět a faktů používáte. Užité věty z přednášky není nutno formulovat, ale je třeba ověřit jejich předpoklady. Pokud užíváte limitu, integrál apod., které nebyly na přednášce, ale znáte je ze cvičení nebo odjinud, stručně je znovu odvoďte.

Příklad 1 Vypočtěte poloměr konvergence mocninné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-2)^n \frac{n!}{n^n} x^n.$$

Svůj postup srozumitelně vysvětlete.
(3 body)

Příklad 2 Nechť

$$f(x,y) = \frac{yx^3 + xy^8}{y^2 + x^6}, \quad f(0,0) = 0.$$

Vyšetřete, zda f je spojitá v bodě $(0,0)$.
(4 body)

Příklad 3 Na maximálních intervalech (určete je) spočtěte

$$\int \frac{1}{x\sqrt{3\ln x - \ln^2 x - 2}}\, dx.$$

Svůj postup srozumitelně vysvětlete.
(6 bodů)

Příklad 4 Vyšetřete konvergenci Newtonova integrálu

$$\int_0^{\infty} \sin(e^x)\, \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\, dx.$$

Srozumitelně vysvětlete. Předpoklady užitých vět ověřte výpočtem.
(6 bodů)

Nutné podmínky na hodnocení **dobře**:
- dosažení aspoň **8*** bodů jak z početní, tak i z teoretické části.
- dosažení aspoň **19*** bodů z obou částí dohromady.

Nutné podmínky na hodnocení **velmi dobře**:
- dosažení aspoň **11*** bodů jak z početní, tak i z teoretické části.
- dosažení aspoň **25*** **(17)** bodů z obou částí dohromady.
- dosažení aspoň **4*** bodů z důkazové úlohy D1 nebo z úlohy D2.

Nutné podmínky na hodnocení **výborně**:
- dosažení aspoň **13*** **(8)** bodů jak z početní, tak i z teoretické části.
- dosažení aspoň **30*** **(20)** bodů z obou částí dohromady.
- dosažení aspoň **5*** **(4)** bodů z důkazové úlohy D2.

Teoretická část

Úloha A

(a) Napište znění Taylorovy věty s Lagrangeovým tvarem zbytku.

(b) Nechť $F(x) = \|x\|_e \cdot x$ pro $x \in \mathbb{R}^2$ a nechť $a = (0,2)$. Spočtěte jacobián $J_F(a)$. (Jeho existenci nemusíte zdůvodňovat.)

(2 + 2 body)

Úloha B Nechť $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$, $f_2'(-1,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(-1,0) = 5$; nechť $h(r,\alpha) := f(r\cos\alpha, r\sin\alpha)$ pro $(r,\alpha) \in \mathbb{R}^2$. Spočtěte $\frac{\partial h}{\partial \alpha}(1,\pi)$. Napište znění (asi 2) obecných vět, které jste při výpočtu použili, a vysvětlete, jak.

(4 body)

Úloha C Zformulujte (1 b.) a podrobně dokažte tvrzení o podmínce Bolzano-Caychyova typu pro Riemannův integrál (při Darbouxově definici). Všechny použité pojmy ze 2. semestru definujte a potřebná fakta zformulujte.

(4 body)

Úloha D1 Zformulujte (1 b.) a podrobně dokažte větu o (vlastnostech a existenci) poloměru konvergence komplexní mocninné řady. Použitá fakta o řadách zformulujte bez důkazu.

(5 bodů)

Úloha D2

Zformulujte (1 b.) a dokažte Dirichletovo kritérium pro konvergenci Newtonova integrálu. Věty (tvrzení), které používáte, přesně zformulujte bez důkazu.

(7 bodů)

(Body z D1 a D2 se nesčítají, počítá se lepší varianta.)

Nutné podmínky na hodnocení **dobře**:
- dosažení aspoň **8*** bodů jak z početní, tak i z teoretické části.
- dosažení aspoň **19*** bodů z obou částí dohromady.

Nutné podmínky na hodnocení **velmi dobře**:
- dosažení aspoň **11*** bodů jak z početní, tak i z teoretické části.
- dosažení aspoň **25* (17)** bodů z obou částí dohromady.
- dosažení aspoň **4*** bodů z důkazové úlohy D1 nebo z úlohy D2.

Nutné podmínky na hodnocení **výborně**:
- dosažení aspoň **13* (8)** bodů jak z početní, tak i z teoretické části.
- dosažení aspoň **30* (20)** bodů z obou částí dohromady.
- dosažení aspoň **5* (4)** bodů z důkazové úlohy D2.

Početní část

Výpočet pište tak, aby bylo jasné, jakých vět a faktů používáte. Užité věty z přednášky není nutno formulovat, ale je třeba ověřit jejich předpoklady. Pokud užíváte limitu, integrál apod., které nebyly na přednášce, ale znáte je ze cvičení nebo odjinud, stručně je znovu odvoďte.

Příklad 1 Na co největší podmnožině $\mathbb{R}$ vyjádřete součet řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 x^{n+1}}{n!}$$

pomocí konečně mnoha elementárních funkcí.
(3 body)

Příklad 2 Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{n\pi}{5}\right) \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{n}}{n+\ln^2 n}\right).$$

Svůj postup srozumitelně vysvětlete, všechny předpoklady použitých vět ověřte (fakta dokázaná na přednášce stačí napsat v **obecné formě** bez důkazu).
(3 body)

Příklad 3 Na maximálních intervalech spočtěte

$$\int \frac{1}{x^2(x+\sqrt{1+x^2})}\, dx.$$

(7 bodů)

Příklad 4 Vyšetřete konvergenci Newtonova integrálu

$$\int_2^{\infty} \frac{\ln(x-1)}{(x-2)^{\frac{4}{3}}}\, dx.$$

Srozumitelně vysvětlete. Předpoklady užitých vět ověřte výpočtem.
(6 bodů)

Nutné podmínky na hodnocení **dobře**:
- dosažení aspoň **8*** bodů jak z početní, tak i z teoretické části.
- dosažení aspoň **19*** bodů z obou částí dohromady.

Nutné podmínky na hodnocení **velmi dobře**:
- dosažení aspoň **11*** bodů jak z početní, tak i z teoretické části.
- dosažení aspoň **25* (17)** bodů z obou částí dohromady.
- dosažení aspoň **4*** bodů z důkazové úlohy D1 nebo z úlohy D2.

Nutné podmínky na hodnocení **výborně**:
- dosažení aspoň **13* (8)** bodů jak z početní, tak i z teoretické části.
- dosažení aspoň **30* (20)** bodů z obou částí dohromady.
- dosažení aspoň **5* (4)** bodů z důkazové úlohy D2.

Teoretická část

Úloha A (2 + 2 body)

(a) Napište znění Dirichletova a Abelova kritéria pro konvergenci Newtonova integrálu.

(b) Definujte pojem metrického prostoru (X, ρ) a pro $A \subset X$ definujte množinu vnitřních bodů A^0.

Úloha B (2 + 2 body)

(a) Nechť $G(x) = \|x\|_e \cdot x$ pro $x \in \mathbb{R}^2$ a nechť $a = (1,1)$. Napište Jacobiho matici zobrazení G v bodě a. (Její existenci nemusíte zdůvodňovat.)

(b) Nechť P je Taylorův polynom 2. řádu funkce $f(x) = \ln x$ v bodě e. Spočtěte $P(2e)$.

Úloha C

Nechť f je funkce třídy C^1 na $\mathbb{R}^2$, $a = (1,1)$, $v = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$. Nechť $\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) = 2$ a $\frac{\partial f}{\partial x_2}(a) = 3$. Dokažte, že existuje derivace podle vektoru (směrová derivace) $D_v f(a) = \frac{\partial f}{\partial v}(a) = \partial_v f(a)$ a spočtěte ji. Věty (tvrzení) z 2. semestru, které používáte, zformulujte v obecném tvaru bez důkazu.
(4 body)

Úloha D1

Nechť f je neklesající funkce na $[a, b]$. Podrobně dokažte, že existuje integrál $(R) \int_a^b f$ (podle Darbouxovy definice). Věty a tvrzení z 2. semestru, které jste použili, zformulujte bez důkazu. Definujte pojem horního a dolního Darbouxova integrálního součtu. Napište Darbouxovu definici Riemannova integrálu.
(5 bodů)

Úloha D2 (a) Zformulujte Dirichletovo kritérium pro konvergenci řad. (1*)

(b) Zformulujte tvrzení týkající se Abelovy parciální sumace, které budete využívat v bodu (d). (1*)

(c) Zformulujte tvrzení o (BC) podmínce, které budete využívat v bodu (d).

(d) Dirichletovo kritérium podrobně dokažte.

(7 bodů)

(Body z D1 a D2 se nesčítají, počítá se lepší varianta.)

Nutné podmínky na hodnocení **dobře**:
- dosažení aspoň **8*** bodů jak z početní, tak i z teoretické části.
- dosažení aspoň **19*** bodů z obou částí dohromady.

Nutné podmínky na hodnocení **velmi dobře**:
- dosažení aspoň **11*** bodů jak z početní, tak i z teoretické části.
- dosažení aspoň **25* (17)** bodů z obou částí dohromady.
- dosažení aspoň **4*** bodů z důkazové úlohy D1 nebo z úlohy D2.

Nutné podmínky na hodnocení **výborně**:
- dosažení aspoň **13* (8)** bodů jak z početní, tak i z teoretické části.
- dosažení aspoň **30* (20)** bodů z obou částí dohromady.
- dosažení aspoň **5* (4)** bodů z důkazové úlohy D2.

Početní část

Výpočet pište tak, aby bylo jasné, jakých vět a faktů používáte. Užité věty z přednášky není nutno formulovat, ale je třeba ověřit jejich předpoklady. Pokud užíváte limitu, integrál apod., které nebyly na přednášce, ale znáte je ze cvičení nebo odjinud, stručně je znovu odvoďte.

Příklad 1 Na maximálním otevřeném intervalu spočtěte

$$\int \arccos x \, dx.$$

(3 body)

Příklad 2 Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{\ln(n^2+1)}.$$

Svůj postup srozumitelně vysvětlete, všechny předpoklady použitých vět ověřte (fakta dokázaná na přednášce stačí napsat v **obecné formě** bez důkazu).
(4 body)

Příklad 3 Nechť

$$f(x,y) = \frac{x^5 + xy^4 + xy^5}{y^4 + x^4}, \quad f(0,0) = 0.$$

Dokažte, že f má totální diferenciál v bodě $(0,0)$. (Pozn.: Je vhodné užít definici tot. diferenciálu.)
(6 bodů)

Příklad 4 Vyšetřete konvergenci Newtonova integrálu

$$\int_0^{\infty} (\cos x - e^{-x})\, x^{-a} \, dx$$

v závislosti na $a \in \mathbb{R}$. Srozumitelně vysvětlete.
(6 bodů)

Nutné podmínky na hodnocení **dobře**:
- dosažení aspoň **8*** bodů jak z početní, tak i z teoretické části.
- dosažení aspoň **19*** bodů z obou částí dohromady.

Nutné podmínky na hodnocení **velmi dobře**:
- dosažení aspoň **11*** bodů jak z početní, tak i z teoretické části.
- dosažení aspoň **25*** **(17)** bodů z obou částí dohromady.
- dosažení aspoň **4*** bodů z důkazové úlohy D1 nebo z úlohy D2.

Nutné podmínky na hodnocení **výborně**:
- dosažení aspoň **13*** **(8)** bodů jak z početní, tak i z teoretické části.
- dosažení aspoň **30*** **(20)** bodů z obou částí dohromady.
- dosažení aspoň **5*** **(4)** bodů z důkazové úlohy D2.