1. přednáška MA 3, šk. r. 2016/17, 3.10.2016

Metrické prostory II.

Definice. Buď (X,ϱ) metr. prostor. Posloupnost bodů $\{x_n\}$ prostoru (X,ϱ) nazýváme cauchyovskou, jestliže

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n, m \in \mathbb{N},\ n \geq n_0,\ m \geq n_0 : \varrho(x_n, x_m) < \varepsilon .$$

Poznámka. Každá konvergentní posloupnost je cauchyovská, neboť, je-li $x_n \to x$ v (X,ϱ), pak

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 : \varrho(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \ \forall m \in \mathbb{N},\ n \geq n_0,\ m \geq n_0 : \varrho(x_n, x_m) \leq \varrho(x_n, x) + \varrho(x, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon .$$

Ovšem cauchyovská posloupnost bodů z (X,ϱ) nemusí být konvergentní v prostoru (X,ϱ) – viz násl. příklad.

Př. $X = (0,1)$, $\varrho(x,y) = |x-y| \ \forall x,y \in X$. Pak pro posl. $\{\frac{1}{k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ platí $\frac{1}{k} \to 0 \notin X$. Tedy posloupnost $\{\frac{1}{k}\}$ není konvergentní v X. Je ovšem cauchyovská, neboť posl. $\{\frac{1}{k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ je konvergentní k 0 v prostoru $(\mathbb{R},\varrho)$.*)

Definice. Metrický prostor (X,ϱ) nazýváme úplným, jestliže každá cauchyovská posl. bodů prostoru X je konvergentní v X.

Lemma 1 (vztah úplnosti a uzavřenosti). Uzavřená část úplného prostoru je úplný prostor.

Důkaz. Nechť (X,ϱ) je úplný metr. prostor a nechť $M = \overline{M} \subset X$. Buď $\{x_n\}$ cauchyovská posl. bodů z M. Pak $\{x_n\}$ je také cauchyovská v (X,ϱ), což je úplný prostor. Tedy existuje $x \in X$ tak, že $x_n \to x$ v (X,ϱ). Ovšem $x \in \overline{M} = M$ (neb $x_n \in M \ \forall n \in \mathbb{N}$). Proto každá cauchyovská posl. bodů z M má limitu v M $\Rightarrow (M,\varrho)$ je úplný prostor. $\square$

---

*) Metrika ϱ je v $\mathbb{R}$ dána stejným předpisem jako v X.

Definice. Metr. prostor (X,ϱ) nazýváme **kompaktním**, jestliže každá posl. bodů z X obsahuje vybranou konvergentní podposloupnost s limitou v X.

Množina $M\subset X$ se nazývá **kompaktní**, jestliže (M,ϱ) je kompaktní metr. prostor.

Př. 1. $X=\langle a,b\rangle$, kde $-\infty<a<b<+\infty$, $\varrho(x,y):=|x-y|$, $x,y\in X$. Pak (X,ϱ) je kompaktní (dle Weierstrassovy věty).

2. $X=(a,b)$, ϱ, a, b stejné jako v části 1. Pak (X,ϱ) není kompaktní, neboť např. pro posl. bodů z X $x_n=a+\frac{1}{n}\in X$, kde $n\in\mathbb{N}$ je dost velké, platí $x_n\to a$. Tedy každá posl. vybraná z $\{x_n\}$ konverguje k bodu a, ale $a\notin X$.

Lemma 2 (vztah kompaktnosti a uzavřenosti). Uzavřená část kompaktního prostoru je kompaktní prostor.

Důkaz. Nechť $M=\overline{M}\subset(X,\varrho)$, kde (X,ϱ) je kompaktní metr. prostor. Buď $\{x_n\}$ posl. bodů z M. Pak $\{x_n\}$ je posl. bodů z X, (X,ϱ) je kompaktní, tedy ex. $\{x_{n_k}\}_k$ vybraná z $\{x_n\}_n$ tak, že $x_{n_k}\to x$ v (X,ϱ). Protože $x_{n_k}\in M$ $\forall k\in\mathbb{N}$, platí $x\in\overline{M}=M$. □

Sem dát poslední poznámku z listu ⌊5

Lemma 3 (vztah kompaktnosti a úplnosti). Každý kompaktní metr. prostor je úplný.

Důkaz. Nechť $\{x_n\}$ je cauchyovská posl. bodů z X. Prostor (X,ϱ) je kompaktní, proto z posl. $\{x_n\}$ lze vybrat posl. $\{x_{n_k}\}$ tak, že $x_{n_k}\to x\in X$. Pak už ale celá cauchyovská posl. $\{x_n\}$ má limitu x.*) Tedy X je úplný. □

*) Je-li $\varepsilon>0$, pak: 1) $\exists k_0\in\mathbb{N}\ \forall k\in\mathbb{N}, k\ge k_0: \varrho(x_{n_k},x)<\varepsilon/2$,
2) $\exists n_0\in\mathbb{N}\ \forall n,m\in\mathbb{N}, n,m\ge n_0: \varrho(x_n,x_m)<\varepsilon/2$.
Buď $n\ge n_0$, $k\ge\max\{k_0,n_0\}$. Pak $n_k\ge n_0$ a platí
$\varrho(x_n,x)\le\varrho(x_n,x_{n_k})+\varrho(x_{n_k},x)<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon$. Tedy $x_n\to x$.

Definice. Buď (X,ρ) metr. prostor, $M \subset X$, $\varepsilon > 0$. Množina $E = E(\varepsilon) \subset X$ se nazývá **ε-síť množiny M**, jestliže

$$\forall x \in M : \rho(x, E) < \varepsilon .$$

Je-li navíc E konečná množina, nazývá se **konečnou ε-sítí množiny M**.

Poznámka. Je-li $E = \{x_1, \dots, x_k\}$ konečná ε-síť množiny M, pak $M \subset \bigcup_{i=1}^{k} U(x_i, \varepsilon)$. (Neboť $\forall x \in M$ je $\underbrace{\rho(x,E)}_{=\inf\limits_{y\in E} \rho(x,y)} < \varepsilon \implies \exists x_i \in E : \rho(x, x_i) < \varepsilon$.

Bod $x \in M$ byl libovolný $\implies M \subset \bigcup_{i=1}^{k} U(x_i, \varepsilon)$.)

Naopak, platí-li $M \subset \bigcup_{i=1}^{k} U(x_i, \varepsilon)$, pak $\rho(x, E) < \varepsilon \ \forall x \in M$, kde $E = \{x_1, \dots, x_k\}$, $\implies E$ je konečná ε-síť množiny M.

Definice. Metr. prostor (X,ρ) se nazývá **totálně omezený**, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje konečná ε-síť množiny X. Množina $M \subset X$ se nazývá **totálně omezená**, je-li metr. pr. (M, ρ) tot. omezený.

Lemma 4 (vztah tot. omezenosti a omezenosti). Každá totálně omezená množina je omezená.

Důkaz. Buď (X,ρ) metr. prostor, $M \subset X$, M tot. omezená. Zvolme $\varepsilon = 1$. Pak ex. konečná ε-síť množiny M, označme ji $E = \{x_1, \dots, x_k\}$. Je-li $x, y \in M$, pak ex. body $x_i, x_j \in E$ tak, že $\rho(x, x_i) < 1$ a $\rho(y, x_j) < 1$. Tedy

$$\rho(x,y) \le \underbrace{\rho(x,x_i)}_{<1} + \rho(x_i,x_j) + \underbrace{\rho(x_j,y)}_{<1} < 2 + \underbrace{\max_{i,j \in \{1,\dots,k\}} \rho(x_i, x_j)}_{=:c\,<+\infty} =$$
$$= c + 2 < +\infty$$

$\implies \operatorname{diam} M \le c + 2 < +\infty$, tedy M je omezená. $\square$

Věta 5. (charakterizace totální omezenosti). Metr. prostor (X,ϱ) je totálně omezený právě tehdy, když z každé posl. prvků z X lze vybrat posl. cauchyovskou.

Důkaz: (i) Buď (X,ϱ) tot. omezený prostor. Pak pro každé $\varepsilon_k := \frac{1}{k}$ ex. konečná ε_k-síť $\{a_1^{(k)}, \dots, a_{m_k}^{(k)}\}$ množiny $X \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad X \subset \bigcup_{j=1}^{m_k} U(a_j^{(k)}, \varepsilon_k) \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Buď $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ posl. bodů z X. Protože $\{U(a_j^{(1)}, \varepsilon_1)\}_{j=1}^{m_1}$ pokrývá X, existuje alespoň jedno okolí v tomto systému, které obsahuje nekonečně mnoho členů posl. $\{x_n\}$, tedy všechny členy jisté vybrané posl. $\{x_n^{(1)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ z posl. $\{x_n\}$.

Z analogických důvodů ex. okolí ze systému $\{U(a_j^{(2)}, \varepsilon_2)\}_{j=1}^{m_2}$ tak, že toto okolí obsahuje všechny členy jisté posl. $\{x_n^{(2)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ vybrané z $\{x_n^{(1)}\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Matematickou indukcí lze dokázat, že ex. okolí v systému $\{U(a_j^{(k)}, \varepsilon_k)\}_{k=1}^{m_k}$, které obsahuje všechny členy jisté nekonečné posloupnosti $\{x_n^{(k)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ vybrané z $\{x_n^{(k-1)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ $\forall k \in \mathbb{N}$.

Pak diagonální posl. $\{x_k^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ je posl. vybraná z $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ a je cauchyovská. *)

---

*) Neboť body $x_{k+1}^{(k+1)}, x_{k+2}^{(k+2)}, \dots$ posl. $\{x_k^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ patří do posl. $\{x_n^{(k)}\}_{n\in\mathbb{N}}$, a tudíž leží v jistém okolí $U(a_j^{(k)}, \varepsilon_k)$, tj. v ot. kouli o poloměru $\varepsilon_k = \frac{1}{k}$. Je-li $\varepsilon > 0$, zvolím k_0 tak, aby $\varepsilon_{k_0} = \frac{1}{k_0} < \frac{\varepsilon}{2}$. Pak platí

$$|x_k^{(k)} - a_j^{(k_0)}| < \frac{1}{k_0} \quad \forall k \geq k_0$$

$$\Rightarrow \quad |x_k^{(k)} - x_l^{(l)}| < \frac{2}{k_0} < \varepsilon \quad \forall k, l \geq k_0$$

$$\Rightarrow \quad \{x_k^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}} \text{ je cauchyovská.}$$

(ii) Nechť (X,ϱ) není totálně omezený. Pak ex. $\varepsilon > 0$ tak, že

(*) $X \setminus \bigcup_{x \in K} U(x,\varepsilon) \neq \emptyset$ $\forall$ konečnou množinu $K \subset X$.

Jestliže dokážeme, že

(**) existuje posl. bodů $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ z prostoru X tak, že
$\varrho(x_i, x_j) \geq \varepsilon$ $\forall i,j \in \mathbb{N}$, $i \neq j$,

bude důkaz dokončen, neboť z takové posloupnosti nelze vybrat posl. cauchyovskou.

Dokažme tedy (**):

Zvolme $x_1 \in X$. Pak ex. $x_2 \in X$ tak, že $\varrho(x_2, x_1) \geq \varepsilon$ – cf. (*) (jinak by $\{x_1\}$ byla ε-síť množiny X). Dále ex. $x_3 \in X$ tak, že $\varrho(x_3, \{x_1, x_2\}) \geq \varepsilon$

$\Rightarrow$ $\varrho(x_3, x_1) \geq \varepsilon$ $\wedge$ $\varrho(x_3, x_2) \geq \varepsilon$

(jinak by $\{x_1, x_2, x_3\}$ byla konečná ε-síť množiny X).

Tímto postupem (s použitím mat. indukce) dostaneme posl. $\{x_n\}$ splňující (**). □

Poznámka. V důkaze Věty 5 jsme ověřili, že pokud metr. prostor (X,ϱ) není totálně omezený, pak platí (**).

Poznámka (dát za Lemma 2 na list L2). Buď (X,ϱ) metr. prostor a $M \subset X$ kompaktní množina. Pak M je uzavřená.

Důkaz. Nechť $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ je posl. bodů z M, pro kterou platí $x_n \to x \in X$. Protože M je kompaktní, tak ex. vybraná posloupnost $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ z posl. $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, která je konvergentní v M, tj. její limita leží v M. Protože však $x_{n_k} \to x$, je $x \in M$. Tedy M je uzavřená. □

2. přednáška MA 3, šk. r. 2016/17, 5. 10. 2016

Věta 6 (charakterizace kompaktnosti). Metr. prostor (X,ϱ) je kompaktní právě tehdy, je-li totálně omezený a úplný.

Důkaz. (i) kompaktnost $\Rightarrow$ úplnost: viz Lemma 3.

(ii) kompaktnost $\Rightarrow$ tot. omezenost: Kdyby (X,ϱ) nebyl tot. omezený, pak (dle předposlední Poznámky v 1. přednášce) by existovalo $\varepsilon > 0$ a posl. bodů $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ z X tak, že

$\varrho(x_i, x_j) \geq \varepsilon \quad \forall i,j \in \mathbb{N},\ i \neq j$. Z takové posloupnosti ale nelze vybrat konvergentní podposloupnost. Tedy (X,ϱ) by nebyl kompaktní.

(iii) totální omezenost + úplnost $\Rightarrow$ kompaktnost: Buď $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ posl. bodů z X. Protože X je tot. omezený, lze (dle Věty 5) z $\{x_n\}$ vybrat posl. $\{x_{n_k}\}$, která je cauchyovská. Protože (X,ϱ) je úplný, tak ex. $x\in X$ splňující $x_{n_k} \to x$ v X. Tedy (X,ϱ) je kompaktní (neb z libovolné posl. bodů z X jsme vybrali podposloupnost, která je konvergentní v prostoru (X,ϱ)). $\square$

Věta 7 (charakterizace kompaktnosti v prostoru $\mathbb{R}^m$).
Buď $m\in\mathbb{N}$ a M množina v prostoru $(\mathbb{R}^m, \|\cdot\|_2)$.
Pak M je kompaktní právě tehdy, je-li omezená a uzavřená.

Důkaz. (i) kompaktnost $\Rightarrow$ uzavřenost: viz Poznámka z 1. přednášky. (na listě 5)

(ii) kompaktnost $\Rightarrow$ omezenost: Dle Věty 6 každá kompaktní množina je totálně omezená a taková množina je omezená dle Lemmatu 4.

(iii) omezenost + uzavřenost $\Rightarrow$ kompaktnost:

Nejprve dokážeme, že každá omezená posl. v prostoru $\mathbb{R}^m$ obsahuje vybranou posloupnost, která je konvergentní.

Buď $x_1, x_2, x_3, \ldots$ omezená posl. v $\mathbb{R}^m$; nechť $x_n = [x_{n1}, x_{n2}, \ldots, x_{nm}]$ $\forall n\in\mathbb{N}$. Každá z posloupností $\{x_{n1}\}_{n\in\mathbb{N}}, \{x_{n2}\}_{n\in\mathbb{N}}, \ldots, \{x_{nm}\}_{n\in\mathbb{N}}$ je omezená.

Použijme opakovaně Bolzano-Weierstrassovu větu (věta 42, 11. přednáška MA 1). Z posl. $1, 2, 3, \ldots$ vybereme posloupnost

(1) $$k_1 < k_2 < k_3 < \ldots$$

tak, aby posloupnost prvních souřadnic

(1*) $$x_{k_1 1},\ x_{k_2 1},\ x_{k_3 1}, \ldots$$

byla konvergentní. Pak z posl. (1) vybereme posloupnost

(2) $$l_1 < l_2 < l_3 < \ldots$$

tak, aby posloupnost druhých souřadnic

(2*) $$x_{l_1 2},\ x_{l_2 2},\ x_{l_3 2}, \ldots$$

byla konvergentní (posloupnost prvních souřadnic

$$x_{l_1 1},\ x_{l_2 1},\ x_{l_3 1}, \ldots$$

vybraná z (1*) ovšem zůstane konvergentní). Z (2) vybereme posloupnost

(3) $$p_1 < p_2 < p_3 < \ldots$$

tak, aby posl. třetích souřadnic byla konvergentní, atd.
Po m krocích dostaneme vybranou posloupnost, u níž posloupnost prvních, druhých, ..., m-tých souřadnic je konvergentní. Tedy tato posl. je konvergentní (neb v $\mathbb{R}^m$ se konvergence realizuje po souřadnicích).

Nyní dokážeme platnost implikace v (iii). Buď M omezená a uzavřená a $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ posloupnost bodů z M. Pak $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ omezená, a tedy z ní lze vybrat posloupnost $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ splňující $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$. Máme dokázat, že $x \in M$. Protože $x_{n_k} \in M$ $\forall k \in \mathbb{N}$, je $x = \lim_{k\to\infty} x_{n_k} \in \overline{M}$. Protože $M = \overline{M}$, platí $x \in M$. $\square$

Poznámka. Nerostoucí posloupnost neprázdných množin může mít prázdný průnik. Např.

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(0, \tfrac{1}{n}\right) = \emptyset \qquad \text{nebo} \qquad \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \langle n, +\infty) = \emptyset .$$

Následující věta ukazuje, že pro kompaktní množiny toto nemůže nastat.

Věta 8 (Cantor). Nechť (X,ϱ) je metrický prostor a nechť $M_1 \supset M_2 \supset \dots$ jsou neprázdné kompaktní podmnožiny prostoru X. Pak $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} M_k \neq \emptyset$. *)

Důkaz. Nechť $x_n \in M_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Pak $\{x_n\}$ je posloupnost prvků z M_1, množina M_1 je kompaktní $\Rightarrow$ ex. $\{x_{n_k}\}$ vybraná z $\{x_n\}$, pro kterou platí $x_{n_k} \to x \in M_1$.

Buď $k \in \mathbb{N}$. Pak $n_k \geq k$, a proto body $x_{n_k}, x_{n_{k+1}}, x_{n_{k+2}}, \dots$ leží v M_k. Množina M_k je kompaktní ($\Rightarrow$ uzavřená) $\Rightarrow x \in M_k$. Protože $k \in \mathbb{N}$ bylo libovolné, je $x \in \bigcap_{k\in\mathbb{N}} M_k$. □

Definice. Metrický prostor (X,ϱ) nazveme separabilním, jestliže obsahuje spočetnou množinu Q, která je hustá v X.

Př. Buď $X = \mathbb{R}$, $\varrho(x,y) = |x-y|$ $\forall x,y \in \mathbb{R}$. Pak (X,ϱ) je separabilní. To plyne z Věty 10 (o hustotě $\mathbb{Q}$ v $\mathbb{R}$), 4. přednáška MA1.

Věta 9 (vztah tot. omezenosti a separability). Každý totálně omezený prostor je separabilní.

Důkaz. Nechť (X,ϱ) je tot. omezený prostor. Pak $\forall n \in \mathbb{N}$ ex. konečná $\frac{1}{n}$-síť Q_n množiny X. Nechť $Q := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Q_n$. Potom Q je spočetná množina, která je hustá v X, neboť $\forall x \in X$ platí:

$$\varrho(x,Q) \leq \varrho(x,Q_n) < \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$\Rightarrow$ $\varrho(x,Q) = 0$ $\Rightarrow$ $x \in \overline{Q}$, a tedy $\overline{Q} = X$ (neb $x \in X$ byl libovolný bod z X). □

---

*) Speciálním případem této věty je Věta 43 (Cantor), 11. přednáška MA1:
Věta 43 (Cantor). Nechť $\langle a_n, b_n\rangle \subset \mathbb{R}$ jsou intervaly splňující $\langle a_{n+1}, b_{n+1}\rangle \subset \langle a_n, b_n\rangle$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Pak $\bigcap_{n=1}^{\infty} \langle a_n, b_n\rangle \neq \emptyset$.

Z Vět 6 a 9 plyne:

Důsledek. Kompaktní metr. prostor je separabilní.

Věta 10 (Lindelöf). Buď (X,ϱ) metr. prostor, $M \subset X$, M separabilní. Nechť $M \subset \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$, kde G_α, $\alpha \in A$, jsou otevřené množiny v (X,ϱ). Pak existuje spočetná množina $B \subset A$ tak, že $M \subset \bigcup_{\alpha \in B} G_\alpha$.

(Tzn., že z každého otevřeného pokrytí separabilní množiny lze vybrat spočetné pokrytí.)

Důkaz. Buď $Q = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ spočetná množina, která je hustá v M. Uvažujme systém $\{U(x_m, \frac{1}{k})\}_{m,k \in \mathbb{N}}$. Tento systém je spočetný.

Dokážeme, že: **1.** $\forall x \in M\ \exists U(x_m, \frac{1}{k})$ tak, že $x \in U(x_m, \frac{1}{k})$ a přitom $U(x_m, \frac{1}{k}) \subset G_\alpha$ pro nějaké $\alpha \in A$.

Buď $x \in M$. Pak $\exists \alpha \in A$ tak, že $x \in G_\alpha$, G_α je otevřená $\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}$ tak, že $U(x, \frac{2}{k}) \subset G_\alpha$. Protože $\overline{Q} = M$, tak $\exists x_m \in Q$ tak, že $\varrho(x, x_m) < \frac{1}{k}$. Pak $\forall y \in U(x_m, \frac{1}{k})$ platí

$$\varrho(y,x) \le \underbrace{\varrho(y,x_m)}_{<\frac{1}{k}} + \underbrace{\varrho(x_m,x)}_{<\frac{1}{k}} < \frac{2}{k} \Rightarrow U(x_m, \tfrac{1}{k}) \subset U(x, \tfrac{2}{k}) \subset G_\alpha,$$

a přitom $x \in U(x_m, \frac{1}{k})$.

Tím je tvrzení 1 dokázáno.

2. Každému bodu $x \in M$ přiřadíme okolí $U(x_m, \frac{1}{k})$, které ho obsahuje a leží v nějakém G_α; označme toto okolí symbolem $U(x)$. Tedy $M \subset \bigcup_{x \in M} U(x)$. Protože každé okolí $U(x)$ je obsaženo v systému $\{U(x_m, \frac{1}{k})\}_{m,k \in \mathbb{N}}$, což je spočetný systém, je i systém $\{U(x)\}_{x \in M}$ spočetný. Lze ho tedy srovnat v posloupnost $U_1, U_2, U_3, \dots$. Tudíž

$$M \subset U_1 \cup U_2 \cup U_3 \cup \dots .$$

Ovšem každé okolí U_i, $i \in \mathbb{N}$, je obsaženo v nějaké množině G_α; označme příslušné α symbolem α_i. Tedy $M \subset G_{\alpha_1} \cup G_{\alpha_2} \cup G_{\alpha_3} \cup \dots$.

$\square$

Věta 11 (Borel). Buď (X,ϱ) metr. prostor, $M \subset X$ kompaktní. Nechť $M \subset \bigcup_{\alpha\in A} G_\alpha$, kde G_α $(\alpha \in A)$ jsou množiny otevřené v X. Pak existuje konečná množina $A_0 \subset A$ tak, že $M \subset \bigcup_{\alpha \in A_0} G_\alpha$. *)

(Tzn., že z každého otevřeného pokrytí kompaktní množiny lze vybrat konečné pokrytí.)

Poznámka. Lze dokonce dokázat, že množina M v metr. prostoru je kompaktní právě tehdy, když z každého otevřeného pokrytí množiny M lze vybrat pokrytí konečné.

Důkaz Věty 11. M je kompaktní $\Rightarrow$ tot. omezená $\Rightarrow$ separabilní $\Rightarrow$ $\exists$ spočetná množina $B \subset A$ tak, že $M \subset \bigcup_{\alpha\in B} G_\alpha$.

dle Věty 10

1. Je-li B konečná, je důkaz hotov.
2. Je-li B nekonečná, seřadíme množiny G_α, $\alpha \in B$, v posloupnost $H_1, H_2, \dots$. Tedy

$$(*) \qquad M \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} H_i .$$

Položme

$$\underbrace{K_n := H_1 \cup H_2 \cup \dots \cup H_n}_{\text{otevřená v } X}, \quad L_n = M \setminus K_n = \underset{\text{uzavřená v } X}{M} \cap \underbrace{(X \setminus K_n)}_{\text{uzavřená v } X}$$

Tedy L_n, $n \in \mathbb{N}$, jsou uzavřené v X a platí $L_n \subset \underset{\text{kompaktní}}{M}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ L_n je kompaktní $\forall n \in \mathbb{N}$. Navíc $L_n \supset L_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ a platí

dle Lemmatu 2

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} L_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} (M \setminus K_n) = M \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = M \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} H_i \overset{\text{dle } (*)}{=} \emptyset .$$

---

*) Speciálním případem této věty je Věta 45 (Borel), 11. přednáška MA 1:
Věta 45 (Borel). Nechť $I = \langle a,b \rangle \subset \mathbb{R}$ je (omezený, uzavřený) interval a $\{I_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ je systém otevřených intervalů, který pokrývá $\langle a,b\rangle$. Pak existuje konečná množina $\Delta \subset \Gamma$ tak, že $I \subset \bigcup_{\gamma\in\Delta} I_\gamma$.

Tedy dle Věty 8 (Cantor) neplatí $L_n \neq \emptyset \ \forall n \in \mathbb{N}$. Proto ex. $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $L_{n_0} = \emptyset$

$\Leftrightarrow \quad M \setminus K_{n_0} = \emptyset$

$\Rightarrow \quad M \subset \bigcup_{i=1}^{n_0} M_i$. $\square$

Uvedeme příklady množin, které jsou omezené, ale nejsou totálně omezené.

Př. 1. Buď $B(\langle 0,1\rangle)$ množina všech omezených reálných fcí definovaných na $\langle 0,1\rangle$. Při obvyklé definici součtu dvou fcí a násobku fce reálným číslem je $B(\langle 0,1\rangle)$ lineární prostor, ve kterém lze zavést normu předpisem $\|x\| := \sup_{t\in\langle 0,1\rangle} |x(t)|$.

Vlastnosti normy se snadno ověří. Ověřme např. trojúhelníkovou nerovnost: $\forall x,y \in B(\langle 0,1\rangle)$ a $\forall t \in \langle 0,1\rangle$ platí

$$|(x+y)(t)| = |x(t)+y(t)| \le |x(t)|+|y(t)| \le \|x\|+\|y\|$$

$$\Rightarrow \quad \|x+y\| = \sup_{t\in\langle 0,1\rangle} |(x+y)(t)| \le \|x\|+\|y\|.$$

Pro $\tau \in \langle 0,1\rangle$ definujme fci $x_\tau \in B(\langle 0,1\rangle)$ předpisem

$$x_\tau(t) = \begin{cases} 0, & t\in\langle 0,1\rangle,\ t\neq\tau \\ 1, & t\in\langle 0,1\rangle,\ t=\tau. \end{cases}$$

Nechť $M := \{x_\tau \in B(\langle 0,1\rangle);\ \tau\in\langle 0,1\rangle\}$. Pak M je omezená v $B(\langle 0,1\rangle)$, neboť $\forall \tau\in\langle 0,1\rangle$ platí $\|x_\tau\| = 1$. Množina M je nespočetná (neboť v M je tolik funkcí, kolik je bodů $\tau\in\langle 0,1\rangle$). Je-li ϱ metrika indukovaná normou $\|\cdot\|$, pak $\forall \tau_1,\tau_2\in\langle 0,1\rangle$, $\tau_1\neq\tau_2$, platí

$$\varrho(x_{\tau_1},x_{\tau_2}) = \|x_{\tau_1}-x_{\tau_2}\| = \sup_{t\in\langle 0,1\rangle} |x_{\tau_1}(t)-x_{\tau_2}(t)| = 1.$$

Odtud plyne, že M není totálně omezená (neboť obsahuje nekonečně mnoho prvků, z nichž každý má od ostatních vzdálenost 1; tedy např. neexistuje konečná $\frac{1}{2}$-síť množiny M). *)

2. Obdobně nahlédneme, že diskrétní metr. prostor je omezený, ale není totálně omezený, pokud tento prostor obsahuje nekonečně mnoho prvků.

---

*) Lze snadno nahlédnout, že metrický prostor (M,ϱ) není ani separabilní.

Opakování: V 22. přednášce MA 2 jsme zavedli následující definici:

Definice. Nechť (X,ϱ), (Y,σ) jsou metr. prostory, f zobrazení z X do Y, $M \subset X$ a $a \in X$.

- Řekneme, že f je spojité v bodě a vzhledem k množině M, jestliže $a \in M$ a platí
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in M:\ \varrho(x,a) < \delta \Rightarrow \sigma(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$
$$\left(\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0:\ f(M \cap U(a,\delta)) \subset U(f(a),\varepsilon)\right)$$
- Řekneme, že f je spojité v bodě a, je-li spojité v bodě a vzhledem k X.
- Řekneme, že f je spojité na množině M, je-li spojité v každém bodě $a \in M$ vzhledem k M.
- Řekneme, že f je spojité, je-li spojité na X.

Věta 12 (charakterizace spojitosti). Nechť (X,ϱ) a (Y,σ) jsou metr. prostory, $f: X \to Y$ zobrazení definované na X. PNTJE:

(i) f je spojité na X;

(ii) $\forall$ otevřenou množinu G v prostoru (Y,σ) je množina $f_{-1}(G)$ otevřená v prostoru (X,ϱ);

(iii) $\forall$ uzavřenou množinu F v prostoru (Y,σ) je množina $f_{-1}(F)$ uzavřená v prostoru (X,ϱ).

Důkaz. (i) $\Rightarrow$ (ii): Nechť G je ot. v (Y,σ) a $x \in f_{-1}(G)$. Pak $f(x) \in G$, G je ot., a tedy
$$\exists \varepsilon > 0:\ U_\sigma(f(x),\varepsilon) \subset G.$$
Protože f je spojité, tak
$$\exists \delta > 0:\ f(U_\varrho(x,\delta)) \subset U_\sigma(f(x),\varepsilon)$$
$$\Rightarrow\ U_\varrho(x,\delta) \subset f_{-1}(U_\sigma(f(x),\varepsilon)) \subset f_{-1}(G).$$
Tedy $f_{-1}(G)$ je otevřená (neb s každým bodem $x \in G$ obsahuje okolí $U_\varrho(x,\delta)$ bodu x).

(ii) $\Rightarrow$ (i): Nechť $a \in X$ a $\varepsilon > 0$. Množina $f_{-1}(U_\sigma(f(a),\varepsilon))$ obsahuje bod a a je podle (ii) otevřená.
$$\Rightarrow\ \exists\ U_\varrho(a,\delta) \text{ tak, že } U_\varrho(a,\delta) \subset f_{-1}(U_\sigma(f(a),\varepsilon))$$
$$\Leftrightarrow\ f(U_\varrho(a,\delta)) \subset U_\sigma(f(a),\varepsilon) \Leftrightarrow f \text{ je spojité v bodě } a.$$

Protože $a \in X$ je libovolný bod, platí (i).

(ii) ⇒ (iii): Buď F uzavřená v (Y,σ). Pak $G := Y \setminus F$ je otevřená v (Y,σ) a dle (ii) je

$$f_{-1}(G) = \underbrace{f_{-1}(Y\setminus F)}_{=\underbrace{f_{-1}(Y)}_{= X \text{ neb } D(f)=X} \setminus f_{-1}(F) = X \setminus f_{-1}(F)} \text{ otevřená množina v } (X,\rho)$$

tj. $X \setminus f_{-1}(F) = f_{-1}(Y\setminus F)$

⇒ $f_{-1}(F) = X \setminus \underbrace{f_{-1}(Y\setminus F)}_{\text{víme, že to je otevřená množina}}$ je uzavřená množina.

↑ přechodem k doplňkům

(iii) ⇒ (ii): Buď G otevřená množina v (Y,σ). Pak $Y\setminus G$ je uzavřená v (Y,σ). Tedy dle (iii) je množina $f_{-1}(Y\setminus G)$ uzavřená v (X,ρ).

$$\underbrace{f_{-1}(Y\setminus G)}_{=\underbrace{f_{-1}(Y)}_{= X,\text{ neb } D(f)=X} \setminus f_{-1}(G) = X \setminus f_{-1}(G)}$$

tj. $X \setminus f_{-1}(G) = f_{-1}(Y\setminus G)$ je uzavřená mn. v (X,ρ).

⇒ $f_{-1}(G)$ je množina otevřená v (X,ρ). □

Definice Nechť (X,ρ), (Y,σ) jsou metr. prostory, $M \subset X$. Řekneme, že zobrazení f z (X,ρ) do (Y,σ) je stejnoměrně spojité v M, jestliže

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in M \ \forall y \in M: \ \rho(x,y) < \delta \Rightarrow \sigma(f(x),f(y)) < \varepsilon.$$

(Tedy při daném f, M, ρ, σ číslo δ závisí jen na ε.)

Věta 13 (o spojitém zobrazení kompaktního prostoru). Nechť (X,ρ), (Y,σ) jsou metr. prostory, (X,ρ) je kompaktní a $f: X \to Y$ spojité zobrazení. Pak platí:

(i) $f(X)$ je kompaktní množina;

(ii) f je stejnoměrně spojité v X;

(iii) Je-li f bijekce, je f^{-1} spojité. (Tzn., že f je homeomorfismus.)

Důkaz. ad (i): Nechť $y_n \in f(X)$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Pak $y_n = f(x_n)$, kde $x_n \in X$, $n \in \mathbb{N}$. Protože (X,ρ) je kompaktní, tak ex. $\{x_{n_k}\}_k$ vybraná z posl. $\{x_n\}$ tak, že $x_{n_k} \to x \in X$. Zobrazení f je spojité, tedy $\underbrace{f(x_{n_k})}_{=y_{n_k}} \to f(x) \in f(X)$. Tedy z libovolné posl. $\{y_n\}$ prvků množiny $f(X)$ jsme vybrali podposloupnost $\{y_{n_k}\}$, která v X konverguje. $\Rightarrow f(X)$ je kompaktní.

ad (ii): Předp., že f není stejnoměrně spojité. Pak

$\exists \varepsilon > 0 \ \forall \delta > 0$ neplatí $\forall x, y \in X, \varrho(x,y) < \delta \Rightarrow \sigma(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Tedy platí (volíme $\delta = \frac{1}{k}, k \in \mathbb{N}$)

$$\forall k \in \mathbb{N} \ \exists x_k, y_k \in X: \varrho(x_k, y_k) < \tfrac{1}{k} \wedge \sigma(f(x_k), f(y_k)) \geq \varepsilon.$$

Protože (X, ϱ) je kompaktní, tak ex. vybraná posl. $\{x_{n_k}\}$ splňující $x_{n_k} \to x \in X$. Pak také $y_{n_k} \to x$, neboť

$$\varrho(y_{n_k}, x) \leq \underbrace{\varrho(y_{n_k}, x_{n_k})}_{< \frac{1}{n_k} \leq \frac{1}{k} \to 0} + \underbrace{\varrho(x_{n_k}, x)}_{\to 0} \to 0.$$

Zobrazení f je spojité, tedy $f(x_{n_k}) \to f(x) \wedge f(y_{n_k}) \to f(x)$.

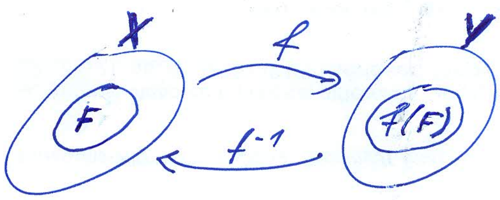
Proto

$$\sigma(f(x_{n_k}), f(y_{n_k})) \leq \sigma(f(x_{n_k}), f(x)) + \sigma(f(x), f(y_{n_k})) \to 0,$$

což je spor, neboť $\forall k \in \mathbb{N}$ platí $\sigma(f(x_{n_k}), f(y_{n_k})) \geq \varepsilon > 0$.

Tedy f je stejnoměrně spojité.

ad (iii): Buď f bijekce. Chceme dokázat, že f^{-1} je spojité. Stačí tedy dokázat, že $\forall$ uzavřenou množinu $F \subset X$ je $(f^{-1})_{-1}(F) = f(F)$ množina uzavřená v Y (cf. Věta 12)



Je-li F uzavřená v (X, ϱ), pak dle Lemmatu 2 je F kompaktní a dle (i) je $f(F)$ kompaktní, a tedy uzavřená. □

Definice: Nechť (X, ϱ) je metrický prostor, $M \subset X$, $x \in M$ a $f: X \to \mathbb{R}$ je funkce splňující $M \subset D(f)$.

(i) Řekneme, že f nabývá v bodě x maxima (resp. minima), jestliže $\forall y \in M: f(y) \leq f(x)$ (resp. $y \in M: f(y) \geq f(x)$).

Bod x nazýváme pak bodem maxima (resp. bodem minima) fce f na množině M.

(ii) Řekneme, že f nabývá v bodě x **lokálního maxima** (resp. **lokálního minima**) **vzhledem k M**, jestliže

$$\exists \delta > 0 \ \forall y \in M \cap U(x,\delta) : f(y) \leq f(x)$$

(resp. $\exists \delta > 0 \ \forall y \in M \cap U(x,\delta) : f(y) \geq f(x)$).

Bod x nazýváme pak **bodem lokálního maxima** (resp. **bodem lokálního minima**) fce f na množině M.

(iii) Řekneme, že f nabývá v bodě x **ostrého lokálního maxima** (resp. **ostrého lokálního minima**) **vzhledem k M**, jestliže

$$\exists \delta > 0 \quad \forall y \in M \cap P(x,\delta) : f(y) < f(x)$$

(resp. $\exists \delta > 0 \ \forall y \in M \cap P(x,\delta) : f(y) > f(x)$).

Bod x pak nazýváme **bodem ostrého lokálního maxima** (resp. **bodem ostrého lokálního minima**) fce f na množině M.

Věta 14 (**o nabývání maxima a minima**). Buď (X,ϱ) **neprázdný kompaktní prostor** a $f : (X,\varrho) \to (\mathbb{R},\sigma)$ (kde $\sigma(x,y) := |x-y| \ \forall x,y \in \mathbb{R}$) **spojité** zobrazení. Pak f nabývá na X svého maxima a minima.

Důkaz. Dle Věty 13 je $f(X)$ kompaktní množina reálných čísel. Tedy je to omezená a uzavřená množina (která je navíc neprázdná). Buď $\alpha := \sup f(X)$. Pak ex. $\{x_n\}$ tak, že $\underbrace{f(x_n)}_{\in f(X)} \to \alpha$. Protože $f(X)$ je uzavřená množina, platí $\alpha \in f(X)$. Tedy ex. $x \in X$ tak, že $\alpha = f(x)$, což znamená, že $\alpha = \max f(X)$.

Důkaz, že f nabývá na X minima je analogický. $\square$

4. přednáška MA 3, šk. r. 2016/17, 12.10.2016

Definice. Nechť $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^n$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Parciální derivaci fce $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ podle j-té proměnné v bodě a značíme symbolem $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$ (je-li $i \neq j$) a symbolem $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a)$, je-li $i = j$. Analogicky značíme parciální derivace vyšších řádů.

Věta 15 (záměnnost parciálních derivací). Nechť $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^n$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Jestliže fce $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ a $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ mají totální diferenciál v bodě a, pak

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a).$$

Důkaz. **I.** Předpokládejme nejprve, že $n = 2$. Buď $a = [a_1, a_2] \in \mathbb{R}^2$. Protože fce $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ a $\frac{\partial f}{\partial x_2}$ mají tot. diferenciál v bodě a, existuje $\delta > 0$ tak, že

$$U_\infty(a, \delta) \subset D\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) \cap D\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right).$$

Pro $h \in (0, \delta)$ položme

$$(1) \quad F(h) := \frac{1}{h^2}\big(f(a_1+h, a_2+h) - f(a_1+h, a_2) - f(a_1, a_2+h) + f(a_1, a_2)\big).$$

Zvolme $h \in (0, \delta)$ pevně a položme

$$\varphi(x_1) := f(x_1, a_2+h) - f(x_1, a_2) \quad \forall x_1 \in [a_1, a_1+\delta).$$

Pak platí

$$(2) \quad F(h) = \frac{1}{h^2}\big(\varphi(a_1+h) - \varphi(a_1)\big) \underset{\text{Lagrangeova věta}}{=} \frac{1}{h}\varphi'(a_1 + \theta_1 h)$$

$$= \frac{1}{h}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1+\theta_1 h, a_2+h) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1+\theta_1 h, a_2)\right), \text{ kde } 0 < \theta_1 < 1 \quad (\theta_1 = \theta_1(h)).$$

Protože fce $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ má v bodě a tot. diferenciál, platí

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1+\theta_1 h, a_2+h) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a)\theta_1 h + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) h + o(h) \quad \text{pro } h \to 0_+,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1+\theta_1 h, a_2) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a)\theta_1 h + o(h) \quad \text{pro } h \to 0_+. \quad *)$$

Odtud a z (2) pak plyne

$$F(h) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) + \frac{o(h)}{h} \quad \text{pro } h \to 0_+,$$

---

*) Poznamenejme, že $[a_1+\theta_1 h, a_2+h]$, $[a_1+\theta_1 h, a_2] \in U_\infty(a, \delta)$. Dále platí $h = |h| \leq \|(\theta_1 h, h)\|_2 = |h| \cdot \|(\theta_1, 1)\|_2 = h\sqrt{\theta_1^2 + 1^2} \leq h\sqrt{2}$. Tedy platí $\|(\theta_1 h, h)\|_2 \to 0 \iff h \to 0_+$. Podobně ověříme, že $\|(\theta_1 h, 0)\|_2 \to 0 \iff h \to 0_+$.

a tedy

(3) $$\lim_{h\to 0+} F(h) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a).$$

Položíme-li nyní

$$\psi(x_2) := f(a_1+h, x_2) - f(a_1, x_2) \quad \forall x_2 \in [a_2, a_2+\delta),$$

tak obdobně dostaneme

(4) $$F(h) = \frac{1}{h^2}\big(\psi(a_2+h) - \psi(a_2)\big) \overset{\text{Lagr. věta}}{=} \frac{1}{h}\psi'(a_2+\theta_2 h)$$

$$= \frac{1}{h}\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1+h, a_2+\theta_2 h) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2+\theta_2 h)\right),$$ kde $0<\theta_2<1$ $(\theta_2 = \theta_2(h))$.

Protože fce $\frac{\partial f}{\partial x_2}$ má v bodě a totální diferenciál, platí

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1+h, a_2+\theta_2 h) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a)h + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a)\theta_2 h + o(h) \text{ pro } h\to 0+,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2+\theta_2 h) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a)\theta_2 h + o(h) \text{ pro } h\to 0+.$$

Odtud a z (4) pak plyne

$$F(h) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a) + \frac{o(h)}{h} \text{ pro } h\to 0+$$

a tedy

(5) $$\lim_{h\to 0+} F(h) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a).$$

Z (3) a (5) dostáváme žádaný výsledek (tj: $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a)$).

II. Buď $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$. BÚNO: $i < j$. Pak dokázané tvrzení (s $n=2$) použijeme na fci

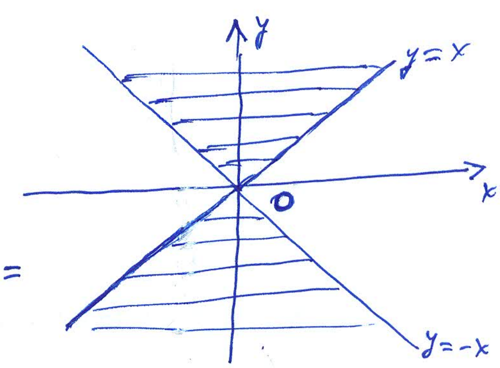
$$h(x,y) := f(a_1, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_{j-1}, y, a_{j+1}, \dots, a_n)$$

a dostaneme požadovaný výsledek. □

Obecně, je-li $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, pak $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ a $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ nemusí si být rovny, i když existují – viz následující příklad.

Př: Nechť $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je dána předpisem

$$f(x,y) = \begin{cases} xy & \text{if } |x| > |y| \\ 0 & \text{if } |x| \le |y| \text{ (šrafovaný obor v obrázku)} \end{cases}$$



Pak $$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,h) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right) =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(0-0) = 0,$$

neboť

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,h) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,h)-f(0,h)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0-0}{t} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t\cdot 0-0}{t} = 0.$$

Dále

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(h,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(h-0) = 1,$$

neboť

$$\frac{\partial f}{\partial y}(h,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(h,t)-f(h,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{ht-h\cdot 0}{t} = h,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0-0}{t} = 0.$$

Definice. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je ot. množina a $k \in \mathbb{N}$.

(i) Řekneme, že fce $f: \Omega \to \mathbb{R}$ je třídy C^k (na Ω), pokud všechny parciální derivace fce f až do řádu k včetně jsou spojité na Ω. Množinu všech fcí $f: \Omega \to \mathbb{R}$ třídy C^k (na Ω) značíme symbolem $C^k(\Omega)$.

Dále klademe $C^0(\Omega) := C(\Omega)$ (kde $C(\Omega)$ je množina všech funkcí $f: \Omega \to \mathbb{R}$ spojitých na Ω) a $C^\infty(\Omega) := \bigcap_{k\in\mathbb{N}} C^k(\Omega)$.

(ii) Řekneme, že zobrazení $f: \Omega \to \mathbb{R}^m$ je třídy C^k (na Ω) jestliže jeho složky $f_1, \dots, f_m$ jsou třídy C^k (na Ω).

Věta 16 (záměnnost parc. derivací podruhé). Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otevřená množina, $a \in \Omega$, $k \in \mathbb{N}$ a $f \in C^k(\Omega)$.*) Nechť $\pi: \{1,\dots,k\} \to \{1,\dots,k\}$ je permutace a $i_1, \dots, i_k \in \{1,\dots,n\}$. Pak

$$(*) \qquad \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}(a) = \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_{\pi(1)}} \dots \partial x_{i_{\pi(k)}}}(a).$$

Důkaz. 1. Je-li $k=1$, pak tvrzení platí triviálně.

2. Je-li $k=2$, pak tvrzení platí dle Věty 15.

3. Buď $k \in \mathbb{N}$, $k > 2$. Pak tvrzení stačí dokázat pro permutaci, která je „sousední transpozicí" (neboť každá permutace je složením permutací tohoto typu). BÚNO lze

*) Tedy $f: \Omega \to \mathbb{R}$.

předpokládat, že se jedná o transpozici na posledních dvou místech tj., že π má tvar

$$(1) \qquad \pi(l) = \begin{cases} k & \text{if } l = k-1 \\ k-1 & \text{if } l = k \\ l & \text{if } l \in \{1, \dots, k-2\}. \end{cases} \quad *)$$

Funkce $g := \dfrac{\partial^{k-2} f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_{k-2}}}$ je třídy C^2 na Ω.

Tedy dle Věty 15 platí:

$$(2) \qquad \frac{\partial^2 g}{\partial x_{i_{k-1}} \partial x_{i_k}}(a) \underset{\text{Věta 15}}{=} \frac{\partial^2 g}{\partial x_{i_k} \partial x_{i_{k-1}}}(a) \overset{(1)}{=} \frac{\partial^2 g}{\partial x_{i_{\pi(k-1)}} \partial x_{i_{\pi(k)}}}(a),$$

Proto

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_{k-2}} \partial x_{i_{k-1}} \partial x_{i_k}}(a) \overset{(2)}{=} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_{k-2}} \partial x_{i_{\pi(k-1)}} \partial x_{i_{\pi(k)}}}(a)$$

$$\overset{(1)}{=} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_{\pi(1)}} \dots \partial x_{i_{\pi(k-2)}} \partial x_{i_{\pi(k-1)}} \partial x_{i_{\pi(k)}}}(a),$$

což dává (*) pro danou permutaci π. $\square$

---

*) Kdyby se jednalo o transpozici na místech $m-1$ a m, kde $m < k$, dokázali bychom, že $\dfrac{\partial^m f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_m}}(a) = \dfrac{\partial^m f}{\partial x_{i_{\pi(1)}} \dots \partial x_{i_{\pi(m)}}}(a)$ (je totiž také $f \in C^m(\Omega)$), odkud by pak požadovaný výsledek plynul dalším derivováním podle proměnných $x_{i_{m+1}}, \dots, x_{i_k}$.

5. přednáška MA 3, šk. r. 2016/17, 17. 10. 2016

Derivace a diferenciály vyšších řádů

Úmluva: Fce $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ má derivaci (tot. diferenciál) v bodě $a\in\mathbb{R}^n \iff \exists$ lin. zobrazení $L:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ (značíme $L\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$) takové, že

(1) $$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)-L(h)}{\|h\|_{\mathbb{R}^n}}=0$$

$\iff$

$$\lim_{h\to 0}\frac{|f(a+h)-f(a)-L(h)|}{\|h\|_{\mathbb{R}^n}}=0 \quad \text{tj.} \quad \lim_{h\to 0}\frac{\|f(a+h)-f(a)-L(h)\|_{\mathbb{R}}}{\|h\|_{\mathbb{R}^n}}=0.$$

Platí $f'(a)=df(a)=L$, je-li podmínka (1) splněna.

Tedy f' je zobrazení, $\mathbb{R}^n\ni a\xmapsto{f'}L\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$.

Ve vektorovém prostoru $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ lze zavést normu předpisem

$$\|L\|:=\sup_{\|h\|=1}|L(h)|.$$

Dcv. Dokažte, že je to norma.

Lze definovat derivaci zobrazení f', tj. $(f')'=f''$:

Buď $a\in\mathbb{R}^n$. Pak $f''(a)$ ex. $\iff \exists\, L\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}))$ tak, že

(2) $$\lim_{k\to 0}\frac{\|f'(a+k)-f'(a)-L(k)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})}}{\|k\|_{\mathbb{R}^n}}=0.$$

Pokud (2) je splněno, pak položíme $f''(a)=L$.

Protože

(3) $$\|f'(a+k)-f'(a)-L(k)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})}=\sup_{\|h\|=1}|f'(a+k)(h)-f'(a)(h)-L(k)(h)|$$

a $\forall k=(k_1,\dots,k_n)\in\mathbb{R}^n\ \forall h=(h_1,\dots,h_n)\in\mathbb{R}^n$ je

$$\underbrace{L(k)(h)}_{\text{lin. v } k,\ \text{lin. v } h}=\underbrace{B(k,h)}_{\text{bilineární forma na } \mathbb{R}^n}=\sum_{i,j=1}^{n}b_{ij}k_ih_j, \quad \text{kde } b_{ij}\in\mathbb{R}\ \ \forall i,j\in\{1,\dots,n\},$$

lze definici $f''(a)$ přepsat níže uvedeným způsobem, kde symbol $\mathcal{L}_2(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ značí množinu všech bilineárních forem na prostoru $\mathbb{R}^n$:

./.

Definice Buď $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a $a \in \mathbb{R}^n$. Řekneme, že fce má druhou derivaci v bodě a (značení $f''(a)$), jestliže ex. $L \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ tak, že

$$(2^*) \quad \lim_{k \to 0} \frac{\| f'(a+k) - f'(a) - L(k,\cdot)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})}}{\|k\|_{\mathbb{R}^n}} = 0.$$

Je-li podmínka (2^*) splněna, položíme $f''(a) = L$.

Věta 17 (jednoznačnost a symetrie $f''(a)$). Nechť $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^n$ a nechť $f''(a)$ existuje. Pak:

(i) Existují parciální derivace $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$ $\forall i,j \in \{1,\dots,n\}$ a platí

$$(3) \quad f''(a)(h,k) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\, h_i k_j \quad \forall h = (h_1,\dots,h_n) \in \mathbb{R}^n, \ \forall k = (k_1,\dots,k_n) \in \mathbb{R}^n.$$

(ii) Bilineární forma $f''(a)$ je symetrická, a tedy

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) \quad \forall i,j \in \{1,\dots,n\}.$$

Důkaz. Víme, že $f''(a)$ ex. $\Rightarrow$ 1) f' ex. na $U(a)$,
2) $\exists L \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$,

$$(4) \quad L(h,k) = L\Big(\sum_{i=1}^n h_i e^i, \sum_{j=1}^n k_j e^j\Big) = \sum_{i,j=1}^n h_i k_j \underbrace{L(e^i, e^j)}_{b_{ij} \in \mathbb{R}} = \sum_{i,j=1}^n h_i k_j b_{ij},$$

tak, že $f''(a)(h,k) = L(h,k)$ $\forall h = (h_1,\dots,h_n) \in \mathbb{R}^n$
$\forall k = (k_1,\dots,k_n) \in \mathbb{R}^n$

a přitom

$$(5) \quad \|f'(a+k) - f'(a) - L(k,\cdot)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})} = o(\|k\|) \text{ pro } k \to 0.$$

Dále platí

$$LHS(5) = \sup_{\|h\|=1} |f'(a+k)(h) - f'(a)(h) - L(k,h)| \geq$$

$$\geq |f'(a+k)(e^i) - f'(a)(e^i) - L(k,e^i)| \underset{\text{neb } f'(x)(h) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) h_i}{=}$$

volím $h = e^i = (0,\dots,0,\underset{i\text{-tá pozice}}{1},0,\dots,0)$

$$= \Big|\frac{\partial f}{\partial x_i}(a+k) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) - L(k,e^i)\Big|.$$

Odtud a z (5) máme

(6) $$\lim_{k\to 0} \frac{\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(a+k) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) - L(k,e^i)\right|}{\|k\|} = 0$$

$\Rightarrow$ fce $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $i=1,\dots,n$, mají v bodě a totální diferenciál

$\Rightarrow$ (dle Věty 15)

(7) $$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) \quad \forall i,j \in \{1,\dots,n\}.$$

Z (6) pro $k := te^j = (0,\dots,0,\underset{\uparrow j\text{-tá pozice}}{t},0,\dots,0)$, $t \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, dostaneme

$$\lim_{t\to 0} \frac{\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1,\dots,a_{j-1},a_j+t,a_{j+1},\dots,a_n) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) - \overbrace{L(te^j,e^i)}^{= t\,L(e^j,e^i)}\right|}{|t|} = 0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{t\to 0}\left(\frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1,\dots,a_{j-1},a_j+t,a_{j+1},\dots,a_n) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)}{t} - L(e^j,e^i)\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \underbrace{L(e^j,e^i)}_{= b_{ji}\ \text{dle (4)}}. \quad \text{Tedy}$$

(8) $$b_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) \underset{\uparrow \text{dle (7)}}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a).$$

Odtud a z (4) plyne (3). Symetrie plyne z (8) a (7). $\square$

Definice. Nechť $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^n$ a nechť $f''(a)$ existuje. Matici

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a), & \dots, & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) \\ \vdots & & \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(a), & \dots, & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(a) \end{pmatrix}$$

reprezentující bilineární formu $f''(a)$ nazýváme Hessovou maticí.

(Tedy $\forall h=(h_1,\dots,h_n)\in\mathbb{R}^n$, $\forall k=(k_1,\dots,k_n)\in\mathbb{R}^n$ platí

$$f''(a)(h,k) = (h_1,\dots,h_n)\, H \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}.\ )$$

Definice. Nechť $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^n$ a nechť $f''(a)$ existuje. Druhým diferenciálem $d^2 f(a)$ fce f v bodě a rozumíme kvadratickou formu $h \longmapsto f''(a)(h,h)$, tj. kvadratickou formu danou předpisem

$$d^2 f(a)(h) := \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\, h_i h_j \quad \forall h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Lemma 18 (postačující podmínka pro $f \in C(\Omega)$). Nechť fce $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ má omezené parc. derivace 1. řádu v ot. množině $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Pak $f \in C(\Omega)$.

Důkaz. Buď $a \in \Omega$. Pak ex. $U_\infty(a) \subset \Omega$. Podle Věty 71 (o přírůstku fce), MA 2, 25. přednáška, platí: Je-li $b \in U_\infty(a)$, pak ex. body $\xi^1, \dots, \xi^n \in U_\infty(a)$ tak, že

$$f(b) - f(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\xi^i)(b_i - a_i).$$

$$\Rightarrow \quad |f(b) - f(a)| \leq \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(\xi^i)\right|}_{\leq K \text{ dle předp.}} |b_i - a_i| \leq K \|b-a\|_1 \to 0 \text{ pro } b \to a.$$

Tedy f je spojitá v bodě a. Protože bod $a \in \Omega$ byl libovolný, platí $f \in C(\Omega)$. $\square$

Důsledek 19. Nechť $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{N}$. Nechť f má v bodě a spojité všechny parc. derivace k-tého řádu. Pak všechny parc. derivace fce f řádu $0, \dots, k-1$ jsou spojité v jistém okolí bodu a.

Důkaz. Derivace k-tého řádu jsou omezené v jistém $U(a)$, tj. derivace řádu $k-1$ (mající omezené parc. derivace 1. řádu) jsou spojité v $U(a)$ (dle Lemmatu 18). Odtud obdobně plyne spojitost parc. derivací řádu $k-2$, $k-3$, ... v $U(a)$. $\square$

Věta 20 (postačující podmínka pro existenci $f''(a)$). Nechť $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^n$ a nechť fce f má v bodě a spojité všechny parc. derivace 2. řádu. Pak $f''(a)$ existuje.

Důkaz. Dle Důsledku 19 (s $k=2$) má fce f spojité všechny parc. derivace 1. řádu v jistém $U(a)$. Tedy $f'(x)$ ex. pro $\forall x \in U(a)$.

Pro $k \in \mathbb{R}^n$, $\|k\| \neq 0$, odhadujme výraz

$$V := \frac{\sup\limits_{\|h\|=1} \left| f'(a+k)(h) - f'(a)(h) - \sum\limits_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) h_i k_j \right|}{\|k\|}.$$

Protože

$$f'(a+k)(h) - f'(a)(h) \underset{\uparrow}{=} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a+k) h_i - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) h_i =$$

dle definice tot. diferenciálu

$$= \varphi(1) - \varphi(0) \overset{\text{Lagrangeova věta}}{=} \varphi'(\Theta) =$$

kde $\varphi(t) := \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a+tk) h_i$ $\qquad$ $\Theta \in (0,1)$, $\Theta = \Theta(k,h)$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a+\Theta k) \cdot k_j h_i \,,$$

tak platí

$$V \le \frac{\sup\limits_{\|h\|=1} \sum\limits_{i,j=1}^{n} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a+\Theta k) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right| \cdot |k_j| \, \overbrace{|h_i|}^{\le 1}}{\|k\|} \le$$

$$\le \sum_{i,j=1}^{n} \underbrace{\left| \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a+\Theta k) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right|}_{\downarrow 0 \text{ pro } k \to 0} \overbrace{\frac{|k_j|}{\|k\|}}^{\le 1} \to 0 \text{ pro } k \to 0.$$

$\downarrow 0$ pro $k \to 0$,
neb $\|\Theta k\| \le \underbrace{|\Theta|}_{\le 1} \cdot \|k\| \le \|k\| \to 0$

Tedy $\lim\limits_{k \to 0} V = 0 \iff f''(a)$ existuje. $\square$ $\quad$ ./.

6. přednáška MA 3, šk. r. 2016/17, 19. 10. 2016

Je-li $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$, kde $n,m\in\mathbb{N}$, a $a\in\mathbb{R}^n$, pak $f''(a)$ definujeme analogicky jako v případě $m=1$. Symbolem $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ označíme množinu všech lineárních zobrazení definovaných na $\mathbb{R}^n$ s hodnotami v $\mathbb{R}^m$. Normou $L\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ rozumíme číslo $\|L\|:=\sup\{\|L(h)\|_{\mathbb{R}^m};\ \|h\|_{\mathbb{R}^n}=1\}$. Dále symbolem $\mathcal{L}_2(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ označíme množinu všech bilineárních zobrazení na $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ s hodnotami v $\mathbb{R}^m$. *)

Definice. Nechť $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ a $a\in\mathbb{R}^n$. Řekneme, že zobrazení f má druhou derivaci v bodě a (označení $f''(a)$), jestliže ex. $L\in\mathcal{L}_2(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ tak, že

$$(*)\qquad \lim_{k\to 0}\frac{\|f'(a+k)-f'(a)-L(k,\cdot)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)}}{\|k\|_{\mathbb{R}^n}}=0.$$

Je-li podmínka $(*)$ splněna, položíme $f''(a)=L$.

Nechť $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$, $f=[f_1,\dots,f_m]$, $a\in\mathbb{R}^n$ a nechť $f''(a)$ existuje a platí $f''(a)=L\in\mathcal{L}_2(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$. Tedy $L=[L_1,\dots,L_m]$, kde $L_i\in\mathcal{L}_2(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ $\forall i\in\{1,\dots,n\}$. Protože

$$\|f'(a+k)-f'(a)-L(k,\cdot)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)}$$
$$=\sup_{\|h\|=1}\|f'(a+k)(h)-f'(a)(h)-L(k,h)\|_{\mathbb{R}^m}$$

a $\forall i\in\{1,\dots,m\}$ platí

$$|f_i'(a+k)(h)-f_i'(a)(h)-L_i(k,h)|\le$$
$$\le\|f'(a+k)(h)-f'(a)(h)-L(k,h)\|_{\mathbb{R}^m}\le$$
$$\le\sum_{j=1}^m|f_j'(a+k)(h)-f_j'(a)(h)-L_j(k,h)|,$$

---

*) Tedy $L\in\mathcal{L}_2(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ je zobrazení definované na $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ s hodnotami v $\mathbb{R}^m$ takové, že $\forall k\in\mathbb{R}^n$ je $L(k,\cdot)\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ a také $\forall h\in\mathbb{R}^n$ je $L(\cdot,h)\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$.

tak $\forall i \in \{1, \dots, m\}$ máme

$$\sup_{\|h\|=1} |f_i'(a+k)(h) - f_i'(a)(h) - L_i(k,h)| \leq$$

$$\leq \sup_{\|h\|=1} \|f'(a+k)(h) - f'(a)(h) - L(k,h)\|_{\mathbb{R}^m} \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^{m} \sup_{\|h\|=1} |f_j'(a+k)(h) - f_j'(a)(h) - L_j(k,h)|,$$

tj. $\forall i \in \{1, \dots, m\}$ platí

$$\|f_i'(a+k) - f_i'(a) - L_i(k,\cdot)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})}$$

$$\leq \|f'(a+k) - f'(a) - L(k,\cdot)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)}$$

$$\leq \sum_{j=1}^{m} \|f_j'(a+k) - f_j'(a) - L_j(k,\cdot)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})}.$$

Odtud pak ihned plyne, že

$$f''(a) = L \iff f_i''(a) = L_i \quad \forall i \in \{1, \dots, m\}.$$

Tedy platí následující tvrzení.

Věta 21 (vztah mezi derivací $f''(a)$ zobrazení f a derivacemi $f_i''(a)$ jeho složek). Nechť $f = [f_1, \dots, f_m]$ je zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$, $a \in \mathbb{R}^n$ a $L = [L_1, \dots, L_m] \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Pak

$$f''(a) = L \iff f_i''(a) = L_i \quad \forall i = 1, \dots, m.$$

Nyní ukážeme, jak lze definovat derivaci řádu k, kde $k \in \mathbb{N}$. Nejprve začneme s následující definicí.

Definice. Nechť $k, m, n \in \mathbb{N}$. Zobrazení $L : (\mathbb{R}^n)^k \to \mathbb{R}^m$ se nazývá k-lineární, jestliže

$$u \longmapsto L(v^1, \dots, v^{i-1}, u, v^{i+1}, \dots, v^k)$$

je lineární zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$ $\forall i \in \{1, \dots, k\}$ a $\forall v^1, \dots, v^{i-1}, v^{i+1}, \dots, v^k \in \mathbb{R}^n$. Množinu všech k-lineárních zobrazení z $(\mathbb{R}^n)^k$ do $\mathbb{R}^m$ označíme $\mathcal{L}_k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Normu zobrazení $L \in \mathcal{L}_k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ definujeme předpisem

$$\|L\| := \sup\{\|L(u^1, \dots, u^k)\|_{\mathbb{R}^m} ;\ \|u^1\|_{\mathbb{R}^n} = \dots = \|u^k\|_{\mathbb{R}^n} = 1\}.$$

Poznámka. Je-li $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, $L \in \mathcal{L}_k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ a $h \in \mathbb{R}^n$, pak zobrazení

$$(u^2, \dots, u^k) \longmapsto L(h, u^2, \dots, u^k)$$

je prvkem množiny $\mathcal{L}_{k-1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.

Definice. Buď $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ a $a \in \mathbb{R}^n$. Jestliže existuje $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ tak, že

$$(1) \quad \lim_{h \to 0} \frac{\| f(a+h) - f(a) - L(h) \|_{\mathbb{R}^m}}{\| h \|_{\mathbb{R}^n}} = 0,$$

pak derivaci zobrazení f v bodě a (označení $f'(a)$) definujeme rovností $f'(a) = L$.

Derivace vyšších řádů definujeme induktivně takto:
Jestliže ex. $L \in \mathcal{L}_k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ tak, že

$$(2) \quad \lim_{h \to 0} \frac{\| f^{(k-1)}(a+h) - f^{(k-1)}(a) - L(h, \dots) \|_{\mathcal{L}_{k-1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)}}{\| h \|_{\mathbb{R}^n}} = 0,$$

pak k-tou derivaci zobrazení f v bodě a (označení $f^{(k)}(a)$) definujeme rovností $f^{(k)}(a) = L$.

Poznámka. Jestliže formálně položíme $f^{(0)} = f$ a $\mathcal{L}_0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) = \mathbb{R}^m$, pak (2) s $k = 1$ splývá s (1).

Lze dokázat, že pro derivace vyšších řádů platí analogie vět, které jsme dokázali pro derivace řádu 2 (důkazy jsou obdobné, navíc se použije mat. indukce):

Věta 17* (jednoznačnost a symetrie $f^{(k)}(a)$).
Nechť $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{N}$ a nechť $f^{(k)}(a)$ ex.
Pak
(i) Existují parciální derivace $\dfrac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}(a)$ $\forall i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$
a $\forall h^1, \dots, h^k \in \mathbb{R}^n$ platí

$$f^{(k)}(a)(h^1, \dots, h^k) = \sum_{i_1, \dots, i_k = 1}^{n} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}(a)\, h^1_{i_1} \dots h^k_{i_k}.$$

(ii) $f^{(k)}(a)$ je symetrické k-lineární zobrazení, a tedy

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}(a) = \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_{\pi(1)}} \dots \partial x_{i_{\pi(k)}}}(a) \quad \forall \text{ permutaci } \pi: \{1, \dots, k\} \to \{1, \dots, k\}.$$

Věta 18* (postačující podmínka pro existenci $f^{(k)}(a)$).

Nechť $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $a\in\mathbb{R}^n$, $k\in\mathbb{N}$ a nechť fce f má v bodě a spojité všechny parc. derivace řádu k. Pak $f^{(k)}(a)$ existuje.

Definice. Nechť $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $a\in\mathbb{R}^n$, $k\in\mathbb{N}$ a $f^{(k)}(a)$ existuje. Pak **k-tý (totální) diferenciál $d^k f(a)$** fce f v bodě a je definován předpisem $h\to f^{(k)}(a)(\underbrace{h,\dots,h}_{k\text{-krát}})$ $\forall h\in\mathbb{R}^n$,

tj.

$$d^k_h f(a) := \sum_{i_1,\dots,i_k=1}^{n} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}\dots\partial x_{i_k}}(a)\, h_{i_1}\dots h_{i_k}$$

$\forall h=(h_1,\dots,h_n)\in\mathbb{R}^n$.

Věta 21* (vztah mezi derivací $f^{(k)}(a)$ zobrazení f a derivacemi $f_i^{(k)}(a)$ jeho složek).

Nechť $f=[f_1,\dots,f_m]$ je zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$, $a\in\mathbb{R}^n$, $k\in\mathbb{N}$ a $L=[L_1,\dots,L_m]\in\mathcal{L}_k(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$. Pak

$$f^{(k)}(a)=L \iff f_i^{(k)}(a)=L_i \quad \forall i=1,\dots,m.$$

Věta 22 (záměnnost parc. derivací potřetí). Nechť $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $a\in\mathbb{R}^n$, $k\in\mathbb{N}$ a nechť všechny parc. derivace k-tého řádu fce f jsou spojité v bodě a. Pak všechny parc. derivace fce f až do řádu k jsou záměnné v bodě a. *)

Důkaz. Dle Věty 18* $f^{(k)}(a)$ ex. Tedy podle Věty 17* jsou parc. derivace fce f řádu k záměnné v bodě a.

Dále dle Důsledku 19 jsou parc. derivace fce f řádů $1,\dots,k-1$ spojité v jistém $U(a)$. Tedy podle Věty 18* derivace $f^{(j)}(x)$, $j=1,\dots,k-1$, existují $\forall x\in U(a)$. Z Věty 17* pak plyne záměnnost parc. derivací fce f řádů $1,\dots,k-1$ v $U(a)$. □

---

*) Parc. derivace až do řádu $k-1$ fce f jsou záměnné dokonce v jistém okolí bodu a – viz důkaz Věty 22.
Poznamenejme též, že Věta 16 je důsledkem Věty 22.

Věta 23 (složené zobrazení a třída C^k). Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ a $G \subset \mathbb{R}^m$ jsou otevřené množiny. Nechť $f: \Omega \to \mathbb{R}^m$ a $g: G \to \mathbb{R}^s$ jsou zobrazení třídy C^k (kde $k \in \mathbb{N}$) a nechť $f(\Omega) \subset G$. Pak zobrazení $g \circ f$ je třídy C^k (na Ω).

Důkaz. Buď $h = (h_1, \ldots, h_s) := g \circ f$. Pak $D(h) = \Omega$. Důkaz provedeme mat. indukcí.

1. Je-li $k=1$, pak z Věty 72 (postačující podmínka pro ex. tot. diferenciálu), MA 2, 25. přednáška, máme, že derivace $f'(x)$ a $g'(f(x))$ existují $\forall x \in \Omega$ (neb $f \in C^1(\Omega)$ a $g \in C^1(G)$ a $f(\Omega) \subset G$). Dále, podle Věty 77 (řetízkové pravidlo), MA 2, 26. přednáška, pak $\forall x \in \Omega$, $\forall l \in \{1, \ldots, s\}$, $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$ platí

$$(*) \quad \frac{\partial h_l}{\partial x_i}(x) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial g_l}{\partial y_j}(f(x)) \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x).$$

Funkce $x \longmapsto \frac{\partial g_l}{\partial y_j}(f(x))$ a $x \longmapsto \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x)$ jsou spojité na Ω, a proto dle $(*)$ je fce $\frac{\partial h_l}{\partial x_i}$ spojitá na Ω. Odtud plyne, že zobrazení $h = g \circ f$ je třídy C^1 na Ω.

2. Buď nyní $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$, a předpokládejme, že věta platí nahradíme-li v ní číslo k číslem $k-1$. Dokažme pak platnost věty (s daným $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$).

Nechť $l \in \{1, \ldots, s\}$, $i \in \{1, \ldots, n\}$ a $j \in \{1, \ldots, m\}$. Fce $x \mapsto \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x)$ je třídy C^{k-1} na Ω. Dále, dle indukčního předpokladu, je fce $x \longmapsto \frac{\partial g_l}{\partial y_j}(f(x))$ třídy C^{k-1} na Ω (neb $y \mapsto \frac{\partial g_l}{\partial y_j}(y)$ je třídy C^{k-1} na G a $f \in C^k(\Omega) \subset C^{k-1}(\Omega)$). Protože množina $C^{k-1}(\Omega)$ s každými dvěma prvky obsahuje i jejich součet a násobek, plyne z $(*)$, že i fce $x \longmapsto \frac{\partial h_l}{\partial x_i}(x)$ je třídy C^{k-1} na Ω. Odtud plyne, že $h \in C^k(\Omega)$. $\square$

Věta 24 (o přírůstku fce podruhé). Buď $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fce, která má v každém bodě ot. množiny $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ tot. diferenciál. Nechť $a, b \in \Omega$ a nechť úsečka $\overline{ab} := \{ta + (1-t)b;\ t \in [0,1]\}$ leží v Ω. Pak ex. $\xi \in \overline{ab}$ tak, že

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a).$$

Důkaz. Buď $\varphi(t) := f((1-t)a + tb)$, $t \in [0,1]$.

Pak

$$f(b) - f(a) = \varphi(1) - \varphi(0) \overset{\text{Lagr. věta}}{=} \varphi'(\Theta) =$$

$$\Theta = \Theta(a,b) \in (0,1)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\big(\underbrace{(1-\Theta)a + \Theta b}_{=:\, \xi \in \overline{ab}}\big)(b_i - a_i) = \underline{f'(\xi)(b-a)}. \quad \square$$

hodnota derivace $f'(\xi)$ v $(b-a)$

Poznámka. Je jasné, že $\xi \to a$, jestliže $b \to a$. *)

Definice. Množina $M \subset \mathbb{R}^n$ se nazývá konvexní, jestliže platí: $a, b \in M \Rightarrow \overline{a,b} := \{ta + (1-t)b;\ t \in [0,1]\} \subset M$.

Poznámka. Pro zobrazení $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ analogie Věty 24 nemusí platit – viz následující příklad.

Př. Buď $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $f(x) := (\sin x, \cos x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

Pak $f'(x) = (\cos x, -\sin x) \neq (0,0)$ $\forall x \in \mathbb{R}$ $\left(\text{neboť } \|f'(x)\|_{\mathbb{R}^2} = 1\ \forall x \in \mathbb{R}\right)$,

$$f(2\pi) - f(0) = (0,1) - (0,1) = (0,0)$$

a $f'(x)(2\pi - 0) = f'(x) \cdot 2\pi = 2\pi(\cos x, -\sin x) \neq (0,0)$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

---

*) neboť $\|\xi - a\| = \|(1-\Theta)a + \Theta b - a\| = \|\Theta(b-a)\| = \underbrace{|\Theta|}_{\leq 1} \cdot \|b-a\| \leq \|b-a\| \to 0$ pro $b \to a$.

Implicitní fce

Objasnění problému: $n=2$, $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $F=F(x,y)$,

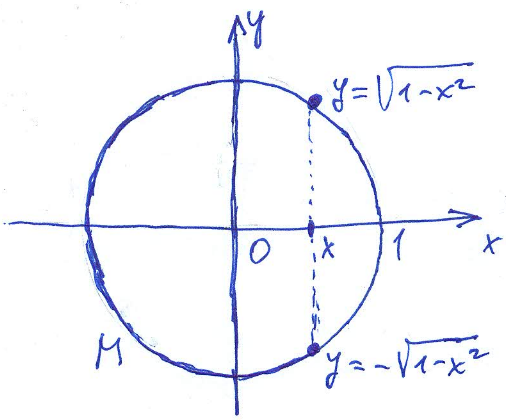
$M=\{[x,y]\in\mathbb{R}^2;\ F(x,y)=0\}$.

Jednoduchý případ:

Je-li $F(x,y)=x-f(y)$, pak $M=\{[x,y];\ y=f(x)\}$, tj: M je grafem fce f ($M=G(f)$).

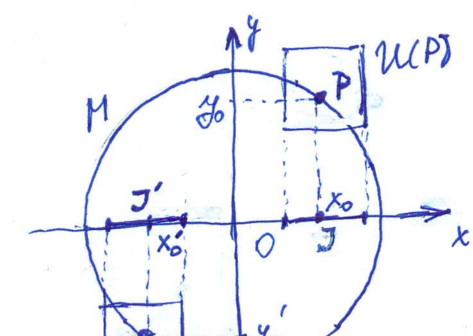
„**Složitější případ**": $F(x,y)=x^2+y^2-1$

$F(x,y)=0 \iff x^2+y^2=1$ $\Rightarrow$ M je jednotková kružnice se středem v počátku

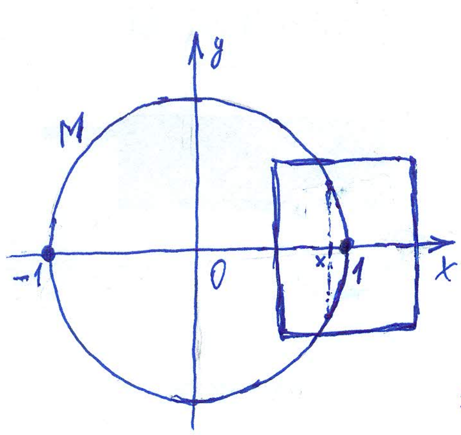


$\Rightarrow$ M není grafem fce, neboť bodu $x\in(-1,1)$ přísluší dvě hodnoty $y=\pm\sqrt{1-x^2}$ a ne jedna.

Zkusíme, zda problém lze řešit alespoň lokálně. Vezmu bod $P=[x_0,y_0]\in M$ a ptáme se zda $\exists\, U(P)$ tak, aby $U(P)\cap M$ byla grafem fce.



To je možné, když bod $P\in$ horní polokružnice, kde $M\cap U(P)$ je grafem fce $y=\sqrt{1-x^2}$ s def. oborem J. Podobně pro bod P' na dolní polokružnici dostáváme, že $U(P')\cap M$ je grafem fce $y=-\sqrt{1-x^2}$ s def. oborem J'.



Je-li však $P=[1,0]$ nebo $P=[-1,0]$, pak problém nemá řešení, neboť jednomu x by mohly příslušet 2 hodnoty y ($y=\sqrt{1-x^2}$ nebo $y=-\sqrt{1-x^2}$) takové, že $[x,y]\in U(P)\cap M$ (a to ať je okolí $U(P)$ sebemenší).

Všimněme si, že v bodech P, kde nastává problém je $\frac{\partial F}{\partial y}(P)=0$ $\left(\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)=2y\right)$.
Body množiny M, kde $\frac{\partial F}{\partial y}=0$ mohou působit potíže.

Věta 25 (o implicitní fci). Buď $k \in \mathbb{N}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ot. množina, $F: \Omega \to \mathbb{R}$, $F = F(x_1, \dots, x_n, y) = F(x, y)$, kde $x = [x_1, \dots, x_n]$. Nechť $[a, b] = [a_1, \dots, a_n, b] \in \Omega$ a nechť platí

(1) $F(a,b) = 0$, (2) $F \in C^k(\Omega)$, (3) $\frac{\partial F}{\partial y}(a,b) \neq 0$.

Pak $\exists\, \delta, \delta_1 > 0$ tak, že platí:

(i) $\forall x \in U(a,\delta)\ \exists!\ y \in \underbrace{(b-\delta_1, b+\delta_1)}_{=U(b,\delta_1)} : F(x,y) = 0$ *)

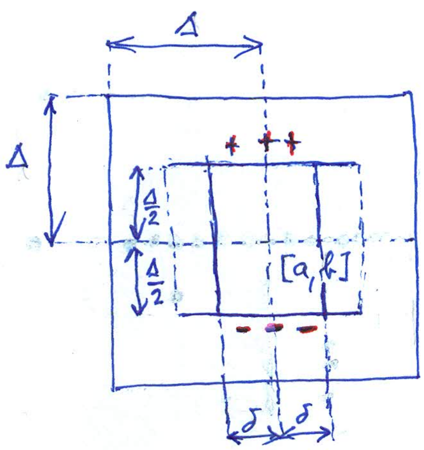
(tedy $y = y(x) = y(x_1, \dots, x_n)$);

(ii) $y \in C^k(U(a,\delta))$ a platí

(4) $$\frac{\partial y}{\partial x_i}(x) = \frac{-\frac{\partial F}{\partial x_i}(x, y(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y(x))} \quad \forall x \in U(a,\delta)\ \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

Důkaz. BÚNO $\frac{\partial F}{\partial y}(a,b) > 0$.

ad (i) Zvolme $U_\infty([a,b], \Delta)$ tak, že $U_\infty([a,b], \Delta) \subset \Omega$ a $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) > 0$ $\forall x \in U_\infty([a,b],\Delta)$.



Vyšetřujme fci $F(a,y)$ v intervalu $\langle b - \frac{\Delta}{2}, b + \frac{\Delta}{2} \rangle$. Fce $F(a,y)$ je v tomto intervalu spojitá, rostoucí (neb $\frac{\partial F}{\partial y}(a,y) > 0$), přitom $F(a,b) = 0$. Tedy

(*) $F(a, b - \frac{\Delta}{2}) < 0$, $F(a, b + \frac{\Delta}{2}) > 0$.

Uvažujme nyní fce $F(x, b - \frac{\Delta}{2})$, $F(x, b + \frac{\Delta}{2})$. Platí (*). Ze spojitosti těchto fcí plyne, že

$\exists\, \delta \in (0, \Delta)\ \forall x \in U(a,\delta)$: $F(x, b - \frac{\Delta}{2}) < 0$, $F(x, b + \frac{\Delta}{2}) > 0$.

Buď nyní $x \in U(a,\delta)$ pevný bod. Fce $F(x,y)$ proměnné y je spojitá a rostoucí v $\langle b - \frac{\Delta}{2}, b + \frac{\Delta}{2} \rangle$, v bodě $y = b - \frac{\Delta}{2}$ je záporná a v bodě $y = b + \frac{\Delta}{2}$ je kladná. Tedy

$\exists!\ y \in (b - \frac{\Delta}{2}, b + \frac{\Delta}{2})$ tak, že $F(x,y) = 0$. Tedy $y = y(x)$.

$\uparrow$ neb $F(x, \cdot)$ je rostoucí

---

*) Tedy, je-li $M = \{[x,y];\ F(x,y) = 0\}$, pak množina $M \cap (U(a,\delta) \times U(b,\delta_1))$ je grafem fce $y = y(x)$, $x \in U(a,\delta)$.
Z (i) také plyne, že $U(a,\delta) \times U(b,\delta_1) \subset \Omega$ (neb $F(x,y)$ je definováno).

Tedy jsme dokázali

$\forall x \in U(a,\delta)\ \exists!\ y = y(x) \in (b - \frac{\Delta}{2}, b + \frac{\Delta}{2})$ tak, že $F(x,y) = 0$.

Tím je ověřeno (i) (s $\delta_1 = \frac{\Delta}{2}$).

ad (ii) I. Nejprve dokážeme, že fce $y = y(x)$ je spojitá v $U(a,\delta)$.

Nechť $c \in U(a,\delta)$ a $\varepsilon > 0$. Položme

$$\tilde{\Omega} = U(a,\delta) \times \left((y(c) - \varepsilon, y(c) + \varepsilon) \cap (b - \tfrac{\Delta}{2}, b + \tfrac{\Delta}{2}) \right).$$

Pak fce $\tilde{F} = F|_{\tilde{\Omega}}$ splňuje

$$\tilde{F}(c, y(c)) = 0, \quad \tilde{F} \in C^k(\tilde{\Omega}), \quad \frac{\partial \tilde{F}}{\partial y}(c, y(c)) > 0.$$

Tedy dle již dokázané části (i) platí: $\exists\, U(c) \subset U(a,\delta)$ a

(2*) $\exists\, U(y(c)) \subset (y(c) - \varepsilon, y(c) + \varepsilon)$

tak, že

(3*) $\forall x \in U(c)\ \exists!\ y \in U(y(c)) : \tilde{F}(x,y) = 0$.

Protože ale $U(c) \subset U(a,\delta)$, plyne odtud nutně, že toto y je ono $y = y(x)$ z části (i). Tedy dle (3*) platí

$$y(U(c)) \subset U(y(c)) \underset{\uparrow \text{dle } (2*)}{\subset} (y(c) - \varepsilon, y(c) + \varepsilon),$$

což dokazuje spojitost fce y v bodě c.

II. Nyní, navíc za předpokladu, že $F \in C^1(\Omega)$, dokážeme, že $y \in C^1(U(a,\delta))$. Buď $i \in \{1, \dots, n\}$ a $x \in U(a,\delta)$. Určíme čísla $\delta_2, \Delta_1 > 0$ tak, aby

$U_2(x, \delta_2) \subset U(a,\delta)$ (pak tedy $y(x) \in (b - \delta_1, b + \delta_1)$)

a

$$U_2(x,\delta_2) \times y(U(x,\delta_2)) \subset U([x, y(x)], \Delta_1) \subset \Omega.$$

Pak pro t splňující $0 < |t| < \delta_2$ dle Věty 24 (o přírůstku fce) $\exists\, \theta(t) \in R^{n+1}$ ležící na úsečce spojující body $[x, y(x)]$ a $[x + te^i, y(x + te^i)]$ tak, že

$$0 = F(x + te^i, y(x + te^i)) - F(x, y(x)) = F'(\theta(t))(te^i, y(x+te^i) - y(x)).$$

$$\iff 0 = \frac{\partial F}{\partial x_i}(\theta(t)) \cdot t + \frac{\partial F}{\partial y}(\theta(t)) \left(y(x + te^i) - y(x) \right)$$

$$\iff (4*) \quad \frac{y(x + te^i) - y(x)}{t} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(\theta(t))}{\frac{\partial F}{\partial y}(\theta(t))}.$$

Protože

$$\| \Theta(t) - [x, y(x)] \|_{\mathbb{R}^{n+1}} \leq \| [x+te^i, y(x+te^i)] - [x, y(x)] \|_{\mathbb{R}^{n+1}} \leq$$

$$\leq |t| + |y(x+te^i) - y(x)| \to 0 \text{ pro } t \to 0,$$

platí

$$\lim_{t\to 0} \Theta(t) = [x, y(x)].$$

(Což plyne také přímo z první Poznámky na listě 1.)

Odtud a z (4*) pak dostáváme

$$(5*) \quad \frac{\partial y}{\partial x_i}(x) = \lim_{t\to 0} \frac{y(x+te^i) - y(x)}{t} = -\lim_{t\to 0} \frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(\Theta(t))}{\frac{\partial F}{\partial y}(\Theta(t))} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(x, y(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y(x))}.$$

Protože $i \in \{1, \dots, n\}$ a $x \in U(a, \delta)$ byly libovolné prvky těchto množin, tak z (5*) plyne, že $y \in C^1(U(a,\delta))$ a platí rovnost (4).

III. Nyní dokážeme, že $y \in C^k(U(a,\delta))$. Použijeme mat. indukci. Z II víme, že toto tvrzení platí pro $k=1$. Buď $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$, a předpokládejme, že tvrzení platí pro $k-1$. Dokážeme, že pak tvrzení platí i pro k.

Z předpokladů plyne, že fce $\frac{\partial F}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n}, \frac{\partial F}{\partial y}$ jsou třídy C^{k-1} na Ω. Dle indukčního předpokladu dále máme, že $y \in C^{k-1}(U(a,\delta))$ (neb $F \in C^k(\Omega) \subset C^{k-1}(\Omega)$). Z uvedeného, z (5*) a z Věty 23 (složené zobrazení a třída C^k) pak plyne, že $\frac{\partial y}{\partial x_i} \in C^{k-1}(U(a,\delta))$ $\forall i \in \{1, \dots, n\}$. Tedy $y \in C^k(U(a,\delta))$. □

Poznámka. Fci $y = y(x)$, která v okolí bodu a vyhovuje rovnici $F(x, y(x)) = 0$, se říká implicitní fce definovaná rovnicí $F(x,y) = 0$ (nebo fce implicitně definovaná rovnicí $F(x,y) = 0$).

8. přednáška MA 3, šk. r. 2016/17, 26. 10. 2016

Věta 26 (o implicitním zobrazení). Buď $k\in\mathbb{N}$, $\Omega\subset\mathbb{R}^{n+m}$ ot. množina, $F:\Omega\to\mathbb{R}^m$, $F=F(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m)=F(x,y)$, kde $x=[x_1,\dots,x_n]$, $y=[y_1,\dots,y_m]$. Nechť $[a,b]=[a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_m]\in\Omega$ a nechť platí

(1) $F(a,b)=0$, (2) $F\in C^k(\Omega)$,

(3) $$\frac{D(F_1,\dots,F_m)}{D(y_1,\dots,y_m)}(a,b)=\begin{vmatrix}\frac{\partial F_1}{\partial y_1}(a,b), & \dots, & \frac{\partial F_1}{\partial y_m}(a,b)\\ \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1}(a,b), & \dots, & \frac{\partial F_m}{\partial y_m}(a,b)\end{vmatrix}\neq 0.$$

Pak

(i) $\exists\, U(a)\subset\mathbb{R}^n\ \exists\, \mathcal{U}(b)\subset\mathbb{R}^m$ tak, že platí

($3\frac{1}{2}$) $\forall x\in U(a)\ \exists!\, y\in \mathcal{U}(b):\ F(x,y)=0$

(tedy $y=y(x)=[y_1(x),\dots,y_m(x)]=[y_1(x_1,\dots,x_n),\dots,y_m(x_1,\dots,x_n)]$);

(ii) $y\in C^k(U(a))$.

Důkaz provedeme použitím mat. indukce.

Je-li $m=1$, pak tvrzení platí dle Věty 25 (o implicitní fci).

Předpokládejme, že tvrzení platí pro nějaké $m\in\mathbb{N}$. Dokážeme, že pak tvrzení platí i pro $m+1$.

Nechť tedy platí předpoklady věty, kde číslo m je nahrazeno číslem $m+1$. Pak matice

$$A_F:=\begin{pmatrix}\frac{\partial F_1}{\partial y_1}(a,b), & \dots, & \frac{\partial F_1}{\partial y_{m+1}}(a,b)\\ \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial F_{m+1}}{\partial y_1}(a,b), & \dots, & \frac{\partial F_{m+1}}{\partial y_{m+1}}(a,b)\end{pmatrix}$$

je regulární.

BÚNO lze předpokládat, že $A_F=I$, kde I je jednotková matice typu $(m+1)\times(m+1)$. To plyne takto: Buď $L:\mathbb{R}^{m+1}\to\mathbb{R}^{m+1}$ lineární zobrazení dané předpisem $L(y)=(A_F)^{-1}y\quad \forall y\in\mathbb{R}^{m+1}$. Zobrazení L je bijekce $\mathbb{R}^{m+1}$ na $\mathbb{R}^{m+1}$ a je třídy C^∞ na $\mathbb{R}^{m+1}$. Proto zobrazení $T:\Omega\to\mathbb{R}^{m+1}$ dané předpisem $T:=L\circ F$ splňuje:

(4) $T\in C^k(\Omega)$,

(5) $\forall [x,y]\in\Omega:\ T(x,y)=0 \iff F(x,y)=0$,

(6) $A_T=A_F^{-1}A_F=I$.

(Vlastnosti (4) a (5) jsou zřejmé.
ad (6): Zobrazení $y \longmapsto F(a,y)$ má v bodě b derivaci reprezentovanou maticí A_F. Podle Věty 76 (derivace složeného zobrazení), MA2, 26. přednáška, derivace složeného zobrazení $y \mapsto T(a,y) = L \circ F(a,y)$ je v bodě b reprezentována maticí $A_T = A_F^{-1} \circ A_F = I$.)

Protože
$$F_{m+1}(a,b) = 0 \quad \text{a} \quad \frac{\partial F_{m+1}}{\partial y_{m+1}}(a,b) = 1 \neq 0,$$
tak dle Věty 25 (o implicitní fci) $\exists$ okolí $\mathcal{U}([a,b_1,\dots,b_m]) \subset \mathbb{R}^{n+m}$ a okolí $\mathcal{U}(b_{m+1}) \subset \mathbb{R}$ tak, že

(7) $\forall [x,y_1,\dots,y_m] \in \mathcal{U}([a,b_1,\dots,b_m])\ \exists!\ y_{m+1} \in \mathcal{U}(b_{m+1}):\ F_{m+1}(x,y_1,\dots,y_m,y_{m+1}) = 0.$

Označme

(8) $$y_{m+1} = \varphi(x,y_1,\dots,y_m).\ ^{*)}$$

Pak, dle Věty 25, platí
$$\varphi \in C^k(\mathcal{U}([a,b_1,\dots,b_m])).$$

Definujme nyní zobrazení $H: \mathcal{U}([a,b_1,\dots,b_m]) \longrightarrow \mathbb{R}^m$ předpisem

(9) $\underline{H_i(x,y_1,\dots,y_m) = F_i(x,y_1,\dots,y_m,\varphi(x,y_1,\dots,y_m)),\quad i=1,\dots,m.}$

Pak, dle Věty 23 (složené zobrazení a třída C^k), zobrazení H je třídy C^k na $\mathcal{U}([a,b_1,\dots,b_m])$ a platí
$$H_i(a,b_1,\dots,b_m) = F_i(a,b_1,\dots,b_m,\underbrace{\varphi(a,b_1,\dots,b_m)}_{=b_{m+1}}) = 0 \quad \forall i \in \{1,\dots,m\},$$
tj.

($9\frac{1}{2}$) $\underline{H(a,b_1,\dots,b_m) = 0.}$

Dále máme
$$\frac{\partial H_i}{\partial y_j}(a,b_1,\dots,b_m) = \underbrace{\frac{\partial F_i}{\partial y_j}(a,b_1,\dots,b_{m+1})}_{=\delta_{ij}} + \underbrace{\frac{\partial F_i}{\partial y_{m+1}}(a,b_1,\dots,b_{m+1})}_{=0,\ \text{neb } i \in \{1,\dots,m\} \Rightarrow i \neq m+1} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y_j}(a,b_1,\dots,b_m) =$$
$$= \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases}, \quad i,j \in \{1,\dots,m\}$$

$$\Rightarrow \quad A_H = I \qquad \text{(jednotková matice typu } m \times m).\ ^{**)}$$

Můžeme tedy použít indukční předpoklad na zobrazení H a bod $[a,b_1,\dots,b_m]$ (tj. "řešit" lokálně soustavu $H(x,y_1,\dots,y_m) = 0$ v okolí bodu $[a,b_1,\dots,b_m]$). Existují tedy okolí $\tilde{\mathcal{U}}(a) \subset \mathbb{R}^n$ a $\tilde{\mathcal{U}}([b_1,\dots,b_m]) \subset \mathbb{R}^m$

---

*) Tedy jsme z poslední rovnice určili (dle Věty 25) proměnnou y_{m+1}, $y_{m+1} = \varphi(x,y_1,\dots,y_m)$. Protože dle předpokladu je $F_{m+1}(a,b_1,\dots,b_m,b_{m+1}) = 0$, tak z (7) plyne, že $\underline{\varphi(a,b_1,\dots,b_m) = b_{m+1}}$.

**) A_H je matice reprezentující derivaci v bodě $[b_1,\dots,b_m]$ zobrazení $[y_1,\dots,y_m] \mapsto H(a,y_1,\dots,y_m)$

takova', že platí

(10) $\tilde{\mathcal{U}}(a) \times \tilde{\mathcal{U}}([b_1, \dots, b_m]) \subset \mathcal{U}([a, b_1, \dots, b_m])$

a

(11) $\forall x \in \tilde{\mathcal{U}}(a)\ \exists!\ [y_1, \dots, y_m] \in \tilde{\mathcal{U}}([b_1, \dots, b_m]) : \ H(x, y_1, \dots, y_m) = 0.$

Tedy

(12) $y_i = \varphi_i(x) = \varphi_i(x_1, \dots, x_n)\ ,\ i = 1, \dots, m\ ,$ *)

a $\varphi_i \in C^k(\mathcal{U}(a))$. Položme

(13) $\underline{\varphi_{m+1}(x) := \varphi(x, \varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x))\ , \quad x \in \tilde{\mathcal{U}}(a).}$

Pak zobrazení

(13 $\frac{1}{2}$) $\Phi := [\varphi_1, \dots, \varphi_{m+1}]$ **) (definované na $\tilde{\mathcal{U}}(a)$)

je třídy C^k na $\tilde{\mathcal{U}}(a)$ a platí

(14) $\forall x \in \tilde{\mathcal{U}}(a) : \underline{F_i(x, \Phi(x))} = F_i(x, \varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x), \varphi_{m+1}(x))$

$$= F_i(x, \varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x), \varphi(x, \varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x)))$$

$$= \begin{cases} \overset{\text{dle } (9)}{=} H_i(x, \varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x)) \overset{\text{dle } (11) \text{ a } (12)}{=} \underline{0}\ , & i = 1, \dots, m \\ = \underline{0}\ , & i = m+1. \\ \ \ \uparrow \text{dle } (7) \text{ a } (8) & \end{cases}$$

Definujme nyní množinu

(15) $\mathcal{Y}([b_1, \dots, b_{m+1}]) := \tilde{\mathcal{U}}([b_1, \dots, b_m]) \times \mathcal{U}(b_{m+1}) \subset R^{m+1}$

obsahující bod $[b_1, \dots, b_{m+1}]$.

I. $\underline{\text{Je-li } x \in \tilde{\mathcal{U}}(a)}$, pak

$$\underline{\Phi(x)} = [\underbrace{\varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x)}_{\in \tilde{\mathcal{U}}([b_1, \dots, b_m]) \text{ dle (11) a (12)}}, \underbrace{\varphi_{m+1}(x)}_{= \varphi(\underbrace{x, \varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x)}_{\in \tilde{\mathcal{U}}(a) \times \tilde{\mathcal{U}}([b_1, \dots, b_m])}) \in \mathcal{U}(b_{m+1}) \text{ dle (10) a (7)}}] \in \tilde{\mathcal{U}}([b_1, \dots, b_m]) \times \mathcal{U}(b_{m+1}) =$$

$$\underset{\text{dle}(15)}{=} \mathcal{Y}([b_1, \dots, b_{m+1}])\ , \text{ tj. } \underline{\Phi(x) \in \mathcal{Y}([b_1, \dots, b_{m+1}])}.$$

Dále, dle (14), platí $F_i(x, \Phi(x)) = 0\ ,\ i = 1, \dots, m+1.$

---

*) Dle (11) a (9 $\frac{1}{2}$) máme $\varphi_i(a) = b_i\ ,\ i = 1, \dots, m$.

**) $\Phi(a) = [\underbrace{\varphi_1(a)}_{= b_1}, \dots, \underbrace{\varphi_m(a)}_{= b_m}, \underbrace{\varphi_{m+1}(a)}_{= \varphi(a, \varphi_1(a), \dots, \varphi_m(a)) = \varphi(a, b_1, \dots, b_m) = b_{m+1}}] = [b_1, \dots, b_{m+1}]$.

Tedy $\forall x \in \tilde{\mathcal{U}}(a)\ \exists\ [y_1, \dots, y_{m+1}] \in \mathcal{S}([b_1, \dots, b_{m+1}]) : F(x, y_1, \dots, y_{m+1}) = 0$

(víme, že $y_i = \varphi_i(x)$, $i = 1, \dots, m+1$, tj. $[y_1, \dots, y_{m+1}] = \Phi(x)$).

II. Buď nyní

(16) $[x, y] = [x, y_1, \dots, y_{m+1}] \in \tilde{\mathcal{U}}(a) \times \mathcal{S}([b_1, \dots, b_{m+1}])$

a nechť

(17) $F(x, y) = 0$, tj. $F(x, y_1, \dots, y_{m+1}) = 0$.

Pak, dle (15),

(18) $$\tilde{\mathcal{U}}(a) \times \mathcal{S}([b_1, \dots, b_{m+1}]) \overset{(15)}{=} \underbrace{\tilde{\mathcal{U}}(a) \times \tilde{\mathcal{U}}([b_1, \dots, b_m])}_{\subset\, \mathcal{U}([a, b_1, \dots, b_m]) \text{ dle (10)}} \times \mathcal{U}(b_{m+1}).$$

Tedy

(19) $[x, y_1, \dots, y_{m+1}] \in \mathcal{U}([a, b_1, \dots, b_m]) \times \mathcal{U}(b_{m+1})$

a přitom z (17) máme

$$F_{m+1}(x, y_1, \dots, y_{m+1}) = 0.$$

Proto dle (7) musí platit

(20) $$y_{m+1} = \varphi(x, y_1, \dots, y_m).$$

Odtud a z (17) dostáváme

$$F(x, y_1, \dots, y_m, \varphi(x, y_1, \dots, y_m)) = 0$$

$\Rightarrow$ (dle (9)) $$H(x, y_1, \dots, y_m) = 0$$

(dle (16) a (18) platí $[x, y_1, \dots, y_m] \in \tilde{\mathcal{U}}(a) \times \tilde{\mathcal{U}}([b_1, \dots, b_m])$ a $\tilde{\mathcal{U}}(a) \times \tilde{\mathcal{U}}([b_1, \dots, b_m]) \underset{\text{dle (10)}}{\subset} \mathcal{U}([a, b_1, \dots, b_m]) = D(H)$)

$\Rightarrow$ (dle (11) a (12)) (21) $y_1 = \varphi_1(x), \dots, y_m = \varphi_m(x)$.

Odtud a z (20) máme

(22) $$y_{m+1} = \varphi(x, \varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x)) \overset{\text{dle (13)}}{=} \varphi_{m+1}(x).$$

Tedy když platí (16) a (17), pak nutně

$$y = [y_1, \dots, y_{m+1}] \underset{\text{dle (21) a (22)}}{=} [\varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x), \varphi_{m+1}(x)] \underset{\text{dle } (13\frac{1}{2})}{=} \Phi(x).$$

Z **I** a **II** dostáváme

(23) $\forall x \in \tilde{\mathcal{U}}(a)\ \exists!\ [y_1, \dots, y_{m+1}] \in \mathcal{S}([b_1, \dots, b_{m+1}]) : F(x, y_1, \dots, y_{m+1}) = 0$.

Zvolme nyní okolí $\mathcal{U}([b_1, \dots, b_{m+1}]) \subset \mathbb{R}^{m+1}$ bodu $[b_1, \dots, b_{m+1}]$ tak, aby

$$\mathcal{U}([b_1,\dots,b_{m+1}]) \subset \underbrace{\varphi([b_1,\dots,b_{m+1}])}$$

to je ot. množina obsahující bod $[b_1,\dots,b_{m+1}]$

a pak okolí $\mathcal{U}(a) \subset \mathbb{R}^n$ bodu a tak, aby

$$\mathcal{U}(a) \subset \underbrace{\Phi_{-1}(\mathcal{U}([b_1,\dots,b_{m+1}]))}$$

to je otevřená množina (neb Φ je spojité) obsahující bod a; navíc $\Phi_{-1}(\mathcal{U}([b_1,\dots,b_{m+1}])$ je částí $\tilde{\mathcal{U}}(a)$ (neb Φ je definováno v $\tilde{\mathcal{U}}(a)$).

Z (23) a z této volby pak ihned plyne $(3\frac{1}{2})$. $\square$

9. přednáška MA 3, šk. r. 2016/17, 31.10.2016

Taylorův polynom a Taylorova věta.

Značení. Je-li $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, pak položíme $f^{(0)}=f$, $d^0 f=f$.

Definice. Buď $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $a\in\mathbb{R}^n$, $k\in\mathbb{N}_0$ a nechť $f^{(k)}(a)$ existuje. Taylorův polynom řádu k fce f v bodě a je definován předpisem

$$T^f_{k,a}(x):=\sum_{i=0}^{k}\frac{1}{i!}\,d^i_{x-a}f(a)\quad,\qquad x\in\mathbb{R}^n.$$

Věta 27 (Taylorova s Lagrangeovým tvarem zbytku). Buď $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ ot. množina, $k\in\mathbb{N}_0$, $f\in C^{k+1}(\Omega)$. Nechť $a,x\in\Omega$, $a\neq x$, $\overline{ax}:=\{(1-t)a+tx;\ t\in\langle 0,1\rangle\}\subset\Omega$. Pak existuje $\xi\in\overline{ax}\setminus\{a,x\}$ tak, že

$$f(x)=T^f_{k,a}(x)+\frac{1}{(k+1)!}\,d^{k+1}_{x-a}f(\xi).$$

Důkaz. Buď $h:=x-a$. Protože Ω je ot. množina obsahující úsečka $\overline{ax}$, tak ex. $(\alpha,\beta)\supset\langle 0,1\rangle$ takový, že

$$a+th\in\Omega\quad\forall t\in(\alpha,\beta).$$

Nechť $\varphi(t):=f(a+th)$, $t\in(\alpha,\beta)$. Pak

$$\varphi(0)=f(a),\qquad \varphi(1)=f(x)$$

a $\forall t\in(\alpha,\beta)$ platí

$$\varphi'(t)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(a+th)h_i=d_h f(a+th),$$

$$\varphi''(t)=\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(a+th)h_ih_j=d^2_h f(a+th),$$

$$\vdots$$

$$\varphi^{(j)}(t)=\sum_{i_1,i_2,\dots,i_j=1}^{n}\frac{\partial^j f}{\partial x_{i_1}\dots\partial x_{i_j}}(a+th)h_{i_1}\dots h_{i_j}=d^j_h f(a+th),$$

$$j=1,\dots,k+1.$$

Podle Taylorovy věty s Lagrangeovým tvarem zbytku (Věta 5, MA 2, 2. přednáška) ex. $\theta\in(0,1)$ tak, že

$$\varphi(1)=\sum_{i=0}^{k}\frac{\varphi^{(i)}(0)}{i!}(1-0)^i+\frac{\varphi^{(k+1)}(\theta)}{(k+1)!},$$

tj.

$$f(x)=\underbrace{\sum_{i=0}^{k}\frac{d^i_h f^i(a)}{i!}}_{=T^f_{k,a}(x)}+\frac{1}{(k+1)!}\,d^{k+1}_h(a+\theta h).\qquad\square$$

Věta 28 (Taylorova s Peanovým tvarem zbytku). Buď $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{N}$, $f \in C^k(\mathcal{U}(a))$. Pak

$$f(x) = T^f_{k,a}(x) + o(\|x-a\|^k), \quad x \to a.$$

$$\boxed{\iff R(x) := f(x) - T^f_{k,a}(x) = o(\|x-a\|^k),\ x \to a}$$

Důkaz. Víme: $\exists \delta > 0 \Rightarrow f \in C^k(\mathcal{U}(a,\delta))$.

Použijeme Taylorovu větu s Lagr. tvarem zbytku pro $k^* := k-1$, $\Omega := \mathcal{U}(a,\delta)$. Dostaneme, že $\forall x \in \mathcal{U}(a,\delta)\ \exists \xi = \xi(x) \in \overline{ax} \setminus \{a,x\}$ tak, že

$$(1) \quad f(x) = T^f_{k-1,a}(x) + \frac{1}{k!} d^k_{x-a} f(\xi).$$

Dle definice Taylorova polynomu platí

$$(2) \quad T^f_{k,a}(x) = T^f_{k-1,a}(x) + \frac{1}{k!} d^k_{x-a} f(a).$$

Buď $h = (h_1, \dots, h_n) := x - a$. Pak

$$\underbrace{R(x)}_{\text{zbytek po Taylorově polynomu stupně } k} := f(x) - T^f_{k,a}(x) \overset{(1)\&(2)}{=} \frac{1}{k!}\left[d^k_{x-a} f(\xi) - d^k_{x-a} f(a)\right] =$$

$$= \frac{1}{k!} \sum_{i_1,\dots,i_k=1}^{n} \left[\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}(\xi) - \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}(a)\right] h_{i_1} \dots h_{i_k}.$$

neboť $d^k_h f(y) = \sum_{i_1,\dots,i_k=1}^{n} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}(y)\, h_{i_1} \dots h_{i_k}$

$$\Rightarrow \frac{|R(x)|}{\underbrace{\|x-a\|^k}_{=\|h\|^k}} \le \frac{1}{k!} \sum_{i_1,\dots,i_k=1}^{n} \left|\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}(\xi) - \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}(a)\right| \underbrace{\frac{|h_{i_1}|}{\|h\|}}_{\le 1} \dots \underbrace{\frac{|h_{i_k}|}{\|h\|}}_{\le 1}$$

$$\le \frac{1}{k!} \sum_{i_1,\dots,i_k=1}^{n} \left|\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}(\xi) - \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}(a)\right| \to 0, \quad x \to a,$$

neboť $\xi(x) \to a$ pro $x \to a$ a $f \in C^k(\mathcal{U}(a))$. $\square$

Extrémy fcí více proměnných

Na 3. přednášce jsme definovali pojmy lokální maximum a lokální minimum vzhledem k množině M. Je-li $M = X$ (tj: M = celý prostor), pak mluvíme o lokálním maximu a lokálním minimu. Analogicky pro ostré lokální extrémy.

Věta 29 (nutná podmínka pro lokální extrém). Nechť fce $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ má v bodě $a \in \mathbb{R}^n$ lokální extrém. Existuje-li $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$, $i \in \{1, \dots, n\}$, pak $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$.

Důkaz. Nechť f má v bodě $a \in \mathbb{R}^n$ lok. extrém. Pak $\exists \delta > 0$ tak, že $U(a, \delta) \subset D(f)$. Buď $i \in \{1, \dots, n\}$ a položme $g(t) := f(a + te^i)$ pro $t \in (-\delta, \delta)$. Pak fce g má v bodě 0 lokální extrém. Existuje-li $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$, pak platí $g'(0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$. Ovšem $g'(0) = 0$ (dle Věty 91 (nutná podmínka lok. extrému), MA 1, 21. přednáška), tedy $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$. $\square$

Poznámka. Tedy body, v nichž fce f fce f může mít lok. extrém, jsou ty body, v nichž buďto všechny parc. derivace 1. řádu jsou rovny 0, nebo body, v nichž některá z parc. derivací 1. řádu neexistuje.

vynechal jsem to

Definice (stacionární body). Bod $a \in \mathbb{R}^n$ se nazývá *stacionární bod fce* $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, jestliže f má v bodě a tot. diferenciál a platí $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$ $\forall i \in \{1, \dots, n\}$.

Poznámka. Tedy, je-li fce f třídy C^1 v otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, pak podezřelými body pro lokální extrémy jsou stacionární body.

Opakování. *Kvadratickou formou* na prostoru $\mathbb{R}^n$ nazýváme fci $Q: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definovanou předpisem

$$Q(h) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} h_i h_j, \quad h = [h_1, \dots, h_n] \in \mathbb{R}^n,$$

kde $a_{ij} = a_{ji} \in \mathbb{R}$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$ (tj: matice $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$ je symetrická)

Kvadratická forma je funkce homogenní stupně 2, tj. platí $Q(th) = t^2 Q(h) \quad \forall t \in \mathbb{R} \ \forall h \in \mathbb{R}^n$.

Definice. Kvadratická forma $Q: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se nazývá:

1, pozitivně definitní, jestliže $Q(h) > 0 \ \forall h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$;

2, pozitivně semidefinitní, jestliže $Q(h) \geq 0 \ \forall h \in \mathbb{R}^n$ a $Q(h) = 0$ pro nějaké $h \neq [0, \dots, 0]$;

3, negativně definitní, jestliže $Q(h) < 0 \ \forall h \in \mathbb{R}^n$;

4) negativně semidefinitní, jestliže $Q(h) \leq 0 \ \forall h \in \mathbb{R}^n$ a $Q(h) = 0$ pro nějaké $h \neq [0, \dots, 0]$;

5) indefinitní, jestliže $\exists h_1 \in \mathbb{R}^n$, $\exists h_2 \in \mathbb{R}^n$ tak, že $Q(h_1) > 0$ a $Q(h_2) < 0$.

Lemma 30 (o pozitivně definitní kvadratické formě). Nechť kvadratická forma $Q: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je pozitivně definitní. Pak ex. $K \in (0, +\infty)$ tak, že platí

$$(*) \qquad Q(h) \geq K \|h\|^2 \quad \forall h \in \mathbb{R}^n.$$

Důkaz: Buď $S := \{h \in \mathbb{R}^n;\ \|h\| = 1\}$ (jednotková sféra v $\mathbb{R}^n$). Protože S je kompaktní v $\mathbb{R}^n$ a $Q \in C(\mathbb{R}^n)$, tak Q nabývá na S svého minima (dle Věty 14, 3. přednáška), tj: $\exists h_0 \in \mathbb{R}^n$, $\|h_0\| = 1$ tak, že $\underbrace{Q(h_0)}_{>0} = \min_{h \in S} Q(h) =: K$.
neb Q je pozitivně definitní

Pak $\forall h \in \mathbb{R}^n$, $h \neq [0, \dots, 0]$ platí $Q\left(\frac{h}{\|h\|}\right) \geq Q(h_0) = K$.

Tedy $K \leq Q\left(\frac{h}{\|h\|}\right) = \frac{1}{\|h\|^2} Q(h) \quad \forall h \in \mathbb{R}^n,\ h \neq [0, \dots, 0]$

$\Rightarrow \quad Q(h) \geq K \|h\|^2 \quad \forall h \in \mathbb{R}^n.$ □

Věta 31 (lokální extrémy a druhý diferenciál). Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina, $f: \Omega \to \mathbb{R}$ je třídy C^2 na Ω, $a \in \Omega$, $\operatorname{grad} f(a) = 0$. Buď

$$Q(h) := d_h^2 f(a) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\, h_i h_j \quad \forall h \in \mathbb{R}^n.$$

Pak platí:

(i) Je-li Q pozitivně definitní, pak f má v bodě a ostré lokální minimum.

(ii) Je-li Q negativně definitní, pak f má v bodě a ostré lokální maximum.

(iii) Je-li Q indefinitní, pak f nemá v bodě a lokální extrém.

Důkaz. Protože $\nabla f(a) = 0$, je $df(a) = 0$ (tj. $d_h f(a) = 0 \ \forall h \in \mathbb{R}^n$).
Podle Taylorovy věty s Peanovým tvarem zbytku (Věta 28) platí

$$f(a+h) - f(a) = \underbrace{\underbrace{\frac{1}{1!} d_h f(a)}_{=0} + \frac{1}{2!} d_h^2 f(a)}_{= T^f_{2,a}(a+h) - f(a)} + o(\|h\|^2)$$

$$= \frac{1}{2!} \underbrace{d_h^2 f(a)}_{= Q(h)} + o(\|h\|^2) \text{ pro } h \to 0,$$

tj.

$$(1) \quad f(a+h) - f(a) = \tfrac{1}{2} Q(h) + o(\|h\|^2) \text{ pro } h \to 0.$$

ad (i). Je-li Q pozitivně definitní, pak dle Lemmatu 30 $\exists K \in (0, +\infty): Q(h) \geq K\|h\|^2 \ \forall h \in \mathbb{R}^n$.

Odtud a z (1) plyne

$$f(a+h) - f(a) \geq \|h\|^2 \left(\frac{K}{2} + \frac{o(\|h\|^2)}{\|h\|^2} \right) \text{ pro } h \to 0.$$

Protože $\lim\limits_{h \to 0} \left(\frac{K}{2} + \frac{o(\|h\|^2)}{\|h\|^2} \right) = \frac{K}{2} > 0$, tak

$$\exists \delta > 0 \ \forall h \in \mathbb{R}^n, h \in U(0,\delta): \frac{K}{2} + \frac{o(\|h\|^2)}{\|h\|^2} > \frac{K}{4}$$

$$\Rightarrow \quad f(a+h) - f(a) \geq \frac{K}{4}\|h\|^2 \quad \forall h \in U(0,\delta)$$

$\Rightarrow$ fce f má v bodě a ostré lokální minimum.

ad (ii). Buď Q negativně definitní. Pak fci $f^* := -f$ příslušná kvadr. forma $Q^* = d^2 f^*(a) = -d^2 f(a) = -Q$ (neb parc. derivace fce f^* = − parc. derivace fce f) je pozitivně definitní. Tedy fce $f^* = -f$ má v bodě a ostré lokální minimum $\Rightarrow$ fce f má v bodě a ostré lokální maximum.

ad (iii). Je-li Q indefinitní, pak $\exists h_1 \in \mathbb{R}^n, \exists h_2 \in \mathbb{R}^n$ tak, že $Q(h_1) > 0 \wedge Q(h_2) < 0$. Tedy pro $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ platí (cf. (1))

$$f(a+th_1)-f(a)=\frac{1}{2}Q(th_1)+o(\|th_1\|^2)=$$

$$=\underbrace{t^2\left(\frac{Q(h_1)}{2}+\frac{o(t^2\|h_1\|^2)}{t^2\|h_1\|^2}\cdot\|h_1\|^2\right)}_{\text{ozn. } V(t)} \quad \text{pro } \|th_1\|\to 0 \Updownarrow \text{ pro } t\to 0.$$

Protože $\lim_{t\to 0} V(t) = \frac{1}{2}Q(h_1) > 0$, tak

$\exists\, \delta>0:\ f(a+th_1)-f(a)>0 \quad \forall t\in(-\delta,\delta)\setminus\{0\}$,

tzn., že fce f má v bodě a ostré lokální minimum vzhledem k přímce $p_1=\{a+th_1;\ t\in\mathbb{R}\}$.

Zcela obdobně se dokáže, že fce f má v bodě a ostré lokální maximum vzhledem k přímce $p_2=\{a+th_2;\ t\in\mathbb{R}\}$. Tudíž fce f nemá v bodě a lokální extrém. □

Poznámka. Je-li kvadr. forma $d^2f(a)$ pouze semidefinitní, pak (na základě daných informací) nelze rozhodnout zda fce f má v bodě a lokální extrém.

10. přednáška MA 3, šk. r. 2016/17, 2. 11. 2016

Věta 32 (nutná podmínka pro vázané extrémy).

(i) Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+m}$ je ot. množina a funkce $f, G_1, \dots, G_m$ jsou třídy C^1 na Ω.

(ii) Buď $M \subset \Omega$ množina těch bodů, které splňují rovnice

$$(1) \quad \begin{aligned} G_1(x_1, \dots, x_{n+m}) &= 0 \\ &\vdots \\ G_m(x_1, \dots, x_{n+m}) &= 0 \end{aligned}$$

a nechť matice

$$(2) \quad \begin{pmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial x_1}, & \dots, & \frac{\partial G_1}{\partial x_{n+m}} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial G_m}{\partial x_1}, & \dots, & \frac{\partial G_m}{\partial x_{n+m}} \end{pmatrix}$$

má v každém bodě množiny M hodnost m.

(iii) Nechť fce f má v bodě $c \in M$ lokální extrém vzhledem k množině M.

Pak existují čísla $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ tak, že platí

$$(3) \quad \nabla f(c) + \lambda_1 \nabla G_1(c) + \dots + \lambda_m \nabla G_m(c) = \mathbf{o}. \;{}^{*)}$$

Důkaz. Buď $c = [c_1, \dots, c_{n+m}] \in M$ bod, ve kterém má fce f lokální extrém vzhledem k M. BÚNO lze předpokládat (neb předpoklady i tvrzení věty jsou symetrické vzhledem k $x_1, \dots, x_{n+m}$), že

$$(4) \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial x_{n+1}}(c), & \dots, & \frac{\partial G_1}{\partial x_{n+m}}(c) \\ \vdots & & \\ \frac{\partial G_m}{\partial x_{n+1}}(c), & \dots, & \frac{\partial G_m}{\partial x_{n+m}}(c) \end{vmatrix} \neq 0.$$

---

*) Z důkazu plyne, že čísla $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ jsou určena jednoznačně.

Dle Věty 26 (o implicitním zobrazení) $\exists \delta > 0$ $\exists \delta_1 > 0$ tak, že $\forall [x_1, \dots, x_n] \in U_\infty([c_1, \dots, c_n], \delta)$ $\exists ! [x_{n+1}, \dots, x_{n+m}] \in U_\infty([c_{n+1}, \dots, c_{n+m}], \delta_1)$ tak, že platí (1), tj.

$$x_{n+1} = \varphi_1(x_1, \dots, x_n), \dots, x_{n+m} = \varphi_m(x_1, \dots, x_n)$$

a

(5) $G_i(x_1, \dots, x_n, \varphi_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \varphi_m(x_1, \dots, x_n)) = 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, m\}$,

(6) $\varphi_1, \dots, \varphi_m \in C^1(U_\infty([c_1, \dots, c_n], \delta))$.

Platí ovšem

(7) $c_{n+1} = \varphi_1(c_1, \dots, c_n), \dots, c_{n+m} = \varphi_m(c_1, \dots, c_n)$.

Podle předpokladu má fce f v bodě $[c_1, \dots, c_{n+m}]$ lokální extrém – třeba maximum – vzhledem k M (jde-li o minimum přejdeme od f k $(-f)$). Ukážeme, že složená fce

(8) $\psi(x_1, \dots, x_n) := f(x_1, \dots, x_n, \varphi_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \varphi_m(x_1, \dots, x_n))$

má v bodě $[c_1, \dots, c_n]$ lokální maximum (vzhledem k $\mathbb{R}^n$).

To plyne takto: Existuje $\Delta > 0$ tak, že platí

(9) $f(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+m}) \leq f(c_1, \dots, c_n, c_{n+1}, \dots, c_{n+m})$

$\forall [x_1, \dots, x_{n+m}] \in U_\infty([c_1, \dots, c_{n+m}], \Delta) \cap M$.

Můžeme volit $\Delta < \min\{\delta_1, \delta\}$.

Protože $\varphi_1, \dots, \varphi_m \in C(U_\infty([c_1, \dots, c_n], \delta))$ a platí (7), ex. $\Delta_1 \in (0, \Delta)$ tak, že

$$[x_1, \dots, x_n] \in U_\infty([c_1, \dots, c_n], \Delta_1) \Rightarrow |\varphi_j(x_1, \dots, x_n) - c_{n+j}| < \Delta, \quad \forall j = 1, \dots, m,$$

tedy $[\varphi_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \varphi_m(x_1, \dots, x_n)] \in U_\infty([c_{n+1}, \dots, c_{n+m}], \Delta)$

$\forall [x_1, \dots, x_n] \in U_\infty([c_1, \dots, c_n], \Delta_1)$

$\Rightarrow$

$[x_1, \dots, x_n, \varphi_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \varphi_m(x_1, \dots, x_n)] \in U_\infty([c_1, \dots, c_{n+m}], \Delta)$

(neb $\Delta_1 < \Delta$)

a dále dle (5) máme

$[x_1, \dots, x_n, \varphi_1(x_1, \dots, x_n), \dots \varphi_m(x_1, \dots, x_n)] \in M$, jestliže $[x_1,\dots,x_n] \in U_\infty([c_1,\dots,c_n],\Delta_1)$.

Odtud a z (9) pak dostáváme

$$f(x_1,\dots,x_n,\varphi_1(x_1,\dots,x_n),\dots,\varphi_m(x_1,\dots,x_n)) \le f(c_1,\dots,c_{n+m})$$
$$\forall\, x \in U_\infty([c_1,\dots,c_n],\Delta_1),$$

tj: (cf. (8))

$$\psi(x_1,\dots,x_n) \le \psi(c_1,\dots,c_n) \quad \forall\, x\in U_\infty([c_1,\dots,c_n],\Delta_1),$$

což znamená, že fce ψ má v bodě $[c_1,\dots,c_n]$ lokální maximum.

Protože také $\psi \in C^1(U_\infty([c_1,\dots,c_n],\delta))$, musí dle Věty 29 (nutná podmínka pro lokální extrém) platit, $\forall k\in\{1,\dots,n\}$,

(10) $$0 = \frac{\partial\psi}{\partial x_k}(c_1,\dots,c_n) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(c_1,\dots,c_{n+m}) + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_{n+j}}(c_1,\dots,c_{n+m})\,\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_k}(c_1,\dots,c_n).$$

Dále dle (5) máme

$$G_i(x_1,\dots,x_n,\varphi_1(x_1,\dots,x_n),\dots,\varphi_m(x_1,\dots,x_n)) = 0 \quad \forall\,[x_1,\dots,x_n]\in U_\infty([c_1,\dots,c_n],\delta)$$
$$\forall\, i\in\{1,\dots,m\}$$

$\Rightarrow$ parc. derivace těchto fcí $= 0$ v tomto okolí, speciálně pak

(11) $$\frac{\partial G_i}{\partial x_k}(\underbrace{c_1,\dots,c_{n+m}}_{=c}) + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial G_i}{\partial x_{n+j}}(\underbrace{c_1,\dots,c_{n+m}}_{=c})\,\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_k}(c_1,\dots,c_n) = 0$$
$$\forall\, i\in\{1,\dots,m\}\ \forall\, k\in\{1,\dots,n\}.$$

Buď

$$u^k := (0,\dots,0,1,0,\dots,0,\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_k}(c),\dots,\frac{\partial\varphi_m}{\partial x_k}(c)), \quad k=1,\dots,n,$$

k-tá pozice

n+m rozměrný vektor

$$H := \text{lin}\{u^1,\dots,u^n\}.$$

Pak $\dim H = n$ (neb vektory $u^1,\dots,u^n$ jsou lin. nezávislé).

Z (11) pak plyne

$$\nabla G_i(c) \in H^\perp \quad \forall\, i\in\{1,\dots,m\}.$$

Tedy $\dim H^\perp \ge m$ (neb dle (4) jsou vektory $\nabla G_1(c),\dots,\nabla G_m(c)$ lineárně nezávislé).

Protože však

$$n+m = \dim \mathbb{R}^{n+m} = \dim H\oplus H^\perp = \underbrace{\dim H}_{=n} + \dim H^\perp = n + \dim H^\perp,$$

je $\dim H^\perp = m$ a vektory $\nabla G_1(c),\dots,\nabla G_m(c)$ tvoří bázi prostoru $H^\perp$.

Dále dle (10) máme $\nabla f(c) \in H^\perp$. Tedy $\nabla f(c)$ je lineární kombinací vektorů $\nabla G_1(c),\dots,\nabla G_m(c)$. □

Poznámka. 1. Této metodě se někdy říká metoda Lagrangeových multiplikátorů (těmi multiplikátory se rozumí čísla $\lambda_1, \dots, \lambda_m$).

2. (3) a (1) představují $n+m$ a m (tj. celkem $n+2m$) rovnic pro $n+2m$ neznámých $c_1, \dots, c_{n+m}$, $\lambda_1, \dots, \lambda_m$. Čísla $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ však mají pouze pomocný charakter.

3. Věta "říká", že se postupuje tak, jako kdybychom hledali lokální extrémy Lagrangeovy funkce

$$L(x_1, \dots, x_{n+m}) = f(x_1, \dots, x_{n+m}) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j G_j(x_1, \dots, x_{n+m}).$$

(cf. (3)).

Definice. Řekneme, že zobrazení $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ je difeomorfismus na otevřené množině $U \subset \mathbb{R}^n$, jestliže f je bijekce množiny U na ot. množinu $V \subset \mathbb{R}^n$ a platí

$$f \in C^1(U) \quad \text{a} \quad f^{-1} \in C^1(V).$$

Jestliže navíc platí $f \in C^k(U)$ a $f^{-1} \in C^k(V)$ pro nějaké $k \in \mathbb{N}$, pak říkáme, že f je difeomorfismus třídy C^k.

Poznámka. Pojmy „difeomorfismus" a „difeomorfismus třídy C^1" jsou totožné.

Věta 33 (o lokálním difeomorfismu). Nechť $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $a \in \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{N}$ a platí:

(i) $f \in C^{(k)}(U(a))$,

(ii) $J_f(a) \neq 0$.

Pak existuje otevřená množina U obsahující bod a tak, že $f|_U$ je difeomorfismus na U třídy C^k.

Důkaz. Buď $b = f(a)$, $\Omega = \mathbb{R}^n \times U(a)$ a $F: \Omega \to \mathbb{R}^n$ zobrazení dané předpisem

$$F(y, x) = f(x) - y. \text{ *)}$$

---

*) Tedy $F(y,x) = 0 \iff y = f(x)$.

Pak

$$F(b,a) = f(a) - b = 0, \qquad F \in C^k(\Omega),$$

$$\frac{\partial(F_1,\dots,F_n)}{\partial(x_1,\dots,x_n)}(y,x) = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(y,x), & \dots, & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(y,x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1}(y,x), & \dots, & \frac{\partial F_n}{\partial x_n}(y,x) \end{vmatrix} = \frac{\partial(f_1,\dots,f_n)}{\partial(x_1,\dots,\partial x_n)} = J_f(x)$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\partial(F_1,\dots,F_n)}{\partial(x_1,\dots,x_n)}(b,a) = J_f(a) \neq 0.$$

Tedy dle Věty 26 (o implicitním zobrazení), 8. přednáška,

$\exists\, \mathcal{U}(b,\delta) \subset \mathbb{R}^n \ \exists\, \mathcal{U}(a,\delta_1) \subset \mathcal{U}(a)$ *) tak, že

(1) $\forall y \in \mathcal{U}(b,\delta)\ \exists!\, x \in \mathcal{U}(a,\delta_1) : F(y,x) = 0$,

tj.

(2) $x = \varphi(y)$ a $F(y,\varphi(y)) = 0 \quad \forall y \in \mathcal{U}(b,\delta)$,

a platí

(3) $\varphi \in C^k(\mathcal{U}(b,\delta))$.

$$\Updownarrow$$

(4) $f(\varphi(y)) = y \quad \forall y \in \mathcal{U}(b,\delta)$.

Z (4) máme: φ je prosté na $\mathcal{U}(b,\delta)$,

($4\frac{1}{2}$) f je prosté na $\varphi(\mathcal{U}(b,\delta))$.

Tvrdím, že

(5) $\varphi(\mathcal{U}(b,\delta)) = \mathcal{U}(a,\delta_1) \cap f_{-1}(\mathcal{U}(b,\delta)) =: \mathcal{U}$.

<u>ad (5)</u>. Z (2) a (1) plyne, že

(6) $\varphi(\mathcal{U}(b,\delta)) \subset \mathcal{U}(a,\delta_1)$.

Z (4) plyne, že $\varphi(y) \in f_{-1}(\mathcal{U}(b,\delta)) \quad \forall y \in \mathcal{U}(b,\delta)$

a tedy

(7) $\varphi(\mathcal{U}(b,\delta)) \subset f_{-1}(\mathcal{U}(b,\delta))$.

Z (6) a (7) máme

(8) $\varphi(\mathcal{U}(b,\delta)) \subset \mathcal{U}(a,\delta_1) \cap f_{-1}(\mathcal{U}(b,\delta))$.

Buď nyní $z \in \mathcal{U}(a,\delta_1) \cap f_{-1}(\mathcal{U}(b,\delta))$. Pak $f(z) \in \mathcal{U}(b,\delta)$,

tj. ex. $y \in \mathcal{U}(b,\delta)$ tak, že $f(z) = y$

$\Longleftrightarrow \quad F(y,z) = 0 \qquad$ (přitom $y \in \mathcal{U}(b,\delta)$ a $z \in \mathcal{U}(a,\delta_1)$).

Z (1) a (2) pak plyne, že nutně $z = \varphi(y)$, a tedy $z \in \varphi(\mathcal{U}(b,\delta))$.

Tudíž

(9) $\mathcal{U}(a,\delta_1) \cap f_{-1}(\mathcal{U}(b,\delta)) \subset \varphi(\mathcal{U}(b,\delta))$.

Z (8) a (9) pak plyne (5).

---

*) $\mathcal{U}(a,\delta_1) \subset \mathcal{U}(a)$, neboť $\mathcal{U}(b,\delta) \times \mathcal{U}(a,\delta_1) \subset \Omega = \mathbb{R}^n \times \mathcal{U}(a)$.

Tedy $f|_{U}$ je prosté (cf. $(4\frac{1}{2})$ a (5)) a platí

$$\left(f|_{U}\right)^{-1} = \underset{\text{dle (4)}}{\varphi} \underset{\text{dle (3)}}{\in} C^k(U(b,\delta)).$$

Z (5) pak snadno plyne, že U je ot. množina*) (neboť $U(a,\delta_1)$ je otevřená a $f_{-1}(U(b,\delta))$ je otevřená (je to vzor ot. množiny při spojitém zobrazení f)).

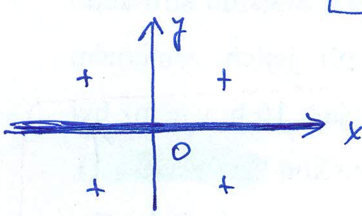
Z (4) a (5) dále plyne, že $f(U) = f(\varphi(U(b,\delta))) = U(b,\delta)$, tedy $f(U)$ je otevřená. $\square$

Příklady k poslední poznámce (list L6) v 9. přednášce.

Př. 1. Pro fci $f(x,y) = x^2(1+y^2)$, $[x,y]\in\mathbb{R}^2$, platí

$$(*)\begin{cases} \nabla f(0,0) = 0 \\ \underset{\uparrow\ \text{Hessova matice}}{H(0,0)} = \begin{pmatrix} 2, & 0 \\ 0, & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow d^2 f(0,0) \text{ je positivně semidefinitní kv. forma} \end{cases}$$

a přitom $f(\underbrace{0,y}_{\text{body osy } x}) = 0 \ \forall\, y\in\mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2(1+y^2) > 0$ if $x\neq 0 \wedge y\neq 0$.



Tedy f má v bodě $[0,0]$ neostré lokální minimum.

Př. 2. Pro fci $f(x,y) = x^2 + y^3$, $[x,y]\in\mathbb{R}^2$, opět platí $(*)$, ale f nemá v bodě $[0,0]$ lokální extrém, neboť $f(0,y) = y^3 \ \forall\, y\in\mathbb{R}$.

Př. 3. Pro funkci $f(x,y) = x^2 + y^4$, $[x,y]\in\mathbb{R}^2$, opět platí $(*)$. Přitom $f(0,0) = 0$, $f(x,y) = x^2+y^4 > 0$ if $[x,y]\neq[0,0]$.
$\Rightarrow$ f má v bodě $[0,0]$ ostré lokální minimum.

---

*) Z rovnosti $U = U(a,\delta_1)\cap f_{-1}(U(b,\delta))$ a $f(a) = b$ ihned plyne, že U obsahuje bod a.

11. přednáška MA 3, šk. r. 2016/17, 7. 11. 2016

Definice. Zobrazení f z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^n$ se nazývá regulární na $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, jestliže:

(i) Ω je otevřená,

(ii) $f \in C^1(\Omega)$,

(iii) $J_f(x) \neq 0 \quad \forall x \in \Omega$.

Poznámka. Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ot. množina a $f: \Omega \to \mathbb{R}^n$ regulární zobrazení na Ω. Tedy $f \in C^1(\Omega)$ a $J_f(x) \neq 0 \ \forall x \in \Omega$. Pak dle Věty 33 (o lokálním difeomorfismu) $\forall x \in \Omega$ existuje ot. množina U_x obsahující bod x tak, že $f/_{U_x}$ je difeomorfismus na U_x třídy C^1 (a tedy f je lokálně prosté na Ω). Následující příklad ovšem ukazuje, že f nemusí být prosté na celé Ω.

Př: Buď $f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^2 - x_2^2 \\ 2x_1x_2 \end{pmatrix}$

$\forall \ x = [x_1, x_2] \in \Omega$, kde

$$\Omega = \{[x_1, x_2] \in \mathbb{R}^2, \ r_1 < \sqrt{x_1^2 + x_2^2} < r_2\} \quad \text{a} \quad 0 < r_1 < r_2 < +\infty.$$

Pak Ω je ot. množina, $f \in C^1(\Omega)$ a $\forall x = [x_1, x_2] \in \Omega$ platí

$$f'(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 & , -2x_2 \\ 2x_2 & , 2x_1 \end{pmatrix} \Rightarrow J_f(x) = 4(x_1^2 + x_2^2) \neq 0 \ \forall x \in \Omega.$$

Tedy f je regulární na Ω. Ovšem f není prosté na Ω, neboť pro $x \in \Omega$ platí $(-x) \in \Omega$ a $f(-x) = f(-x_1, -x_2) = f(x_1, x_2) = f(x)$.

Věta 34 (o inverzi prostého regulárního zobrazení). Je-li f zobrazení množiny $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, které je prosté a regulární na Ω, pak inverzní zobrazení f^{-1} je prosté a regulární na $f(\Omega)$.

Důkaz. Z předpokladů plyne, že $f \in C^1(\Omega)$. Buď $y \in f(\Omega)$. Pak ex. $x \in \Omega$ takový, že $f(x) = y$. Z Věty 33 (o lokálním difeomorfismu) plyne, že ex. ot. množina $U \subset \Omega$ obsahující bod x tak, že f/U je difeomorfismus. Tedy $f(U)$ je otevřená množina obsahující bod $f(x) = y$.

$$\Rightarrow \quad y = f(x) \in \underbrace{f(U)}_{\text{ot. množina}} \subset f(\Omega) \quad \Rightarrow \quad \underline{f(\Omega) \text{ je otevřená množina.}} \quad (1)$$

(neboť s každým bodem y obsahuje otevřenou množinu $f(U) \ni y$).

Navíc f^{-1} je třídy C^1 na $f(U) \ni y \quad \Rightarrow \quad \underline{f^{-1} \in C^1(f(\Omega)).} \quad (2)$

Protože

$$(f \circ f^{-1})(y) = Id(y) \quad \forall y \in f(\Omega),$$

platí

$$f'(f^{-1}(y)) \circ (f^{-1})'(y) = Id(y) \quad \forall y \in f(\Omega)$$

a odsud (přechodem k determinantům matic reprezentující daná zobrazení) plyne

$$J_f(f^{-1}(y)) \cdot J_{f^{-1}}(y) = 1 \quad \forall y \in f(\Omega).$$

Tedy $\underline{J_{f^{-1}}(y) \neq 0 \quad \forall y \in f(\Omega).} \quad (3)$

Z (1)–(3) plyne, že f^{-1} je regulární v $f(\Omega)$. Že f^{-1} je prosté, je jasné. $\square$

Dle Věty 34 <u>regulární a prosté zobrazení</u> f <u>ot. množiny $\Omega \subset \mathbb{R}^n$</u> do $\mathbb{R}^n$ splňuje:

$$f(\Omega) \text{ je otevřená}, \quad f \in C^1(\Omega), \quad f^{-1} \in C^1(f(\Omega)).$$

Zobrazení f je také bijekce množiny Ω na $f(\Omega)$ (neb f je prosté).
Tedy <u>f je difeomorfismus na Ω</u>.

Dokonce platí:

Věta 35 (charakteristika prostých regulárních zobrazení).
Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je (ot.) množina a $f: \Omega \to \mathbb{R}^n$. Pak f je regulární a prosté na Ω právě tehdy, je-li f difeomorfismus na Ω.

Důkaz: I. Implikace "$\Rightarrow$" je dokázána před Větou 35.
II. ad "$\Leftarrow$": Nechť tedy f je difeomorfismus na ot. množině Ω.

Pak:
1) f je bijekce na Ω, 2) $f(\Omega)$ je ot., 3) $f \in C^1(\Omega)$, 4) $f^{-1} \in C^1(f(\Omega))$.

Dále platí

$$(f^{-1} \circ f)(x) = Id(x) \quad \forall x \in \Omega$$

$$\Rightarrow (f^{-1})'(f(x)) \circ f'(x) = Id(x) \quad \forall x \in \Omega$$

$$\Rightarrow J_{f^{-1}}(f(x)) \cdot J_f(x) = 1 \quad \forall x \in \Omega$$

$$\Rightarrow 5) \quad J_f(x) \neq 0 \quad \forall x \in \Omega.$$

Pak z 1), 3), 5) a z faktu, že Ω je otevřená ihned máme, že f je regulární a prosté zobrazení na množině Ω. $\square$

Poznámka. Je-li f regulární a prosté zobrazení na ot. množině $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, pak z Věty 34 plyne, že $f(\Omega)$ je otevřená množina. Je-li dále g prosté a regulární zobrazení na množině $f(\Omega)$, pak složené zobrazení $h = g \circ f$ je prosté a regulární na Ω.

Důkaz. Že složené zobrazení h je prosté je jasné.
Z Věty 23 (složené zobrazení a třída C^k), 6. přednáška, plyne, že $h \in C^1(\Omega)$. Dále dle Věty 26 (derivace složeného zobrazení), platí

$$h'(x) = (g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \circ f'(x) \quad \forall x \in \Omega$$

$$\Rightarrow J_h(x) = \underbrace{J_g(f(x))}_{\neq 0} \cdot \underbrace{J_f(x)}_{\neq 0} \neq 0 \quad \forall x \in \Omega, \quad tj: J_h(x) \neq 0 \ \forall x \in \Omega.$$

$\square$

Číselné řady

Definice. Nechť $\pi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ je bijekce množiny $\mathbb{N}$ na $\mathbb{N}$. Nechť $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ je posl. komplex. čísel. Pak říkáme, že řada $\sum_{i=1}^{\infty} a_{\pi(i)}$ vznikla z řady $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ přerovnáním.

Lemma 36 (O limitě zbytku konvergentní řady po n-tém členu). Nechť $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ konverguje. Potom

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=n+1}^{\infty} a_i = 0.$$

Důkaz. Buď $s := \sum_{i=1}^{\infty} a_i$ a $s_n := \sum_{i=1}^{n} a_i$, kde $n \in \mathbb{N}$.

Pak

$$s - s_n = \sum_{i=n+1}^{\infty} a_i,$$

a tedy

$$(*) \qquad 0 = \lim_{n\to\infty} (s - s_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=n+1}^{\infty} a_i. \;{}^{*)} \qquad \square$$

Lemma 37 (NO NAME). Buď $\pi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijekce množiny $\mathbb{N}$ na $\mathbb{N}$ a $M \subset \mathbb{N}$ konečná množina. Pak ex. $n \in \mathbb{N}$ tak, že $M \subset \{\pi(1), \dots, \pi(n)\}$.

Důkaz. Je-li $M = \emptyset$, stačí volit $n = 1$.

Buď $M \neq \emptyset$, $M = \{m_1, \dots, m_j\}$, kde $m_i \in \mathbb{N}$ $\forall i = 1, \dots, j$.

Protože $M \subset \mathbb{N} = \pi(\mathbb{N})$, tak ex. $k_1, \dots, k_j \in \mathbb{N}$ splňující $\pi(k_i) = m_i$, $i = 1, \dots, j$. Buď $n := \max_{i \in \{1,\dots,j\}} \pi(k_i)$. Pak

$$M = \{m_1, \dots, m_j\} = \{\pi(k_1), \dots, \pi(k_j)\} = \pi(\{k_1, \dots, k_j\}) \subset$$
$$\subset \pi(\{1, \dots, n\}) = \{\pi(1), \dots, \pi(n)\}. \quad \square$$

---

*) Z $(*)$ dokonce plyne, že $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ konverguje $\iff \lim_{n\to\infty} \sum_{i=n+1}^{\infty} a_i = 0$.

Věta 38 (o přerovnání absolutně konvergentní řady). Nechť $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ je absolutně konvergentní řada komplex. čísel se součtem s. Potom každá řada $\sum_{i=1}^{\infty} a_{\pi(i)}$, která vznikla z řady $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ přerovnáním, je absolutně konvergentní a má součet s.

Poznámka. Dle Věty 38 součet abs. konvergentní řady nezávisí na pořadí jejích členů. To je zobecněním komutativního zákona platného pro součty konečně mnoha čísel. Pro neabsolutně konvergentní řady taková věta neplatí.

Důkaz Věty 38. Řada $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ je absolutně konvergentní a má součet s. Proto je konvergentní i řada

(1) $$\sum_{i=1}^{\infty} |a_i| =: S.$$

Tedy

(2) $$\forall n \in \mathbb{N}: \quad \sum_{i=1}^{n} |a_i| \le S.$$

Nechť řada

(3) $$\sum_{i=1}^{\infty} a_{\pi(i)}$$

vznikla z řady $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ přerovnáním. Pak

(4) $$\forall n \in \mathbb{N}: \quad \sum_{i=1}^{n} |a_{\pi(i)}| \le S,$$

neboť, je-li $p := \max\{\pi(1), \dots, \pi(n)\}$, pak

$$\sum_{i=1}^{n} |a_{\pi(i)}| \le \sum_{i=1}^{p} |a_i| \underset{\text{dle (2)}}{\le} S$$ (neb 2. s. obsahuje všechny sčítance 1. součtu).

Z (4) plyne, že řada (3) je abs. konvergentní. Buď t její součet. Chceme dokázat, že $s = t$. Položme

$$s_n := \sum_{i=1}^{n} a_i, \qquad t_n := \sum_{i=1}^{n} a_{\pi(i)}.$$

Tedy $\lim_{n\to\infty} s_n = s$, $\lim_{n\to\infty} t_n = t$. Proto stačí dokázat, že

$$0 = s - t = \lim_{n\to\infty} (s_n - t_n), \text{ tj.}$$

(5) $\lim_{n\to\infty} (s_n - t_n) = 0$.

Buď $\varepsilon > 0$. Protože $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|$ je konvergentní, má příslušný zbytek po n-tém členu limitu 0 (cf. Lemma 36). Odtud plyne, že

$$\exists n_1 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_1 : \sum_{i=n}^{\infty} |a_i| < \varepsilon .$$

Speciálně pro $n = n_1$ máme

(6) $\sum_{i=n_1}^{\infty} |a_i| < \varepsilon$.

(7) Proto také každý částečný součet řady $\sum_{i=n_1}^{\infty} |a_i|$ je menší než ε.

Dle Lemmatu 37 ex. $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že

$$\{1, \dots, n_1\} \subset \{\pi(1), \dots, \pi(n_0)\}.$$

Zřejmě $\underline{n_0 \geq n_1}$. Ukážeme, že

(8) $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 : |s_n - t_n| < \varepsilon$ (a tedy platí (5)).

Skutečně, je-li $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, pak

(9) $s_n - t_n = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n} a_{\pi(i)}$.

zde i zde se vyskytují čísla $a_1, \dots, a_{n_1}$, a tedy se odečtou

Pokud se všechny členy na RHS(9) neodečtou, pak tam zbydou pouze nějaká čísla $\pm a_j$, kde $j > n_1$. Tudíž

$$|s_n - t_n| \leq \sum_{i=n_1+1}^{m} |a_i| \quad \text{(kde } m \in \mathbb{N} \text{ je jisté vhodně zvolené číslo)}$$

$$\leq \sum_{i=n_1+1}^{\infty} |a_i| .$$

Odtud a z (6) dostáváme

$$|s_n - t_n| < \varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 ,$$

a (8) je dokázáno. $\square$

<u>Značení</u>. $x \in \mathbb{R}$, $x^+ := \max\{x, 0\}$, $x^- := \max\{-x, 0\}$

$\Rightarrow$ $x^+ \geq 0$, $x^- \geq 0$, $x = x^+ - x^-$, $|x| = x^+ + x^-$,

$(-x)^+ = x^-$, $(-x)^- = x^+$.

Lemma 39 (o $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^+$, $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^-$ pro neabsolutně konvergentní řadu $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$). Je-li $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ neabsolutně konvergentní řada reálných čísel, pak

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i^+ = +\infty = \sum_{i=1}^{\infty} a_i^- .$$

Důkaz. Protože řady $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^+$, $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^-$ jsou řady nezáporných čísel, tak jejich součty existují. Označme je po řadě s^+, s^-.

Kdyby $s^+, s^- \in \mathbb{R}$, pak by

$$s^+ + s^- = \sum_{i=1}^{\infty} a_i^+ + \sum_{i=1}^{\infty} a_i^- = \sum_{i=1}^{\infty} (\underbrace{a_i^+ + a_i^-}_{=|a_i|}) = \sum_{i=1}^{\infty} |a_i|$$

(použili jsme Větu 49(ii), MA1, 12. přednáška)

$\Rightarrow$ $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|$ konverguje – spor.

Kdyby $s^+ = +\infty$ a $s^- \in \mathbb{R}$, pak by (dle Věty 35 (aritmetika limit podruhé), MA1, 8. přednáška)

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = \sum_{i=1}^{\infty} a_i^+ - \sum_{i=1}^{\infty} a_i^- = +\infty \text{ – spor.}$$

Analogicky lze ukázat, že předpoklad $s^+ \in \mathbb{R}$ a $s^- = +\infty$ vede ke sporu.

Zbývá tedy jediná možnost $s^+ = +\infty = s^-$. $\square$

12. přednáška MA 3, šk. r. 2016/17, 9. 11. 2016

Pro neabsolutně konvergentní řady Věta 38 neplatí – viz následující tvrzení.

Věta 40 (Riemannova). Nechť $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ je neabsolutně konvergentní řada reálných čísel a nechť $s \in \mathbb{R}$. *) Pak existuje přerovnání této řady se součtem s.

Důkaz. Nechť

(1) $b_1, b_2, \ldots$

jsou nezáporné členy řady

(2) $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$

(napsané v pořadí, ve kterém se vyskytují v řadě (2)) a nechť

(3) $c_1, c_2, \ldots$

jsou záporné členy řady (2) (opět napsané v pořadí, v němž se vyskytují v řadě (2)).

Nechť

$$t := \sum_{i=1}^{\infty} b_i \quad , \quad u := \sum_{i=1}^{\infty} c_i \; .$$

Dle Lemmatu 39 platí

$$t = +\infty \quad , \quad u = -\infty \; ,$$

a tedy posloupnosti (1) a (3) obsahují nekonečný počet členů.

Řadu $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ přerovnáme takto: Buď n_1 nejmenší přirozené číslo takové, že

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_{n_1} > s$$

(takové n_1 existuje, neboť $t = +\infty$). Pak přidáváme záporné členy $c_1, c_2, \ldots$ tak dlouho, až nalezneme nejmenší přirozené číslo m_1 takové, že

(4) $$b_1 + b_2 + \ldots + b_{n_1} + c_1 + c_2 + \ldots + c_{m_1} < s$$

(což je možné, neboť $u = -\infty$).

Z uvedeného plyne

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_{n_1} + c_1 + c_2 + \ldots + c_{m_1 - 1} \geq s .$$

Odtud a z (4) pak máme

(5) $$b_1 + b_2 + \ldots + b_{n_1} + c_1 + c_2 + \ldots + c_{m_1} \geq s + c_{m_1} .$$

---

*) Drobnou úpravou důkazu lze ukázat, že Věta 40 platí i když $s \in \mathbb{R}^*$.

Nyní celý proces opakujeme, tj. přidáváme nezáporné členy $b_{n_1+1}, b_{n_1+2}, \dots$ tak dlouho, až najdeme nejmenší přirozené číslo $n_2 > n_1$ takové, že

$$b_1+\dots+b_{n_1}+c_1+\dots+c_{m_1}+b_{n_1+1}+\dots+b_{n_2} > s .$$

Tedy

$$b_1+\dots+b_{n_1}+c_1+\dots+c_{m_1}+b_{n_1+1}+\dots+b_{n_2-1} \le s ,$$

a proto

$$(6) \qquad b_1+\dots+b_{n_1}+c_1+\dots+c_{m_1}+b_{n_1+1}+\dots+b_{n_2} \le s+b_{n_2} .$$

Pak přidáváme záporné členy $c_{m_1+1}, c_{m_1+2}, \dots$ tak dlouho, až nalezneme nejmenší přirozené číslo $m_2 > m_1$ tak, že

$$b_1+\dots+b_{n_1}+c_1+\dots+c_{m_1}+b_{n_1+1}+\dots+b_{n_2}+c_{m_1+1}+\dots+c_{m_2} < s .$$

Tedy

$$b_1+\dots+b_{n_1}+c_1+\dots+c_{m_1}+b_{n_1+1}+\dots+b_{n_2}+c_{m_1+1}+\dots+c_{m_2-1} \ge s ,$$

a proto

$$(7) \qquad b_1+\dots+b_{n_1}+c_1+\dots+c_{m_1}+b_{n_1+1}+\dots+b_{n_2}+c_{m_1+1}+\dots+c_{m_2} \ge s+c_{m_2} .$$

Takto pokračujeme a (pomocí mat. indukce) nalezneme dvě posloupnosti přirozených čísel

$$n_1 < n_2 < \dots \quad , \qquad m_1 < m_2 < \dots .$$

Řada

$$(8) \qquad \overbrace{b_1+\dots+b_{n_1}+c_1+\dots+c_{m_1}}^{1.\ \text{skupina}} + \dots\dots + c_{m_k} +$$

$$+ \underbrace{b_{n_k+1}+\dots+b_{n_{k+1}} + c_{m_k+1}+\dots+c_{m_{k+1}}}_{(k+1)\text{-ní skupina}} + b_{n_{k+1}+1} + \dots$$

vznikla přerovnáním řady $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$.

Tvrdíme, že součet řady (8) je s. Označme symbolem σ_j j-tý částečný součet řady (8).

Platí

$$(9) \qquad \sigma_{n_k+m_k} \ge s + c_{m_k} \qquad (\text{cf. } (5), (7)) ,$$

$$(10) \qquad \sigma_{n_{k+1}+m_k} \le s + b_{n_{k+1}} \qquad (\text{cf. } (6))$$

Protože $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ konverguje, platí $\lim_{i\to\infty} a_i = 0$. Odtud plyne, že pro vybranné posloupnosti (1) a (3) platí

$$\lim_{i\to\infty} b_i = 0 = \lim_{i\to\infty} c_i .$$

Tudíž

$$(11) \qquad \lim_{k\to\infty} b_{n_{k+1}} = 0 = \lim_{k\to\infty} c_{m_k}$$

(neboť jde o vybranné posloupnosti z (1) a z (2)).

Buď $j \in \mathbb{N}$, $j > n_1 + m_1$. Pak ex. $k = k(j) \in \mathbb{N}$ tak, že

$$n_k + m_k < j \leq n_{k+1} + m_{k+1}$$

$\Rightarrow$ poslední člen v součtu σ_j leží v $(k+1)$-ní skupině řady (8). Přitom součet členů před $(k+1)$-ní skupinou je $\sigma_{n_k + m_k}$ a platí (9). Pak přidáváme nezáporná čísla b_i až dosáhneme $\sigma_{n_{k+1}+m_k}$ a platí (10). Pak se přidávají záporná čísla c_i až se dosáhne součtu $\sigma_{n_{k+1}+m_{k+1}}$, pro který platí

$$(12) \qquad \sigma_{n_{k+1}+m_{k+1}} \geq s + c_{m_{k+1}} .$$

Tedy

$$(13) \qquad s + \min(c_{m_k}, c_{m_{k+1}}) \leq \sigma_j \leq s + b_{n_{k+1}},$$

jestliže

$$(14) \qquad n_k + m_k < j \leq n_{k+1} + m_{k+1}.$$

Je-li $j \to +\infty$, pak z (14) plyne, že $k = k(j) \to +\infty$. Odtud, z (13) a z (11) pak dostaneme, že

$$\lim_{j\to+\infty} \sigma_j = s . \qquad \square$$

Definice. Cauchyovým součinem řad $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ a $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ rozumíme řadu $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$, kde $c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$ $\forall k \in \mathbb{N}_0$.

Věta 41 (Mertensova). Nechť řada $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolutně konverguje a řada $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konverguje. Pak Cauchyův součin těchto řad je konvergentní řada a platí

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}\right) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right).$$

Důkaz. Pro $k \in \mathbb{N}_0$ označme

$$A_n := \sum_{i=0}^{n} a_i, \qquad A := \sum_{i=0}^{\infty} a_i, \qquad \tilde{A} := \sum_{i=0}^{\infty} |a_i|,$$

$$B_n := \sum_{i=0}^{n} b_i, \qquad B := \sum_{i=0}^{\infty} a_i, \qquad \beta_n := B_n - B,$$

$$c_n := \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}, \qquad C_n := \sum_{i=0}^{n} c_i.$$

Pak pro $n \in \mathbb{N}_0$ platí

$$
\begin{aligned}
(1)\quad C_n &= (a_0 b_0) + (a_0 b_1 + a_1 b_0) + \dots + (a_0 b_n + \dots + a_n b_0) \\
&= a_0 (b_0 + b_1 + \dots + b_n) + a_1 (b_0 + \dots + b_{n-1}) + \dots + a_n b_0 \\
&= a_0 B_n + a_1 B_{n-1} + \dots + a_n B_0 \\
&= a_0 (B + \beta_n) + a_1 (B + \beta_{n-1}) + \dots + a_n (B + \beta_0) \\
&= (a_0 + a_1 + \dots + a_n) B + (a_0 \beta_n + a_1 \beta_{n-1} + \dots + a_n \beta_0) \\
&= A_n B + (a_0 \beta_n + a_1 \beta_{n-1} + \dots + a_n \beta_0) \\
&= A_n B + \sum_{i=0}^{n} a_{n-i} \beta_i .
\end{aligned}
$$

Buď $\gamma_n := \sum_{i=0}^{n} a_{n-i} \beta_i$ $\forall n \in \mathbb{N}_0$. Ukážeme, že $\lim_{n\to\infty} \gamma_n = 0$.

Nechť $\varepsilon > 0$. Protože $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konverguje, tak (dle Lemmatu 36) $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že

$$\forall i \in \mathbb{N},\ i \geq n_0 : |\beta_i| < \varepsilon .$$

Pak pro $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ platí

$$(2)\quad |\gamma_n| = \left|\sum_{i=0}^{n} a_{n-i} \beta_i\right| \leq \left|\sum_{i=0}^{n_0} a_{n-i} \beta_i\right| + \left|\sum_{i=n_0+1}^{n} a_{n-i} \beta_i\right|$$

$$\le \left|\sum_{i=0}^{n_0} a_{n-i}\beta_i\right| + \sum_{i=n_0+1}^{n} |a_{n-i}|\underbrace{|\beta_i|}_{<\varepsilon}$$

$$\le \left|\sum_{i=0}^{n_0} a_{n-i}\beta_i\right| + \varepsilon \underbrace{\sum_{i=n_0+1}^{n} |a_{n-i}|}_{\le \bar{A}}$$

$$\le \left|\sum_{i=0}^{n_0} a_{n-i}\beta_i\right| + \varepsilon\cdot\bar{A}.$$

Protože $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, tak $\forall i \in \{0,\dots,n_0\}$ platí $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n-i} = 0$.

Tudíž, dle věty o aritmetice limit platí

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n_0} a_{n-i}\beta_i = 0.$$

Odtud a z odhadu (2) pak plyne, že

$$\limsup_{n\to\infty} |\gamma_n| \le \varepsilon\cdot\bar{A}.$$

Protože ε bylo libovolné kladné číslo, tak platí $\lim\limits_{n\to\infty}|\gamma_n| = 0$, a tedy $\lim\limits_{n\to\infty}\gamma_n = 0$.

Limitním přechodem (pro $n\to\infty$) v (1) pak dostáváme

$$\underbrace{\lim_{n\to\infty} C_n}_{=\sum_{i=0}^{\infty} c_i} = \lim_{n\to\infty}(A_n B + \gamma_n) = AB. \quad \square$$

Věta 42 (Důsledek Mertensovy věty). Cauchyův součin dvou absolutně konvergentních řad je absolutně konvergentní řada.

Důkaz. Podle Mertensovy věty je Cauchyův součin řad $\sum_{i=0}^{\infty}|a_i|$ a $\sum_{i=0}^{\infty}|b_i|$ konvergentní řada. Odtud plyne:

Je-li $c_k := \sum_{i=0}^{k} a_i b_{n-i}$, pak

$$\sum_{k=0}^{\infty}|c_k| = \sum_{k=0}^{\infty}\left|\sum_{i=0}^{k} a_i b_{n-i}\right| \le \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{k}|a_i|\,|b_{n-i}|\right) < \infty. \quad \square$$

Věta 43 (Abelova). Nechť $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ a $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ jsou konvergentní řady, jejichž Cauchyův součin konverguje. Pak platí

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}\right) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right).$$

Důkaz vynecháme.

Komplexní exponenciela

Věta 82 (existence exponenciální fce) (18. přednáška MA 1)

Existuje právě jedna fce $\exp: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s vlastnostmi:

(1) $D(f) = \mathbb{R}$,

(2) $\forall x, y \in \mathbb{R}: (\exp x)(\exp y) = \exp(x+y)$

(3) $\lim_{x \to 0} \frac{\exp x - 1}{x} = 1$.

Důkaz proveden na 7. přednášce MA 2 tak, že jsme položili $\exp x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ $\forall x \in \mathbb{R}$ a dokázali jsme, že tato fce má požadované vlastnosti.

Ovšem mocninná řada $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ konverguje absolutně $\forall z \in \mathbb{C}$. Můžeme tedy zavést exponenciální fci v $\mathbb{C}$ předpisem

$$\boxed{(*) \quad \exp z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \quad \forall z \in \mathbb{C}.}$$

Je-li $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, pak

$$(2*) \quad (z_1+z_2)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} z_1^i z_2^{k-i} = \sum_{i=0}^{k} \frac{k(k-1)\dots(k-i+1)}{i!} z_1^i z_2^{k-i} =$$

$$= \sum_{i=0}^{k} k! \frac{z_1^i}{i!} \frac{z_2^{k-i}}{(k-i)!} = k! \sum_{i=0}^{k} \frac{z_1^i}{i!} \frac{z_2^{k-i}}{(k-i)!}$$

a tedy

$$(\exp z_1)(\exp z_2) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z_1^k}{k!}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z_2^k}{k!}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{k} \frac{z_1^i}{i!} \frac{z_2^{k-i}}{(k-i)!}\right) =$$

provedu Cauchyův součin absolutně konvergentních řad

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z_1+z_2)^k}{k!} = \exp(z_1+z_2), \text{ tj.}$$

dle (2*) dle (*)

$$\boxed{(3*) \quad (\exp z_1)(\exp z_2) = \exp(z_1+z_2) \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}}$$

Na 8. přednášce MA 2 jsme ukázali, že pokud definujeme $\exp z$ předpisem (*), $\sin z := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{2k+1}$, $\cos z := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{2k!}$ $\forall z \in \mathbb{C}$, pak platí

$$(4*) \quad \exp(iz) = \cos z + i \sin z \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

Speciálně tedy máme

$$(5*) \quad \exp(iy) = \cos y + i \sin y \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Tedy pro $z = x+iy$, kde $x, y \in \mathbb{R}$ platí

(6*) $\underline{\exp z} = \exp(x+iy) \underset{\text{dle }(3*)}{=} (\exp x)\exp(iy) \underset{\text{dle }(5*)}{=} \underline{(\exp x)(\cos y + i\sin y)}$

(což je vyjádření fce $\exp z$, $z \in \mathbb{C}$, pomocí reálných fcí).

Poznamenejme, že i v $\mathbb{C}$ platí

(7*) $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{\exp z - 1}{z} = 1$ (cf. (3), důkaz je stejný jako důkaz (3)).

Poznamenejme ještě, že

(8*) $\underline{(\cos y + i \sin y)^n = (\cos ny + i\sin ny) \quad \forall y \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N}}$, (tzv. Moivrova věta)

neboť

$LHS(8*) \underset{\text{dle }(5*)}{=} (\exp(iy))^n \underset{\text{dle }(3*)}{=} \exp(iny) \underset{\text{dle }(5*)}{=} \cos ny + i\sin ny = RHS(8*)$.

13. přednáška MA 3, šk. r. 2016/17, 14. 11. 2016

Definice. Buď I množina a $\mathcal{F}(I)$ množina všech konečných podmnožin množiny I. Nechť $\forall \alpha \in I$ je $x_\alpha \in \mathbb{R}$. Symbol

(1) $$\sum_{\alpha \in I} x_\alpha$$

nazýváme zobecněnou řadou.

Řekneme, že $x \in \mathbb{R}^*$ je součet zob. řady (1), jestliže

(2) $$\forall U(x)\ \exists F \in \mathcal{F}(I)\ \forall F' \in \mathcal{F}(I),\ F' \supset F: \sum_{\alpha \in F'} x_\alpha \in U(x).$$

Platí-li (2), píšeme

$$\sum_{\alpha \in I} x_\alpha = x$$

a říkáme, že zob. řada (1) má součet. Je-li navíc $x \in \mathbb{R}$, říkáme, že zob. řada (1) je konvergentní. Není-li zob. řada (1) konvergentní, říkáme, že je divergentní.

Zob. řadu (1) nazveme absolutně konvergentní, je-li konvergentní zob. řada $\sum_{\alpha \in I} |x_\alpha|$.

Poznámka. Symbol $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha$ značí jednak zob. řadu a také její součet, pokud tato řada má součet.

Věta 44 (vlastnosti součtu zob. řady).

(i) (jednoznačnost) Zob. řada (1) má nejvýše jeden součet.

(ii) (linearita) a) Nechť zob. řady $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha$ a $\sum_{\alpha \in I} y_\alpha$ mají součet. Je-li výraz $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha + \sum_{\alpha \in I} y_\alpha$ definován, pak má součet i zob. řada $\sum_{\alpha \in I} (x_\alpha + y_\alpha)$ a platí

(3) $$\sum_{\alpha \in I} (x_\alpha + y_\alpha) = \sum_{\alpha \in I} x_\alpha + \sum_{\alpha \in I} y_\alpha.$$

b) Nechť zob. řada $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha$ má součet a $c \in \mathbb{R}$. Je-li výraz $\sum_{\alpha \in I} c x_\alpha$ definován, pak má součet i zob. řada $\sum_{\alpha \in I} c x_\alpha$ a platí

(4) $$\sum_{\alpha \in I} c x_\alpha = c \sum_{\alpha \in I} x_\alpha.$$

Důkaz. ad (i). Předpokládejme, že $x, y \in \mathbb{R}^*$ jsou součtem zob. řady (1). Je-li $x \neq y$, pak ex. $U(x)$ a $U(y)$ tak, že $U(x) \cap U(y) = \emptyset$. Dále ex. $F_1, F_2 \in \mathcal{F}(I)$ takové, že

$\forall F \in \mathcal{F}(I),\ F \supset F_1 :\ \sum_{\alpha \in F} x_\alpha \in U(x)$

a $\forall F \in \mathcal{F}(I),\ F \supset F_2 :\ \sum_{\alpha \in F} x_\alpha \in U(y)$.

Pak ovšem platí

$$\sum_{\alpha \in F_1 \cup F_2} x_\alpha \in U(x) \cap U(y) = \emptyset \quad \text{– spor.}$$

Tedy $x = y$.

ad (ii). a) Nechť $x := \sum_{\alpha \in I} x_\alpha$, $y := \sum_{\alpha \in I} y_\alpha$.

Budeme rozlišovat několik případů:

Buď $x, y \in \mathbb{R}$. Nechť $\varepsilon > 0$. Pak $\exists F_1, F_2 \in \mathcal{F}(I)$ tak, že

$\forall F \in \mathcal{F}(I),\ F \supset F_1 :\ \left| \sum_{\alpha \in F} x_\alpha - x \right| < \frac{\varepsilon}{2}$

a $\forall F \in \mathcal{F}(I),\ F \supset F_2 :\ \left| \sum_{\alpha \in F} y_\alpha - y \right| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Pak $\forall F \in \mathcal{F}(I)$ splňující $F \supset F_1 \cup F_2$ máme

$$\left| \sum_{\alpha \in F} (x_\alpha + y_\alpha) - (x+y) \right| \leq \left| \sum_{\alpha \in F} x_\alpha - x \right| + \left| \sum_{\alpha \in F} y_\alpha - y \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

a tedy (3) platí.

Buď $x = +\infty$, $y \in \mathbb{R}$. Protože $RHS(3) = +\infty$, máme dokázat, že

(5) $$\sum_{\alpha \in I} (x_\alpha + y_\alpha) = +\infty .$$

Buď $K \in (0, +\infty)$. Pak ex. $F_1, F_2 \in \mathcal{F}(I)$ tak, že

$\forall F \in \mathcal{F}(I),\ F \supset F_1 :\ \sum_{\alpha \in F} x_\alpha > K - y + 1$

a $\forall F \in \mathcal{F}(I),\ F \supset F_2 :\ \sum_{\alpha \in I} y_\alpha > y - 1$.

Tedy $\forall F \in \mathcal{F}(I)$ splňující $F \supset F_1 \cup F_2$ platí

$$\sum_{\alpha \in F} (x_\alpha + y_\alpha) = \sum_{\alpha \in F} x_\alpha + \sum_{\alpha \in F} y_\alpha > (K - y + 1) + (y - 1) = K .$$

Protože $K \in (0, +\infty)$ bylo libovolné číslo, platí (5).

Zbývají tři případy: $x = +\infty \wedge y = +\infty$;
$x = -\infty \wedge y \in \mathbb{R}$,
$x = -\infty \wedge y = -\infty$.

Protože důkazy v těchto případech jsou obdobné jako v případech výše uvedených, přenecháme je čtenáři.

b) Je-li $c=0$, pak výraz $c\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ je definován pouze, pokud $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha \in \mathbb{R}$, a tudíž RHS(4) = 0. Protože LHS(4) $= \sum_{\alpha\in I} 0 = 0$, rovnost (4) platí.

Buď tedy $c \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ a $x := \sum_{\alpha\in I} x_\alpha$. Rozlišíme několik případů:

Buď $x\in\mathbb{R}$. Nechť $\varepsilon>0$. Pak $\exists F\in\mathcal{F}(I)$ tak, že

$$\forall F'\in\mathcal{F}(I),\ F'\supset F: \left|\sum_{\alpha\in F'} x_\alpha - x\right| < \frac{\varepsilon}{|c|}.$$

Proto $\forall F'\in\mathcal{F}(I)$, $F'\supset F$, máme

$$\left|\sum_{\alpha\in F'} c x_\alpha - cx\right| = |c|\cdot\left|\sum_{\alpha\in F'} x_\alpha - x\right| < |c|\cdot\frac{\varepsilon}{|c|} = \varepsilon$$

$\Rightarrow$ platí (4).

Buď $x=+\infty$ a $c\in(-\infty,0)$. Buď $K\in(0,+\infty)$. Pak $\exists F\in\mathcal{F}(I)$ tak, že

$$\forall F'\in\mathcal{F}(I),\ F'\supset F: \sum_{\alpha\in F'} x_\alpha > \frac{K}{|c|}$$

Proto $\forall F'\in\mathcal{F}(I)$, $F'\supset F$, máme

$$\sum_{\alpha\in F'} c x_\alpha = c\sum_{\alpha\in F'} x_\alpha < c\frac{K}{|c|} = -K.$$

Protože $K\in(0,+\infty)$ bylo libovolné, platí $\sum_{\alpha\in I} c x_\alpha = -\infty = \text{RHS}(4)$. Tedy (4) opět platí.

Důkazy v ostatních případech lze provést analogicky (a přenecháme je čtenáři). $\square$

Věta 45 (další vlastnosti součtu zob. řady).

(i) Jestliže $x_\alpha \geq 0$ $(x_\alpha \leq 0)$ $\forall \alpha\in I$ pak zob. řada $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ má součet a platí

(6) $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha = \sup\left\{\sum_{\alpha\in F} x_\alpha;\ F\in\mathcal{F}(I)\right\}$

((6') $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha = \inf\left\{\sum_{\alpha\in F} x_\alpha;\ F\in\mathcal{F}(I)\right\}$).

(ii) Zob. řady $\sum_{\alpha\in I}|x_\alpha|$, $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha^+$ a $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha^-$ mají součet a platí

(7) $\sum_{\alpha\in I}|x_\alpha| = \sum_{\alpha\in I} x_\alpha^+ + \sum_{\alpha\in I} x_\alpha^-$.

(iii) Zob. řada $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ má součet tehdy a jen tehdy, je-li definován výraz $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha^+ - \sum_{\alpha\in I} x_\alpha^-$. V tomto případě platí

(8) $$\sum_{\alpha\in I} x_\alpha = \sum_{\alpha\in I} x_\alpha^+ - \sum_{\alpha\in I} x_\alpha^-.$$

Důkaz. ad (i). Nechť $x_\alpha \geq 0 \ \forall \alpha\in I$ a

$$s := \sup\left\{\sum_{\alpha\in F} x_\alpha;\ F\in\mathcal{F}(I)\right\}.$$

Pak platí

(9) $$\sum_{\alpha\in F} x_\alpha \leq s \quad \forall F\in\mathcal{F}(I).$$

Buď $s'\in\mathbb{R}$, $s'<s$. Z definice suprema plyne, že

$$\exists F\in\mathcal{F}(I):\ \sum_{\alpha\in F} x_\alpha > s'.$$

Pak pro $\forall F'\in\mathcal{F}(I)$, $F'\supset F$ platí

$$\sum_{\alpha\in F'} x_\alpha \geq \sum_{\alpha\in F} x_\alpha > s'.$$

Odtud a z (9) pak plyne, že $s = \sum_{\alpha\in I} x_\alpha$. (Důkaz (6') je obdobný.) ./.

ad (ii). Z (i) plyne, že zob. řady $\sum_{\alpha\in I}|x_\alpha|$, $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha^+$ a $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha^-$ mají součet a pro tyto zob. řady pak, dle Věty 44 (ii), platí (7).

ad (iii). Buď

$$P := \{\alpha\in I;\ x_\alpha \geq 0\}, \quad N := \{\alpha\in I;\ x_\alpha < 0\},$$

($9\frac{1}{2}$) $$p := \sum_{\alpha\in I} x_\alpha^+, \quad n := \sum_{\alpha\in I} x_\alpha^-. \ ^{*)}$$

Nejprve dokážeme, že

(10) $$p = \sum_{\alpha\in P} x_\alpha, \quad n = -\sum_{\alpha\in N} x_\alpha.$$

Protože

(11) $$\left\{\sum_{\alpha\in F} x_\alpha^+;\ F\in\mathcal{F}(I)\right\} = \left\{\sum_{\alpha\in F} x_\alpha;\ F\in\mathcal{F}(P)\right\},$$

(12) $$\left\{\sum_{\alpha\in F} x_\alpha^-;\ F\in\mathcal{F}(I)\right\} = \left\{-\sum_{\alpha\in F} x_\alpha;\ F\in\mathcal{F}(N)\right\},$$

tak, dle (i) a (11), platí

$$\underline{\underline{\sum_{\alpha\in I} x_\alpha^+}} \underset{\text{dle (i)}}{=} \sup\left\{\sum_{\alpha\in F} x_\alpha^+;\ F\in\mathcal{F}(I)\right\} \underset{\text{dle (11)}}{=} \sup\left\{\sum_{\alpha\in F} x_\alpha;\ F\in\mathcal{F}(P)\right\} \overset{\text{dle (i)}}{=} \underline{\underline{\sum_{\alpha\in P} x_\alpha}}$$

a, dle (i) a (12),

$$\underline{\underline{-\sum_{\alpha\in I} x_\alpha^-}} \underset{\text{dle (i)}}{=} -\sup\left\{\sum_{\alpha\in F} x_\alpha^-;\ F\in\mathcal{F}(I)\right\} \underset{\text{dle (12)}}{=} -\sup\left\{-\sum_{\alpha\in F} x_\alpha;\ F\in\mathcal{F}(N)\right\} =$$

$$= \inf\left\{\sum_{\alpha\in F} x_\alpha;\ F\in\mathcal{F}(N)\right\} \underset{\text{dle (6')}}{=}$$

$$= \underline{\underline{\sum_{\alpha\in N} x_\alpha}}.$$

*) Tedy $p\geq 0$, $n\geq 0$.

Tedy platí (10).

Nyní dokážeme, že když zob. řada $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ má součet, pak rozdíl $p-n$ je definován. Předpokládejme, že rozdíl $p-n$ není definován. Pak $p=+\infty=n$. Buď $F\in\mathcal{F}(I)$.

Z faktu, že $+\infty = p = \sum_{\alpha\in P} x_\alpha = \sup\{\sum_{\alpha\in G} x_\alpha;\ G\in\mathcal{F}(P)\}$ plyne

$$+\infty = \sup\{\sum_{\alpha\in G} x_\alpha;\ G\in\mathcal{F}(P\setminus F)\} \left(=\sum_{\alpha\in P\setminus F} x_\alpha\right),$$

a tedy ex. $G_1\in\mathcal{F}(P\setminus F)$ tak, že

$$(13)\quad \sum_{\alpha\in G_1} x_\alpha > 1-\sum_{\alpha\in F} x_\alpha .$$

Podobně, z faktu, že $-\infty = -n = \sum_{\alpha\in N} x_\alpha = \inf\{\sum_{\alpha\in G} x_\alpha;\ G\in\mathcal{F}(N)\}$ plyne, že

$$-\infty = \inf\{\sum_{\alpha\in G} x_\alpha;\ G\in\mathcal{F}(N\setminus F)\} \left(=\sum_{\alpha\in N\setminus F} x_\alpha\right),$$

a tedy ex. $G_2\in\mathcal{F}(N\setminus F)$ tak, že

$$(14)\quad \sum_{\alpha\in G_2} x_\alpha < -1-\sum_{\alpha\in F} x_\alpha .$$

Buď $F_1 := F\cup G_1$ a $F_2 = F\cup G_2$. Pak $F_1, F_2\in\mathcal{F}(N)$, obě množiny obsahují danou množinu F, která je libovolná z $\mathcal{F}(I)$, a platí

$$\sum_{\alpha\in F_1} x_\alpha = \sum_{\alpha\in F\cup G_1} x_\alpha = \sum_{\alpha\in F} x_\alpha + \sum_{\alpha\in G_1} x_\alpha \overset{\text{dle (13)}}{>} 1,$$

$$\sum_{\alpha\in F_2} x_\alpha = \sum_{\alpha\in F\cup G_2} x_\alpha = \sum_{\alpha\in F} x_\alpha + \sum_{\alpha\in G_2} x_\alpha \underset{\text{dle (14)}}{<} -1,$$

což je ve sporu s předpokladem existence součtu zob. řady $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$.

Tedy rozdíl $p-n$ je definován.

Naopak, je-li rozdíl $p-n = \sum_{\alpha\in I} x_\alpha^+ - \sum_{\alpha\in I} x_\alpha^-$ definován, pak, dle Věty 4.4 (ii), zobecněná řada $\sum_{\alpha\in I} (\underbrace{x_\alpha^+ - x_\alpha^-}_{=x_\alpha}) = \sum_{\alpha\in I} (x_\alpha^+ + (-1)x_\alpha^-)$ má součet a platí

$$\sum_{\alpha\in I} x_\alpha = \sum_{\alpha\in I} x_\alpha^+ - \sum_{\alpha\in I} x_\alpha^- . \qquad \square$$

Věta 46 (srovnávací kritérium pro zob. řady). Nechť $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha$ a $\sum_{\alpha \in I} y_\alpha$ jsou zob. řady takové, že $0 \le y_\alpha \le x_\alpha \ \forall \alpha \in I$. Pak součty těchto řad existují a platí $\sum_{\alpha \in I} y_\alpha \le \sum_{\alpha \in I} x_\alpha$. Jestliže navíc zob. řada $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha$ konverguje, pak konverguje i zob. řada $\sum_{\alpha \in I} y_\alpha$.

Důkaz. Z Věty 45(i) plyne existence součtů obou zob. řad. Dále, vzhledem k nerovnostem $0 \le y_\alpha \le x_\alpha \ \forall \alpha \in I$, máme

$$0 \le \sup\{\sum_{\alpha \in F} y_\alpha;\ F \in \mathcal{F}(I)\} \le \sup\{\sum_{\alpha \in F} x_\alpha;\ F \in \mathcal{F}(I)\}.$$

Odtud a z Věty 45(i) plyne

$$\sum_{\alpha \in I} y_\alpha \le \sum_{\alpha \in I} x_\alpha$$

a z této nerovnosti plyne také tvrzení o konvergenci. $\square$

Věta 47 (o absolutní konvergenci zob. řady). Zob. řada $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha$ je absolutně konvergentní právě tehdy, je-li konvergentní.

Důkaz. Nechť zob. řada $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha$ je abs. konvergentní. Protože

$$0 \le x_\alpha^+ \le |x_\alpha| \quad \text{a} \quad 0 \le x_\alpha^- \le |x_\alpha| \quad \forall \alpha \in I,$$

tak z Věty 46 plyne, že zob. řady $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha^+$ i $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha^-$ jsou konvergentní. Tedy zob. řada $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha$ je konvergentní podle Věty 45(iii) (neboť výraz $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha^+ - \sum_{\alpha \in I} x_\alpha^-$ je definován).

Předpokládejme nyní, že zob. řada $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha$ je konvergentní. Z Věty 45(iii) pak plyne, že i zob. řady $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha^+$, $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha^-$ konvergují*) a podle Věty 45(ii) konverguje i zob. řada $\sum_{\alpha \in I} |x_\alpha|$. $\square$

---

*) Neboť $\underbrace{\sum_{\alpha \in I} x_\alpha}_{\in \mathbb{R}} \overset{\text{Věta 45(iii)}}{=} \sum_{\alpha \in I} x_\alpha^+ - \sum_{\alpha \in I} x_\alpha^-$, a tedy nutně $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha^+ \in \mathbb{R}$ a $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha^- \in \mathbb{R}$.

Věta 48 (nutné podmínky pro konvergenci zob. řady).

Jestliže zob. řada $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ konverguje, pak:

(i) $\forall n\in\mathbb{N}$ je množina $I_n := \{\alpha\in I;\ |x_\alpha| > \frac{1}{n}\}$ konečná;

(ii) množina $\{\alpha\in I;\ x_\alpha \neq 0\}$ je spočetná.

Důkaz. Podle Věty 44 je zob. řada $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ abs. konvergentní, a tedy $s := \sum_{\alpha\in I} |x_\alpha| < +\infty$. Buď $n\in\mathbb{N}$, $F\in\mathcal{F}(I_n)$ a $|F|$ počet prvků množiny F. Pak z definice množiny I_n a z Věty 45 (i) plyne

$$|F| = \sum_{\alpha\in F} 1 = n\sum_{\alpha\in F}\frac{1}{n} \underset{\text{dle definice množiny } I_n}{\leq} n\sum_{\alpha\in F}|x_\alpha| \underset{\text{dle Věty 45 (i)}}{\leq} ns.$$

Odtud a z Věty 45 (i) pak máme

$$\sum_{\alpha\in I_n} 1 = \sup\{\sum_{\alpha\in F} 1;\ F\in\mathcal{F}(I_n)\} \leq ns,$$

tj. počet prvků množiny I_n není větší než ns (a tedy je konečný). Protože

$$\{\alpha\in I;\ x_\alpha\neq 0\} = \{\alpha\in I;\ |x_\alpha| > 0\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n,$$

je množina $\{\alpha\in I;\ x_\alpha\neq 0\}$ spočetná. $\square$

Věta 49 (o přerovnání zob. řady). Nechť zob. řada $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ má součet a $\pi: I\to I$ je bijekce množiny I na I. Pak má součet i zob. řada $\sum_{\alpha\in I} x_{\pi(\alpha)}$ a platí

$$\sum_{\alpha\in I} x_\alpha = \sum_{\alpha\in I} x_{\pi(\alpha)}.$$

Důkaz. Buď $\varepsilon > 0$ a $s := \sum_{\alpha\in I} x_\alpha$. Pak ex. $F\in\mathcal{F}(I)$ tak, že

(*) $\quad \forall F'\in\mathcal{F}(I),\ F'\supset F:\ \sum_{\alpha\in F'} x_\alpha \in \mathcal{U}(s,\varepsilon).$

Nechť $G := \pi^{-1}(F)$. Pak $G\in\mathcal{F}(I)$. Je-li $G'\in\mathcal{F}(I)$, $G'\supset G = \pi^{-1}(F)$, pak $F' := \pi(G')\supset F$ a dle (*) platí

$$\sum_{\alpha \in G'} x_{\pi(\alpha)} = \sum_{\alpha \in F'} x_\alpha \in U(s,\varepsilon).$$

Protože G' byla libovolná množina z $\mathcal{F}(I)$ obsahující $G \in \mathcal{F}(I)$, platí $\sum_{\alpha \in I} x_{\pi(\alpha)} = s.$ □

Poznámka. Jestliže $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ je posl. reálných čísel, pak můžeme uvažovat dvě různé řady. Jednak řadu $\sum_{n=1}^\infty x_n$ a jednak zob. řadu $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$. Jejich vzájemný vztah popisuje následující věta.

Věta 50 (o zobecněném součtu na $\mathbb{N}$). Buď $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ posl. reálných čísel.

(i) Zobecněná řada $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ je konvergentní právě tehdy, je-li řada $\sum_{n=1}^\infty x_n$ absolutně konvergentní. V tomto případě platí

(1) $$\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n = \sum_{n=1}^\infty x_n.$$

(ii) Má-li zob. řada $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ součet, pak má součet i řada $\sum_{n=1}^\infty x_n$ a platí (1).

Důkaz. ad(i). Dle Věty 47 zob. řada $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ konverguje $\Leftrightarrow$ zob. řada $\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$ konverguje. Z definice konvergence zob. řady a z Věty 45(i) pak plyne, že

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n| \text{ konverguje} \Leftrightarrow \sup\Big\{\sum_{n\in F} |x_n|;\ F\in\mathcal{F}(\mathbb{N})\Big\} < +\infty.$$

Poslední nerovnost je ekvivalentní s nerovností

(2) $$\sup\Big\{\sum_{n=1}^k |x_n|;\ k\in\mathbb{N}\Big\} < +\infty.$$

Nerovnost (2) ovšem platí $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^\infty |x_n|$ konverguje $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^\infty x_n$ konverguje absolutně.

Z části (i) zbývá dokázat (1). Nechť tedy $\sum_{n=1}^\infty x_n$ konverguje absolutně. Buď $s := \sum_{n=1}^\infty x_n$ a $\varepsilon > 0$. Protože $\sum_{n=1}^\infty |x_n|$ konverguje, splňuje B-C podmínku pro konvergenci této řady. Z uvedeného plyne

$$\exists k_0\in\mathbb{N}\ \forall k\in\mathbb{N}, k\ge k_0: \Big|s-\sum_{n=1}^k x_n\Big| < \frac{\varepsilon}{2} \ \wedge\ \sum_{n=k_0}^k |x_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Buď $F := \{1,\dots,k_0\}$ a $F' \in \mathcal{F}(\mathbb{N})$, $F' \supset F$. Označme ještě $F'' := \{n \in F';\ n > k_0\}$. Pak

$$\left|s - \sum_{n\in F'} x_n\right| = \left|s - \sum_{n=1}^{k_0} x_n - \sum_{n\in F''} x_n\right| \le \left|s - \sum_{n=1}^{k_0} x_n\right| + \sum_{n\in F''}|x_n|$$

$$\le \left|s-\sum_{n=1}^{k_0}x_n\right| + \sum_{n=k_0+1}^{\max F'}|x_n| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon .$$

Tedy $s = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$.

ad (ii). Vzhledem k (i) zbývá dokázat (ii) pouze v případě, kdy součet zob. řady $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ není konečný.

Předpokládejme nejprve, že $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n = +\infty$. Buď $K\in(0,+\infty)$. Pak

$$(*) \quad \exists F\in\mathcal{F}(\mathbb{N})\ \forall F'\in \mathcal{F}(\mathbb{N}), F'\supset F: \sum_{n\in F'} x_n > K .$$

Buď $k_0 := \max F$. Pak

$$\forall k\in\mathbb{N},\ k\ge k_0: F\subset\{1,\dots,k\}$$

$$\overset{\text{dle}(*)}{\Longrightarrow} \sum_{n=1}^{k} x_n > K \quad \forall k\in\mathbb{N}, k\ge k_0, \text{ tj. } \overbrace{\lim_{k\to+\infty}\sum_{n=1}^{k} x_n}^{\text{“}\sum_{n=1}^{+\infty} x_n\text{”}} = +\infty$$

(neb $K\in(0,+\infty)$ bylo libovolné). Tedy $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = +\infty = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$.

Jestliže $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n = -\infty$, pak $\sum_{n\in\mathbb{N}} (-x_n) = +\infty$ (dle Věty 44, b)), a tedy z již dokázaného máme $\sum_{n=1}^{\infty}(-x_n) = +\infty$, a odtud plyne $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = -\infty$. □

Poznámka. Tvrzení Věty 50(ii) nelze obrátit, což dokazuje následující příklad.

Příklad. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, kde $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ je konvergentní, a tedy má součet. Protože $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nekonverguje absolutně, platí $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ = +\infty = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ (cf. Lemma 39, 11. přednáška). Protože $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n^+ = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ a $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n^- = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$, tak výraz $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n^+ - \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n^-$ není definován, a tedy, dle Věty 45(iii), zob. řada $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ nemá součet.

Věta 51 (o součinu zob. řad). Nechť zob. řady $\sum_{\alpha\in I} x_\alpha$ a $\sum_{\beta\in J} y_\beta$ konvergují. Pak zob. řada $\sum_{[\alpha,\beta]\in I\times J} x_\alpha y_\beta$ konverguje a platí

(1) $$\sum_{[\alpha,\beta]\in I\times J} x_\alpha y_\beta = \Big(\sum_{\alpha\in I} x_\alpha\Big)\Big(\sum_{\beta\in J} y_\beta\Big).$$

Důkaz. Nejprve dokážeme, že zob. řada $\sum_{[\alpha,\beta]\in I\times J} x_\alpha y_\beta$ abs. konverguje ($\Leftrightarrow$ taková řada konverguje – cf. Věta 47). Z Věty 47 plyne, že zob. řady $\sum_{\alpha\in I}|x_\alpha|$ a $\sum_{\beta\in J}|y_\beta|$ konvergují. Buď $s := \sum_{\alpha\in I}|x_\alpha|$, $t := \sum_{\beta\in J}|y_\beta|$.

Nechť $F\in\mathcal{F}(I\times J)$. Pak existují $F_1\in\mathcal{F}(I)$ a $F_2\in\mathcal{F}(J)$ tak, že $F\subset F_1\times F_2$. Proto platí

$$\sum_{[\alpha,\beta]\in F}|x_\alpha y_\beta| \le \sum_{[\alpha,\beta]\in F_1\times F_2}|x_\alpha||y_\beta| = \Big(\sum_{\alpha\in F_1}|x_\alpha|\Big)\Big(\sum_{\beta\in F_2}|y_\beta|\Big) \underset{\text{dle Věty 45(i)}}{\le} st$$

$$\Rightarrow \sum_{[\alpha,\beta]\in I\times J}|x_\alpha y_\beta| \underset{\text{Věta 45(i)}}{=} \sup\Big\{\sum_{[\alpha,\beta]\in F}|x_\alpha y_\beta|;\ F\in\mathcal{F}(I\times J)\Big\} \le st < +\infty$$

$\Rightarrow \sum_{[\alpha,\beta]\in I\times J} x_\alpha y_\beta$ konverguje absolutně. Tedy taková zob. řada také konverguje.

Dokážeme nyní rovnost (1). Buď

$$x := \sum_{\alpha\in I} x_\alpha, \quad y := \sum_{\beta\in J} y_\beta \quad \text{a} \quad r := \sum_{[\alpha,\beta]\in I\times J} x_\alpha y_\beta .$$

Nechť $\varepsilon>0$. Pak ex. $F\in\mathcal{F}(I\times J)$, $F_1\in\mathcal{F}(I)$ a $F_2\in\mathcal{F}(J)$ tak, že platí

(2) $$\forall F'\in\mathcal{F}(I\times J),\ F'\supset F:\ \Big|\sum_{[\alpha,\beta]\in F'} x_\alpha y_\beta - r\Big| < \varepsilon,$$

(3) $$\forall F_1'\in\mathcal{F}(I),\ F_1'\supset F_1:\ \Big|\sum_{\alpha\in F_1'} x_\alpha - x\Big| < \varepsilon,$$

(4) $$\forall F_2'\in\mathcal{F}(J),\ F_2'\supset F_2:\ \Big|\sum_{\beta\in F_2'} y_\beta - y\Big| < \varepsilon.$$

Nyní určíme $F_1'\in\mathcal{F}(I)$, $F_2'\in\mathcal{F}(J)$ tak, aby $F_1\subset F_1'$, $F_2\subset F_2'$ a $F\subset F_1'\times F_2'$. Pak platí

(5) $$\sum_{[\alpha,\beta]\in F_1'\times F_2'} x_\alpha y_\beta = \Big(\sum_{\alpha\in F_1'} x_\alpha\Big)\Big(\sum_{\beta\in F_2'} y_\beta\Big).$$

Tedy

(6) $$|r - xy| \overset{\text{dle (5)}}{=} \Big|r - \sum_{[\alpha,\beta]\in F_1'\times F_2'} x_\alpha y_\beta + \Big(\sum_{\alpha\in F_1'} x_\alpha\Big)\Big(\sum_{\beta\in F_2'} y_\beta\Big) - xy\Big| \le$$

$$\leq \underbrace{\Big| r - \sum_{[\alpha,\beta]\in F_1'\times F_2'} x_\alpha y_\beta \Big|}_{<\,\varepsilon \text{ dle } (2)} + \Big| \Big(\sum_{\alpha\in F_1'} x_\alpha\Big)\Big(\sum_{\beta\in F_2'} y_\beta\Big) - xy \Big| .$$

Protože

$$(7)\quad \Big|\Big(\sum_{\alpha\in F_1'} x_\alpha\Big)\Big(\sum_{\beta\in F_2'} y_\beta\Big) - xy\Big| = \Big|\Big(\sum_{\alpha\in F_1'} x_\alpha\Big)\Big(\sum_{\beta\in F_2'} y_\beta - y\Big) + \Big(\sum_{\alpha\in F_1'} x_\alpha - x\Big) y\Big|$$

$$\leq \underbrace{\Big(\sum_{\alpha\in F_1'} |x_\alpha|\Big)}_{\leq\, S} \underbrace{\Big|\sum_{\beta\in F_2'} y_\beta - y\Big|}_{<\,\varepsilon \text{ dle } (4)} + \underbrace{\Big|\sum_{\alpha\in F_1'} x_\alpha - x\Big|}_{<\,\varepsilon \text{ dle } (3)} \cdot |y| <$$

$$< S\cdot\varepsilon + \varepsilon|y| = \varepsilon(S+|y|),$$

tak z (6) a (7) plyne

$$|r - xy| < \varepsilon(1+S+|y|),$$

a tedy $r = xy$ (neb $\varepsilon>0$ bylo libovolné). $\square$

15. přednáška MA 3, šk. r. 2016/17, 21. 11. 2016

Bez důkazu uvedeme následující tvrzení.

Věta 52 (ještě jedna vlastnost zob. součtu).

Buď J množina a $\{I_\beta;\ \beta \in J\}$ systém množin takový, že $I_{\beta_1} \cap I_{\beta_2} = \emptyset$ $\forall \beta_1, \beta_2 \in J$, $\beta_1 \neq \beta_2$. Nechť $I = \bigcup_{\beta \in J} I_\beta$ a nechť zob. řada $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha$ konverguje. Pak $\forall \beta \in J$ zob. řada $\sum_{\alpha \in I_\beta} x_\alpha$ konverguje a platí

$$\sum_{\alpha \in I} x_\alpha = \sum_{\beta \in J} \Big(\sum_{\alpha \in I_\beta} x_\alpha \Big).$$

Poznámka. Věta 52 „tvrdí": Rozdělím-li členy konvergentní zob. řady $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha$ do (disjunktních) skupin I_β, sečtu-li členy v každé skupině I_β (čímž dostanu zob. součty $s_\beta := \sum_{\alpha \in I_\beta} x_\alpha$, které jsou konečné) a sečtu-li potom čísla s_β (tj. vytvořím součet $\sum_{\beta \in J} s_\beta$), tak dostanu právě součet zob. řady $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha$ (tj. platí $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha = \sum_{\beta \in J} s_\beta = \sum_{\beta \in J} \big(\sum_{\alpha \in I_\beta} x_\alpha \big)$).

Stejnoměrná konvergence posloupností funkcí.

Definice. Buď M neprázdná množina, (Y,σ) metr. prostor a f, f_n, $n\in\mathbb{N}$, zobrazení definovaná na M s hodnotami v (Y,σ).

(i) Řekneme, že posl. $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje k f na M, jestliže $\forall x\in M$ platí $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, tj.

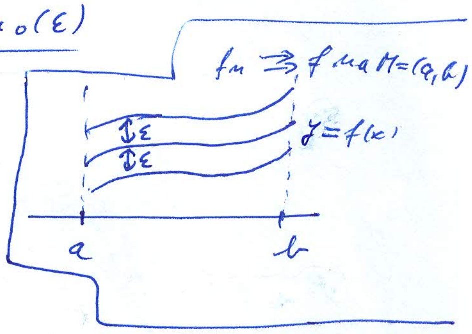
$$\forall x\in M\ \forall \varepsilon>0\ \exists n_0\in\mathbb{N}\ \forall n\in\mathbb{N}, n\geq n_0 : \sigma(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon$$

(značení $f_n \to f$ na M). $\Downarrow$ $n_0 = n_0(x,\varepsilon)$

(ii) Řekneme, že posl. $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje stejnoměrně k f na M, jestliže

$$\forall \varepsilon>0\ \exists n_0\in\mathbb{N}\ \forall x\in M\ \forall n\in\mathbb{N}, n\geq n_0 : \sigma(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon$$

(značení $f_n \rightrightarrows f$ na M). $\Downarrow$ $n = n_0(\varepsilon)$



Poznámka. Jestliže $f_n \rightrightarrows f$ na M, pak $f_n \to f$ na M.

Př. 1. Nechť $f_n : \mathbb{R} \to (\mathbb{R}, \varrho_2)$, $n\in\mathbb{N}$, jsou dány předpisem $f_n(x) = \frac{\sin x}{n}$. Pak

$\forall x\in\mathbb{R}$ $f_n(x) = \frac{\sin x}{n} \to 0$ pro $n\to\infty$.

Tedy $f_n \to f$ na $\mathbb{R}$, kde $f(x)=0$ $\forall x\in\mathbb{R}$. Ukažme, že $f_n \rightrightarrows f$ na $\mathbb{R}$:

Buď $\varepsilon>0$. Zvolme $n_0\in\mathbb{N}$ tak, aby $\frac{1}{n_0}\leq\varepsilon$. Pak $\forall n\in\mathbb{N}, n\geq n_0$, $\forall x\in\mathbb{R}$ platí

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{\sin x}{n} - 0\right| \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} \leq \varepsilon,$$

a tedy $f_n \rightrightarrows f$ na $\mathbb{R}$.

Př. 2. Nechť $f_n : \mathbb{R} \to (\mathbb{R}, \varrho_2)$ jsou dány předpisem $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$.

Pak

$x=0$ ... $f_n(0) = 0 \to 0$ pro $n\to\infty$,

$x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ (pevné) ... $f_n(x) = \frac{n^2}{n^2}\,\frac{\frac{x}{n}}{\frac{1}{n^2}+x^2} \to \frac{0}{0+x^2} = 0$ pro $n\to\infty$.

Tedy $f_n \to f$ na $\mathbb{R}$, kde $f(x)=0$ $\forall x\in\mathbb{R}$. Otázka je, zda tato konvergence je stejnoměrná na $\mathbb{R}$. Kdyby ano, pak by

(*) $\forall\varepsilon>0\ \exists n_0\in\mathbb{N}\ \forall x\in\mathbb{R}\ \forall n\in\mathbb{N}, n\geq n_0 : |f_n(x) - 0| \leq \varepsilon$.

Ovšem $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n\frac{1}{n}}{1+n^2\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$ $\forall n\in\mathbb{N}$.

Tedy (*) nemůže platit (stačí volit $\varepsilon\in(0,\frac{1}{2})$).

Proto neplatí $f_n \rightrightarrows f$ v $\mathbb{R}$.

./.

Poznámka. (i) Je-li $M_1 \subset M$ a $f_n \rightrightarrows f$ na M, pak $f_n \rightrightarrows f$ na M_1.

(ii) Je-li $m \in \mathbb{N}$, $f_n \rightrightarrows f$ na M_i $\forall i \in \{1, \dots, m\}$, pak $f_n \rightrightarrows f$ na $\bigcup_{i=1}^{m} M_i$.

Věta 53 (charakterizace stejnoměrné konvergence posl. funkcí).

Buď M neprázdná množina, (Y, σ) metr. prostor, f, f_n, $n \in \mathbb{N}$, zobrazení definovaná na M s hodnotami v (Y, σ). Pak $f_n \rightrightarrows f$ na M právě tehdy, je-li $\lim_{n \to \infty} c_n = 0$, kde

$$c_n := \sup_{x \in M} \sigma(f_n(x), f(x)) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Důkaz. (i) Nechť $f_n \rightrightarrows f$ na M, tj.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall x \in M\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : \sigma(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon,$$

$$\Rightarrow \quad c_n = \sup_{x \in M} \sigma(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon,$$

tedy
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : 0 \leq c_n \leq \varepsilon,$$

tj. $\lim_{n \to \infty} c_n = 0$.

(ii) Nechť naopak $\lim_{n \to \infty} c_n = 0$. Pak

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : |c_n| \leq \varepsilon,$$

$$\Updownarrow$$

$$c_n \leq \varepsilon$$

tj. $\sup_{x \in M} \sigma(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon$,

$$\Rightarrow \quad \sigma(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon \quad \forall x \in M.$$

Tedy platí

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall x \in M\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : \sigma(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon,$$

a proto $f_n \rightrightarrows f$ na M. $\square$

Definice. Nechť (M, ϱ) a (Y, σ) jsou metrické prostory. Nechť f_n, $n \in \mathbb{N}$, f jsou zobrazení definovaná na M s hodnotami v Y. Řekneme, že posl. $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje lokálně stejnoměrně k f na M, jestliže $\forall x \in M$ $\exists$ okolí $U(x)$ bodu x tak, že $f_n \rightrightarrows f$ na $U(x)$ (značení $f_n \overset{loc}{\rightrightarrows} f$ na M).

Př. 3. Nechť f_n, $n \in \mathbb{N}$, jsou funkce z Př. 2, tj. $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Z Př. 2 víme, že neplatí $f_n \rightrightarrows 0$ v $\mathbb{R}$. Dokážeme ale, že $f_n \overset{loc}{\rightrightarrows} 0$ v $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. K tomu stačí ověřit, že

(*) $$f_n \rightrightarrows 0 \text{ v } \mathbb{R} \setminus (-\delta, \delta) \quad \forall \delta > 0.$$

Buď tedy $\delta > 0$. Pak

$$c_n := \sup_{x \in \mathbb{R} \setminus (-\delta,\delta)} |f_n(x) - 0| = \sup_{|x| \geq \delta} \underbrace{\frac{n|x|}{1+n^2x^2}}_{\text{sudá fce}} = \sup_{x \geq \delta} \frac{nx}{1+n^2x^2} = \sup_{x \geq \delta} f_n(x).$$

Protože

$$f_n'(x) = \frac{n(1+n^2x^2) - nx \cdot n^2 2x}{(1+n^2x^2)^2} = \frac{n}{(1+n^2x^2)^2}\left(1-(nx)^2\right) \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

tak fce f_n roste v $(0, \frac{1}{n})$ a klesá v $(\frac{1}{n}, +\infty)$. Navíc $f \in C((0,+\infty))$,

tedy

$$c_n = \sup_{x \geq \delta} f_n(x) = f_n(\delta) = \frac{n\delta}{1+n^2\delta^2} = \frac{\cancel{n^2}}{\cancel{n^2}} \frac{\frac{\delta}{n}}{\frac{1}{n^2} + \delta^2} \to 0 \text{ pro } n \to \infty,$$

$\forall n \in \mathbb{N}$ takové, že $\frac{1}{n} < \delta$, tj. $\forall n \in \mathbb{N}$, $n > \frac{1}{\delta}$

tj. $\lim_{n \to \infty} c_n = 0$. Tedy platí (*). $\square$

Věta 54 (vztah lokálně stejnoměrné konvergence a spojitosti). Nechť (X, ρ) a (Y, σ) jsou metrické prostory, $f_n : X \to Y$, $n \in \mathbb{N}$, jsou spojitá zobrazení a $f : X \to Y$. Nechť $f_n \overset{loc}{\rightrightarrows} f$ na X. Pak f je spojité.

Důkaz. Buď $x_0 \in X$ a $\varepsilon > 0$. Pro každé $x \in X$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

(1) $$\sigma(f(x), f(x_0)) \leq \sigma(f(x), f_n(x)) + \sigma(f_n(x), f_n(x_0)) + \sigma(f_n(x_0), f(x_0)).$$

Protože $f_n \overset{loc}{\rightrightarrows} f$ na X, $\exists\, U_0(x_0)$ tak, že $f_n \rightrightarrows f$ na $U_0(x_0)$.

Tedy $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že

(2) $$\sigma(f_n(x), f(x)) \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0,\ \forall x \in U_0(x_0).$$

Zvolme index $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, pevně. Protože f_n je spojitá v bodě x_0, $\exists\, U(x_0) \subset U_0(x_0)$ tak, že

(3) $$\sigma(f_n(x), f_n(x_0)) < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall x \in U(x_0).$$

Z (1) – (3) pak dostáváme

$$\sigma(f(x), f(x_0)) < \varepsilon \quad \forall x \in U(x_0),$$

tj. zobrazení f je spojité v bodě $x_0 \in X$. Protože $x_0 \in X$ byl libovolný bod z X, je f spojité na X. $\square$

Př. 4. Nechť $f_n(x) = x^n$, $x \in \langle 0,1 \rangle$, $n \in \mathbb{N}$. Pak

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) := \begin{cases} 0, & x \in \langle 0,1) \\ 1, & x = 1 \end{cases},$$

$f_n \in C(\langle 0,1 \rangle)$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $f \notin C(\langle 0,1 \rangle)$. Z Věty 54 proto plyne, že

neplatí $f_n \rightrightarrows f$ na $\langle 0,1 \rangle$.

Ovšem

$$f_n \rightrightarrows f \text{ na } \langle 0,\delta \rangle \quad \forall \delta \in (0,1),$$

neboť pro $\delta \in (0,1)$ máme

$$c_n = c_n(\delta) = \sup_{x \in \langle 0,\delta \rangle} |\underbrace{f_n(x)}_{=x^n} - \underbrace{f(x)}_{=0}| = \sup_{x \in \langle 0,\delta \rangle} x^n = \delta^n \to 0 \text{ pro } n \to \infty.$$

Poznámka. Za předpokladů Věty 54 platí

$$\underbrace{\lim_{x\to x_0} f(x)}_{\lim\limits_{x\to x_0} \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)} = f(x_0) = \underbrace{\lim_{n\to\infty} f_n(x_0)}_{\lim\limits_{n\to\infty} \lim\limits_{x\to x_0} f_n(x)},$$

tzn., že za daných předpokladů lze zaměnit pořadí uvedených limit.

16. přednáška MA 3, šk. r. 2016/17, 23. 11. 2016

Dalším tvrzením o záměně limit je následující věta.

Věta 55 (Mooreova – Osgoodova). Buď (X,ρ) metr. prostor, $a \in X \cap X'$; f_n, $n \in \mathbb{N}$, f zobrazení z (X,ρ) do úplného metr. prostoru (Y,σ). Jestliže

(i) $f_n \rightrightarrows f$ v $P(a,r)$ pro nějaké $r > 0$,

(ii) $\forall n \in \mathbb{N}$ ex. $\lim\limits_{x \to a} f_n(x) = \alpha_n \in (Y,\sigma)$,

pak ex. $\lim\limits_{n \to \infty} \alpha_n = \alpha \in (Y,\sigma)$ a platí $\alpha = \lim\limits_{x \to a} f(x)$. *)

Důkaz. Buď $\varepsilon > 0$. Pak dle (i) $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že

$$\forall x \in P(a,r)\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 :\ \sigma(f_n(x), f(x)) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Odtud pomocí Δ-nerovnosti dostáváme

$$\forall x \in P(a,r)\ \forall n, m \in \mathbb{N},\ n, m \geq n_0 :\ \sigma(f_n(x), f_m(x)) \leq \varepsilon.$$

Tedy $\forall x \in P(a,r)\ \forall n, m \in \mathbb{N},\ n, m \geq n_0$ platí

$$(1)\quad \sigma(\alpha_n, \alpha_m) \leq \sigma(\alpha_n, f_n(x)) + \underbrace{\sigma(f_n(x), f_m(x))}_{\leq \varepsilon} + \sigma(f_m(x), \alpha_m)$$
$$\leq \sigma(\alpha_n, f_n(x)) + \varepsilon + \sigma(f_m(x), \alpha_m).$$

Protože, dle (ii), $\sigma(\alpha_n, f_n(x)) \to 0$ a $\sigma(f_m(x), \alpha_m) \to 0$ pro $x \to a$, tak z (1) plyne

$$\sigma(\alpha_n, \alpha_m) \leq \varepsilon \quad \forall n, m \in \mathbb{N},\ n, m \geq n_0,$$

tj. posloupnost $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ bodů úplného metr. prostoru (Y,σ) splňuje B-C podmínku. Proto ex. $\alpha \in (Y,\sigma)$ tak, že $\alpha = \lim\limits_{n \to \infty} \alpha_n$.

Zbývá ještě dokázat, že $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \alpha$. Z Δ-nerovnosti plyne $\forall x \in P(a,r)$ a $\forall n \in \mathbb{N}$ platí

$$(2)\quad \sigma(f(x), \alpha) \leq \sigma(f(x), f_n(x)) + \sigma(f_n(x), \alpha_n) + \sigma(\alpha_n, \alpha).$$

Buď $\varepsilon > 0$. Protože $\alpha_n \to \alpha$, tak

$$(3)\quad \exists n_1 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_1 :\ \sigma(\alpha_n, \alpha) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

---

*) Tedy $\alpha = \lim\limits_{n \to \infty} \alpha_n = \underline{\lim\limits_{n \to \infty} \lim\limits_{x \to a} f_n(x)}$

$\parallel$

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = \underline{\lim\limits_{x \to a} \lim\limits_{n \to \infty} f_n(x)}$.

Dále, protože $f_n \rightrightarrows f$ na $P(a,r)$, tak

(4) $\exists n_2 \in \mathbb{N}\ \forall x \in P(a,r)\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_2 : \sigma(f_n(x), f(x)) \leq \frac{\varepsilon}{3}$.

Zvolme pevně $n \in \mathbb{N}$, $n \geq \max\{n_1, n_2\}$. Protože $\lim_{x \to a} f_n(x) = \alpha_n$, tak

(5) $\exists \delta \in (0,r)\ \forall x \in P(a,\delta): \sigma(f_n(x), \alpha_n) < \frac{\varepsilon}{3}$.

Pak z (2) – (5) plyne

$$\forall x \in P(a,\delta): \sigma(f(x), \alpha) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

a tedy $\lim_{x \to a} f(x) = \alpha$. $\square$

Věta 56 (charakterizace lokálně stejnoměrné konvergence na (a,b)).

Buď $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$. Nechť f_n, $n \in \mathbb{N}$, f jsou zobrazení definovaná na (a,b) s hodnotami v metr. prostoru (Y,σ). Pak $f_n \overset{loc}{\rightrightarrows} f$ na (a,b) právě tehdy, když $f_n \rightrightarrows f$ na každém intervalu $\langle c,d \rangle \subset (a,b)$.

Důkaz. (i) "$\Rightarrow$": Nechť $f_n \overset{loc}{\rightrightarrows} f$ na (a,b). Pak $\forall x \in (a,b)\ \exists U(x) \subset (a,b)$ tak, že $f_n \rightrightarrows f$ na $U(x)$.

Buď $\langle c,d \rangle \subset (a,b)$. Potom platí

$$\langle c,d \rangle \subset \bigcup_{x \in (a,b)} U(x),$$

což je otevřené pokrytí kompaktního intervalu $\langle c,d \rangle$. Tedy podle Borelovy věty (Věta 11, 2. přednáška) ex. $x_1, \dots, x_m \in (a,b)$ tak, že $\langle c,d \rangle \subset \bigcup_{i=1}^{m} U(x_i)$. Podle poznámky z listu 2 pak $f_n \rightrightarrows f$ na $\bigcup_{i=1}^{m} U(x_i)$, a tím spíše na $\langle c,d \rangle$.

(ii) Nechť nyní $f_n \rightrightarrows f$ na $\forall \langle c,d \rangle \subset (a,b)$. Buď $x \in (a,b)$. Pak ex. $\langle c,d \rangle \subset (a,b)$ takový, že $x \in (c,d)$. Tedy ex. $U(x)$ tak, že $U(x) \subset \langle c,d \rangle$. Odtud a z předpokladu, že $f_n \rightrightarrows f$ na $\langle c,d \rangle$, plyne $f_n \rightrightarrows f$ na $U(x)$. Protože $x \in (a,b)$ byl libovolný bod z intervalu (a,b), platí $f_n \overset{loc}{\rightrightarrows} f$ na (a,b). $\square$

Definice. Nechť M je množina a (Y,σ) je metr. prostor. Nechť f_n, $n\in\mathbb{N}$, jsou zobrazení definovaná na M s hodnotami v (Y,σ).

Řekneme, že posl. $\{f_n\}$ je cauchyovská na M, jestliže v každém bodě $x\in M$ splňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku, tj.

(1) $\forall x\in M\ \forall \varepsilon>0\ \exists n_0\in\mathbb{N}\ \forall n,m\in\mathbb{N},\ n,m\geq n_0:\ \sigma(f_n(x),f_m(x))\leq\varepsilon.$

Řekneme, že posl. $\{f_n\}$ je stejnoměrně cauchyovská na M, jestliže

(2) $\forall\varepsilon>0\ \exists n_0\in\mathbb{N}\ \forall x\in M\ \forall n,m\in\mathbb{N},\ n,m\geq n_0:\ \sigma(f_n(x),f_m(x))\leq\varepsilon.$

Věta 57 (vztah stejnoměrné konvergence a stejnoměrné cauchyovskosti).
Buď M neprázdná množina, (Y,σ) úplný metr. prostor a f_n, $n\in\mathbb{N}$, zobrazení definovaná na M s hodnotami v (Y,σ). Posl. $\{f_n\}$ je stejnoměrně konvergentní na M právě tehdy, když je stejnoměrně cauchyovská na M.

Důkaz. (i) Nechť $f_n \rightrightarrows f$ na M. Buď $\varepsilon>0$. Pak

$$\exists n_0\in\mathbb{N}\ \forall x\in M\ \forall n\in\mathbb{N},\ n\geq n_0:\ \sigma(f_n(x),f(x))\leq\frac{\varepsilon}{2}.$$

Tedy pro $\forall n,m\in\mathbb{N}$, $n,m\geq n_0$, a $\forall x\in M$ pak platí

$$\sigma(f_n(x),f_m(x))\leq\sigma(f_n(x),f(x))+\sigma(f(x),f_m(x))\leq\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Posloupnost $\{f_n\}$ tedy splňuje (2), tj. $\{f_n\}$ je stejnoměrně cauchyovská na M.

(ii) Předpokládejme nyní, že $\{f_n\}$ je stejnoměrně cauchyovská posloupnost na M, tj. platí (2). Pak platí i (1), tj. $\forall x\in M$ je $\{f_n(x)\}$ cauchyovská posl. bodů z prostoru (Y,σ). Tento prostor je úplný, proto $\exists$ prvek, označme ho $f(x)$, prostoru (Y,σ) takový, že $f_n(x)\to f(x)$ pro $n\to\infty$.

Buď $\varepsilon>0$. Z (2) plyne

$$\exists n_0\in\mathbb{N}\ \forall x\in M\ \forall n,m\in\mathbb{N},\ n,m\geq n_0:\ \sigma(f_n(x),f_m(x))\leq\varepsilon.$$

Odtud limitním přechodem pro $m\to\infty$ dostaneme

$$\sigma(f_n(x),f(x))\leq\varepsilon\quad\forall x\in M\ \forall n\in\mathbb{N},\ n\geq n_0.$$

Tedy

$$\forall\varepsilon>0\ \exists n_0\in\mathbb{N}\ \forall x\in M\ \forall n\in\mathbb{N},\ n\geq n_0:\ \sigma(f_n(x),f(x))\leq\varepsilon,$$

tj. $f_n\rightrightarrows f$ na M. $\square$

Věta 58 (o derivování limitní fce). Nechť $(a,b)\subset\mathbb{R}$ a nechť f_n, $n\in\mathbb{N}$, jsou reálné fce definované na (a,b). Předpokládejme:

(i) Fce f_n, $n\in\mathbb{N}$, mají v (a,b) vlastní derivace f_n'.

(ii) Existuje $c\in(a,b)$ tak, že $\{f_n(c)\}$ je konvergentní.

(iii) Posl. $\{f_n'\}$ je stejnoměrně konvergentní na (a,b).

Pak:

I. Existuje fce f taková, že $f_n\to f$ na (a,b) a $f_n\rightrightarrows f$ na každém omezeném intervalu $(\alpha,\beta)\subset(a,b)$. *)

II. Funkce f má v (a,b) vlastní derivaci a platí

$$f'(x)=\lim_{n\to\infty} f_n'(x) \quad \forall x\in(a,b). \quad **)$$

Důkaz. ad I. Buď (α,β) omezený interval obsažený v (a,b). Není-li $c\in(\alpha,\beta)$, pak sestrojíme omezený interval (α',β') takový, že $c\in(\alpha',\beta')$ a $(\alpha,\beta)\subset(\alpha',\beta')$. Dokážeme-li stejnoměrnou konvergenci $\{f_n\}$ v (α',β'), bude dokázána stejnoměrná konvergence i v (α,β).

Dokážeme, že posl. $\{f_n\}$ splňuje BC-podmínku pro stejnoměrnou konvergenci v (α',β'). Použijeme Lagrangeovu větu na rozdíl f_n-f_m:

$\forall x\in(\alpha',\beta'):\ f_n(x)-f_m(x)=f_n(c)-f_m(c)+(x-c)\left(f_n'(\xi)-f_m'(\xi)\right)$,
kde $\xi\in(\alpha',\beta')$.

$\Longrightarrow$ $(*)$ $\forall x\in(\alpha',\beta'):\ |f_n(x)-f_m(x)|\le|f_n(c)-f_m(c)|+(\beta'-\alpha')\,|f_n'(\xi)-f_m'(\xi)|$.

Buď $\varepsilon>0$. Z (ii) plyne

$(2*)$ $\exists n_1\in\mathbb{N}\ \forall n,m\in\mathbb{N},\ n,m\ge n_1:\ |f_n(c)-f_m(c)|\le\frac{\varepsilon}{2}$.

Protože f_n' konvergují stejnoměrně v (α',β') (cf. (iii)), tak

$(3*)$ $\exists n_2\in\mathbb{N}\ \forall\xi\in(\alpha',\beta')\ \forall n,m\in\mathbb{N},\ n,m\ge n_2:\ |f_n'(\xi)-f_m'(\xi)|\le\frac{\varepsilon}{2(\beta'-\alpha')}$.

Buď $n_0:=\max\{n_1,n_2\}$. Z $(*)-(3*)$ dostáváme

$\forall x\in(\alpha',\beta')\ \forall n,m\in\mathbb{N},\ n,m\ge n_0:\ |f_n(x)-f_m(x)|\le\frac{\varepsilon}{2}+(\beta'-\alpha')\frac{\varepsilon}{2(\beta'-\alpha')}=\varepsilon$,

tj. $\{f_n\}$ splňuje BC-podmínku pro stejnoměrnou konvergenci v (α',β') (a tedy i v (α,β)).

---

*) Je-li tedy (a,b) omezený interval, pak $f_n\rightrightarrows f$ na (a,b).

**) Jedná se o záměnu dvou operací: $\lim_{n\to\infty} f_n'(x)=f'(x)=\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)'$
(limita derivací = derivaci limitní fce).

Protože (α,β) byl libovolný omezený interval obsažený v (a,b), tak $\exists$ vlastní $\lim_{n\to\infty} f_n(x) =: f(x)$ $\forall x\in(a,b)$, a tvrzení I je dokázáno.

ad II. Máme dokázat, že $\forall x\in(a,b)$ ex. vlastní derivace $f'(x)$ a platí $f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$.

Buď $x\in(a,b)$ pevný bod a definujme fce φ_n předpisem

$$\varphi_n(y) := \frac{f_n(y)-f_n(x)}{y-x} \quad \forall y\in(a,b)\setminus\{x\},\ \forall n\in\mathbb{N}.$$

1) Víme, že $\forall n\in\mathbb{N}$ ex. vlastní limita

(4*) $$\lim_{y\to x} \varphi_n(y) = f_n'(x).$$

2) Víme, že $\forall y\in(a,b)\setminus\{x\}$ platí

(5*) $$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(y) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x}.$$

Dokážeme-li, že konvergence v (5*) je stejnoměrná v nějakém redukovaném okolí $P(x)$ bodu x, tj. že $\varphi_n(\cdot) \rightrightarrows \frac{f(\cdot)-f(x)}{\cdot - x}$ v $P(x)$, pak dle Mooreovy-Osgoodovy věty ex. vlastní $\lim_{n\to\infty} f_n'(x)$ a platí $\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = \lim_{y\to x}\frac{f(y)-f(x)}{y-x}$ $\left(= f'(x) \text{ dle definice derivace}\right)$ a důkaz věty bude kompletní.

3) Buď $r\in(0,+\infty)$ takové, že $P(x,r)\subset(a,b)$. Pro důkaz stejnoměrné konvergence posl. $\{\varphi_n\}$ na $P(x,r)$ použijeme BC-podmínku. Buď $\varepsilon>0$. Pro $y\in P(x,r)$ a $n,m\in\mathbb{N}$ platí

(6*) $$\varphi_n(y)-\varphi_m(y) = \frac{1}{y-x}\Big[\big(f_n(y)-f_m(y)\big) - \big(f_n(x)-f_m(x)\big)\Big].$$

Na fci $f_n - f_m$ (vyskytující se na RHS (6*)) použijeme Lagrangeovu větu a dostaneme

(7*) $$\varphi_n(y)-\varphi_m(y) = f_n'(\xi) - f_m'(\xi),$$ kde ξ je nějaký bod mezi y a x.

Protože, dle předpokladu, je $\{f_n'\}$ stejnoměrně konvergentní v (a,b), tak

$$\exists n_0\in\mathbb{N}\ \forall \xi\in(a,b)\ \forall n,m\in\mathbb{N},\ n,m\geq n_0:\ \underbrace{|f_n'(\xi)-f_m'(\xi)|}_{=\,|\varphi_n(y)-\varphi_m(y)|} \leq \varepsilon.$$

Odtud plyne, že

$$|\varphi_n(y)-\varphi_m(y)| \leq \varepsilon \quad \forall y\in P(x,r)\ \forall n,m\in\mathbb{N},\ n,m\geq n_0,$$

tj. posl. $\{\varphi_n\}$ splňuje BC-podmínku pro stejnoměrnou konvergenci na $P(x,r)$. $\square$

17. přednáška MA 3, šk. r. 2016/17, 28. 11. 2016

Věta 59 (záměna limity a integrálu). Buď $(a,b) \subset \mathbb{R}$ neprázdný omezený interval a $f_n \rightrightarrows f$ na (a,b). Nechť $\forall n \in \mathbb{N}$ fce f_n má primitivní fci na (a,b) a $(N)\int_a^b f_n$ existuje.*) Pak

$$(N)\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} (N)\int_a^b f_n .$$

Důkaz. Nechť $c \in (a,b)$. Pak ex. primitivní fce F_n k fci f_n na (a,b) taková, že $F_n(c) = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Podle Věty 58 fce F_n konvergují stejnoměrně na (a,b). Buď $F(x) := \lim_{n\to\infty} F_n(x)$ $\forall x \in (a,b)$. Podle Věty 58 také platí $F'(x) = \lim_{n\to\infty} \underbrace{F_n'(x)}_{= f_n(x)} = f(x)$ $\forall x \in (a,b)$, tj. F je primitivní fce k funkci f na (a,b). Podle modifikace Věty 55 (Moore – Osgood) pro jednostrannou limitu platí**)

$$\lim_{x\to a_+} F(x) = \lim_{x\to a_+} \lim_{n\to\infty} F_n(x) \overset{\text{Věta 55}}{=} \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to a_+} F_n(x) ;$$

$$\lim_{x\to b_-} F(x) = \lim_{x\to b_-} \lim_{n\to\infty} F_n(x) = \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to b_-} F_n(x)$$

a obě tyto limity jsou vlastní. Tedy

$$(N)\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{x\to b_-} F(x) - \lim_{x\to a_+} F(x) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to b_-} F_n(x) - \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to a_+} F_n(x) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\lim_{x\to b_-} F_n(x) - \lim_{x\to a_+} F_n(x) \right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} (N)\int_a^b f_n(x)\,dx . \quad \square$$

**) Poznamenejme, že z faktu $f_n \in N(a,b)$ plyne, že existují vlastní limity $\lim_{x\to a_+} F_n(x)$ a $\lim_{x\to b_-} F_n(x)$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

---

*) Uvědomte si, že $(N)\int_a^b g$ byl definován pomocí zobecněné primitivní fce G k funkci g na (a,b).

Definice. Buď $L : C(\langle 0,1\rangle) \longrightarrow C(\langle 0,1\rangle)$ lineární operátor. Řekneme, že L je pozitivní operátor, jestliže

$$L(f) \geq 0 \text{ na } \langle 0,1\rangle \quad \forall f \in C(\langle 0,1\rangle),\ f \geq 0 \text{ na } \langle 0,1\rangle.$$

Poznámka. Je-li L pozitivní lineární operátor na $C(\langle 0,1\rangle)$ a $f,g \in C(\langle 0,1\rangle)$, $f \leq g$ na $\langle 0,1\rangle$, pak $L(f) \leq L(g)$ na $\langle 0,1\rangle$, neboť z linearity operátoru L plyne

$$0 \leq L(g-f) = L(g) - L(f) \text{ na } \langle 0,1\rangle.$$

Věta 60 (Bohmanova – Korovkinova věta o třech funkcích). Buď $f_i(x) = x^i$, $x \in \langle 0,1\rangle$, $i = 0,1,2$. Je-li $\{L_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ posloupnost pozitivních lineárních operátorů z $C(\langle 0,1\rangle)$ do $C(\langle 0,1\rangle)$ taková, že

(1) $$L_n(f_i) \rightrightarrows f_i \text{ na } \langle 0,1\rangle \quad \forall i \in \{0,1,2\},$$

pak

(2) $$L_n(f) \rightrightarrows f \text{ na } \langle 0,1\rangle \quad \forall f \in C(\langle 0,1\rangle).$$

Důkaz. Buď $f \in C(\langle 0,1\rangle)$ a $\varepsilon > 0$. Pak $f \in B(\langle 0,1\rangle)$ a fce f je stejnoměrně spojitá na $\langle 0,1\rangle$. Tedy ex. $K \in (0,+\infty)$ a $\delta > 0$ tak, že

$$|f(x)| \leq K \quad \forall x \in \langle 0,1\rangle$$

a $\forall x,y \in \langle 0,1\rangle,\ |x-y| < \delta :\ |f(x)-f(y)| < \varepsilon.$

Buď $y \in \langle 0,1\rangle$ pevné. Je-li $x \in \langle 0,1\rangle$, pak

buďto $|x-y| < \delta$, a tedy $|f(x)-f(y)| < \varepsilon$,

nebo $|x-y| \geq \delta$, a potom $|f(x)-f(y)| \leq |f(x)| + |f(y)| \leq 2K \leq 2K\left(\frac{x-y}{\delta}\right)^2$.

V každém případě tedy $\forall x \in \langle 0,1\rangle$ platí

$$|f(x)-f(y)| \leq \varepsilon + 2K\left(\frac{x-y}{\delta}\right)^2$$

$\Longleftrightarrow$ (3) $$\underbrace{f(y) - \left[\varepsilon + 2K\left(\frac{x-y}{\delta}\right)^2\right]}_{=:\, f_*(x)} \leq f(x) \leq \underbrace{f(y) + \left[\varepsilon + 2K\left(\frac{x-y}{\delta}\right)^2\right]}_{=:\, f^*(x)}.$$

Z definice těchto funkcí plyne

$$f_*(y) = f(y) - \varepsilon \ , \qquad f^*(y) = f(y) + \varepsilon \ ,$$

$$f_*(x) \le f(x) \le f^*(x) \ \forall x \in \langle 0,1 \rangle \ , \ \text{tj.} \ f_* \le f \le f^* \ \text{na} \ \langle 0,1 \rangle .$$

Odtud a z pozitivity operátorů L_n, $n \in \mathbb{N}$, pak dostáváme

(4) $$L_n(f_*) \le L_n(f) \le L_n(f^*) \quad \text{na} \ \langle 0,1 \rangle .$$

Z (3) plyne, že funkci f^* lze psát ve tvaru

(5) $$f^*(x) = \underbrace{\left(f(y) + \varepsilon + \frac{2K}{\delta^2} y^2\right)}_{=: c_0} - \underbrace{\frac{4Ky}{\delta^2}}_{=: c_1} x + \underbrace{\frac{2K}{\delta^2}}_{=: c_2} x^2 = c_0 f_0(x) + c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)$$

$\forall x \in \langle 0,1 \rangle$.

Tedy

(6) $$L_n(f^*)(x) = c_0 L_n(f_0)(x) + c_1 L_n(f_1)(x) + c_2 L_n(f_2)(x) \quad \forall x \in \langle 0,1 \rangle .$$

Z (5) a (6) plyne, že $\forall x \in \langle 0,1 \rangle$ a $\forall n \in \mathbb{N}$ platí

$$L_n(f^*)(x) - f^*(x) = c_0 \left[L_n(f_0)(x) - f_0(x)\right] + c_1 \left[L_n(f_1)(x) - f_1(x)\right] + c_2 \left[L_n(f_2)(x) - f_2(x)\right],$$

a proto $\forall x \in \langle 0,1 \rangle$ a $\forall n \in \mathbb{N}$ máme

$$|L_n(f^*)(x) - f^*(x)| \le |c_0| \, |L_n(f_0)(x) - f_0(x)| + |c_1| \, |L_n(f_1)(x) - f_1(x)| + c_2 |L_n(f_2)(x) - f_2(x)| .$$

Odtud a z předpokladu (1) plyne

$$\exists n_1 \in \mathbb{N} \ \forall x \in \langle 0,1 \rangle \ \forall n \in \mathbb{N}, n \ge n_1 : \ |L_n(f^*)(x) - f^*(x)| \le \varepsilon .$$

Speciálně pro $x = y$ dostáváme

$$|L_n(f^*)(y) - \underbrace{(f(y) + \varepsilon)}_{= f^*(y)}| \le \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \quad (f(y) + \varepsilon) - \varepsilon \le \underline{L_n(f^*)(y) \le (f(y) + \varepsilon) + \varepsilon} \ ,$$

a tedy $$L_n(f^*)(y) \le f(y) + 2\varepsilon ,$$

což spolu s (4) dává

$$L_n(f)(y) \le f(y) + 2\varepsilon \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \ n \ge n_1 .$$

Protože zcela analogicky lze dokázat, že $\exists n_2 \in \mathbb{N}$ tak, že

$$L_n(f)(y) \ge f(y) - 2\varepsilon \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \ n \ge n_2 ,$$

platí

$$|L_n(f)(y) - f(y)| \le 2\varepsilon \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \ n \ge n_0 := \max\{n_1, n_2\} .$$

Vzhledem k tomu, že $y \in \langle 0,1\rangle$ bylo libovolné, tak platí

$$\sup_{y \in \langle 0,1\rangle} |L_n(f)(y) - f(y)| \leq 2\varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0.$$

Odtud a z Věty 53 (charakterizace stejnoměrné konvergence posl. fcí), 15. přednáška, pak plyne $L_n f \rightrightarrows f$ na $\langle 0,1\rangle$. $\square$

Definice. Je-li $f \in C(\langle 0,1\rangle)$ a $n \in \mathbb{N}$, pak polynom

$$(B_n f)(x) := \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}, \quad x \in \mathbb{R},$$

nazýváme Bernsteinovým polynomem fce f stupně n.

Poznámka. Zobrazení $B_n : C(\langle 0,1\rangle) \to C(\langle 0,1\rangle)$ definované předpisem $f \xmapsto{B_n} B_n f$ je pozitivní lineární operátor na $C(\langle 0,1\rangle)$.

Věta 61 (Weierstrass). Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, a $f \in C(\langle a,b\rangle)$. Pak $\forall \varepsilon > 0\ \exists$ polynom $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takový, že $|f(x) - P(x)| < \varepsilon$ $\forall x \in \langle a,b\rangle$.

Důkaz. (i) Předpokládejme nejprve, že $\langle a,b\rangle = \langle 0,1\rangle$. Protože $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ je posloupnost pozitivních lineárních operátorů na $C(\langle 0,1\rangle)$, tak tvrzení plyne z Bohmanovy-Korovkinovy věty, pokud dokážeme, že

$$B_n f_i \rightrightarrows f_i \text{ na } \langle 0,1\rangle \text{ pro } \forall i \in \{0,1,2\}.$$

Pro $i = 0$, $n \in \mathbb{N}$ a $x \in \langle 0,1\rangle$ platí

$$B_n(f_0)(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^k = (x + (1-x))^n = 1 = f_0(x),$$

tedy dokonce $B_n(f_0) = f_0$ na $\langle 0,1\rangle$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

V dalším použijeme rovnost

% (*) $$k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1},$$

která platí pro $\forall k, n \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq n$.

Pro $i=1$, $x\in\langle 0,1\rangle$ a $n\in\mathbb{N}$ platí

$$B_n(f_1)(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{k}{n}x^k(1-x)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n}\underbrace{\binom{n}{k}k}_{=n\binom{n-1}{k-1}\text{ dle }(*)}\frac{1}{n}\,x^k(1-x)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}x\cdot x^{k-1}(1-x)^{n-1-(k-1)} \overset{k-1=j}{=} x\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}x^j(1-x)^{n-1-j} = x = f_1(x),$$

a tedy $B_n(f_1)=f_1$ na $\langle 0,1\rangle$.

Jestliže $i=2$, pak $\forall x\in\langle 0,1\rangle$ a $\forall n\in\mathbb{N}$ máme

$$B_n(f_2)(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{k}{n}\right)^2x^k(1-x)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n}\underbrace{\binom{n}{k}k}_{=n\binom{n-1}{k-1}}\frac{k}{n^2}x^k(1-x)^{n-k} =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}\underbrace{k}_{=(k-1)+1}x^k(1-x)^{n-k} =: V_1+V_2,$$

kde

$$V_1 = \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}\underbrace{\binom{n-1}{k-1}(k-1)}_{=(n-1)\binom{n-2}{k-2}\text{ dle }(*)}x^2\cdot x^{k-2}(1-x)^{(n-2)-(k-2)} =$$

$$= \frac{n-1}{n}x^2\sum_{k=2}^{n}\binom{n-2}{k-2}x^{k-2}(1-x)^{(n-2)-(k-2)} \overset{k-2=j}{=} \frac{n-1}{n}x^2\underbrace{\sum_{j=0}^{n-2}\binom{n-2}{j}x^j(1-x)^{n-2-j}}_{=1}$$

$$= \frac{n-1}{n}x^2,$$

$$V_2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}x^k(1-x)^{n-k} = \frac{x}{n}\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}x^{k-1}(1-x)^{(n-1)-(k-1)}$$

$$\overset{k-1=j}{=} \frac{x}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}x^j(1-x)^{n-1-j} = \frac{x}{n}.$$

Tedy $B_n(f_2)(x) = \frac{n-1}{n}x^2 + \frac{x}{n} = \underbrace{x^2}_{=f_2(x)} - \frac{x^2}{n} + \frac{x}{n} = f_2(x) + \frac{x(1-x)}{n}$ na $\langle 0,1\rangle$ $\forall n\in\mathbb{N}$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow B_n(f_2)(x) - f_2(x) = \underbrace{\frac{x(1-x)}{n}}_{\geq 0 \text{ na } \langle 0,1\rangle}$$

$$\sup_{x\in\langle 0,1\rangle}\left|B_n(f_2)(x)-f_2(x)\right| = \frac{1}{n}\cdot\sup_{x\in\langle 0,1\rangle}x(1-x) = \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{4n} \quad \forall x\in\langle 0,1\rangle\ \forall n\in\mathbb{N}.$$

Tedy, dle Věty 53, $B_n(f_2)\rightrightarrows f_2$ na $\langle 0,1\rangle$. Tím je věta dokázána pro speciální případ, kdy $\langle a,b\rangle = \langle 0,1\rangle$.

(ii) Buď nyní $\langle a,b\rangle \subset \mathbb{R}$ obecný interval s $a<b$.
Pak lineární zobrazení φ dané předpisem

$$y=\varphi(x):= a+(b-a)x\,, \quad x\in\langle 0,1\rangle,$$

zobrazuje $\langle 0,1\rangle$ na $\langle a,b\rangle$ a inverzní zobrazení φ^{-1} je opět lineární a platí

$$(2*) \qquad x=\varphi^{-1}(y)=\frac{y-a}{b-a} \quad \forall\, y\in\langle a,b\rangle .$$

Je-li $f\in C(\langle a,b\rangle)$, pak $f(y)=f(\varphi(x))=\underbrace{(f\circ\varphi)}_{=:\tilde f}(x)=\tilde f(x)$,

kde $\tilde f := f\circ\varphi \in C(\langle 0,1\rangle)$. Buď $\varepsilon>0$. Pak z dokázaného tvrzení pro interval $\langle 0,1\rangle$ plyne, že $\exists$ polynom $\tilde P$ takový, že $|\tilde f(x)-\tilde P(x)|<\varepsilon \quad \forall\, x\in\langle 0,1\rangle$.

Avšak

$$|\tilde f(x)-\tilde P(x)| \overset{\text{dle }(2*)}{=} |\underbrace{\tilde f(\varphi^{-1}}_{=f}(y)) - \tilde P(\varphi^{-1}(y))| = |f(y)-\underbrace{\tilde P(\varphi^{-1}(y))}_{=:P(y)\ldots\text{ to je polynom}}| =$$

$$= |f(y)-P(y)|.$$

Tedy pro polynom $P=\tilde P\circ\varphi^{-1}$ pak platí

$$|f(y)-P(y)|<\varepsilon \quad \forall\, y\in\langle a,b\rangle . \quad \square$$

18. přednáška MA3, šk. r. 2016/17, 30. 11. 2016

Definice. Buď M neprázdná množina, $(Y, \|.\|)$ normovaný lineární prostor a $f_k : M \to Y$, $k \in \mathbb{N}$. Řekneme, že řada $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ je (bodově) konvergentní na M, jestliže $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde $s_n := \sum_{k=1}^{n} f_k$, je (bodově) konvergentní na M. Pojmy stejnoměrná konvergence na M a lokálně stejnoměrná konvergence na M se definují analogicky.

Definice. Nechť

(1) $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$, (2) $\sum_{k=1}^{\infty} g_k(x)$

jsou dvě řady, jejichž členy jsou funkce definované na množině $M \neq \emptyset$. Jestliže

$$|f_k(x)| \leq g_k(x) \quad \forall k \in \mathbb{N} \ \forall x \in M,$$

pak říkáme, že řada (2) je na M majorantní k řadě (1).

Věta 62 (srovnávací kritérium pro stejnoměrnou konvergenci řad)
Nechť řada (2) je na M majorantní k řadě (1). Nechť řada (2) konverguje stejnoměrně na M. Pak řada $\sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)|$ i řada (1) jsou stejnoměrně konvergentní na M.

Důkaz ihned plyne z BC-podmínky pro stejnoměrnou konvergenci.
Platí-li totiž
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall x \in M \ \forall m, n \in \mathbb{N}, m \geq n \geq n_0 : \ \left| \sum_{j=n}^{m} g_j(x) \right| \leq \varepsilon$,
pak i
$$\sum_{j=n}^{m} |f_j(x)| \leq \varepsilon \quad \forall x \in M \ \forall m, n \in \mathbb{N}, m \geq n \geq n_0$$
a také
$$\left| \sum_{j=n}^{m} f_j(x) \right| \leq \varepsilon \quad \forall x \in M \ \forall m, n \in \mathbb{N}, m \geq n \geq n_0. \quad \square$$

Z Věty 62 ihned plyne následující tvrzení, kdy majorantní řada má konstantní členy.

Věta 63 (Weierstrassovo kritérium). Nechť M je množina, $f_k : M \to \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}$, a nechť $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ je konvergentní řada nezáporných čísel. Jestliže

$$|f_k(x)| \leq a_k \quad \forall x \in M \ \forall k \in \mathbb{N},$$

pak řady $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ a $\sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)|$ konvergují stejnoměrně na M.

Př. Dokažte, že řada $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^{\alpha}}$, $\alpha \in (1, +\infty)$ je stejnoměrně konvergentní na $\mathbb{R}$.

Řešení. Protože $\left| \frac{\sin kx}{k^{\alpha}} \right| \leq \frac{1}{k^{\alpha}}$ $\forall x \in M \ \forall k \in \mathbb{N}$ a $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}}$ je konvergentní řada, tak požadovaný výsledek plyne z Věty 63.

Poznámka. Pomocí Weierstrassova kritéria nelze rozhodnout, zda $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^{\alpha}}$, $\alpha \in (0, 1\rangle$, je stejnoměrně konvergentní na $\mathbb{R}$, neboť toto kritérium lze použít pouze tehdy, je-li zkoumaná řada absolutně konvergentní na M.

Definice. Buď M množina a $f_k : M \to \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}$. Řekneme, že $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ je posloupnost stejně omezených funkcí na M, jestliže

$$\exists C \in (0, +\infty) \ \forall x \in M \ \forall k \in \mathbb{N} : \ |f_k(x)| \leq C.$$

Připomeňme si Abelovu parciální sumaci.

Lemma (Abelova parciální sumace). Nechť $m \in \mathbb{N}$, $m > 1$, $a_i, b_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, \dots, m$. Buď $s_k := \sum_{i=1}^{k} a_i$. Pak

$$\sum_{k=1}^{m} a_k b_k = \sum_{k=1}^{m-1} s_k (b_k - b_{k+1}) + s_m b_m.$$

Věta 64 (Dirichletovo a Abelovo kritérium pro stejnoměrnou konvergenci)

Buď M množina, $a_k : M \to \mathbb{C}$, $b_k : M \to \mathbb{R}$ $\forall k \in \mathbb{N}$. Nechť $\forall x \in M$ je posloupnost $\{b_k(x)\}_{k\in\mathbb{N}}$ monotónní. Předpokládejme, že platí alespoň jedna z následujících podmínek:

(i) (Dirichlet)

(1) $\exists C \in (0,+\infty)\ \forall x \in M\ \forall n \in \mathbb{N} : \left|\sum_{k=1}^{n} a_k(x)\right| \le C$, *)

(2) $b_k \rightrightarrows 0$ na M.

(ii) (Abel)

(3) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x) \rightrightarrows$ na M,

(4) $\exists C \in (0,+\infty)\ \forall x \in M\ \forall k \in \mathbb{N} : |b_k(x)| \le C$. **)

Pak $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k \rightrightarrows$ na M.

Důkaz. ad (i) (Dirichlet). Ověříme BC-podmínku pro stejnoměrnou konvergenci řady $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)\, b_k(x)$. Buď $\varepsilon > 0$. Z (2) plyne, že

(5) $\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall x \in M,\ n \in \mathbb{N},\ n \ge n_0 : |b_k(x)| \le \frac{\varepsilon}{2C}$, kde C je z (1).

Zvolme $n \in \mathbb{N}$, $n \ge n_0$ pevně. Položme

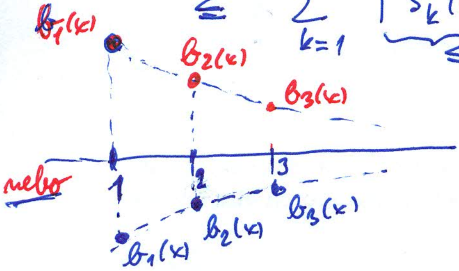
(6) $\alpha_k(x) := a_{n+k}(x)$, $\beta_k(x) := b_{n+k}(x)$ $\forall x \in M\ \forall k \in \mathbb{N}$.

Je-li $k \in \mathbb{N}$, pak

$$(7)\quad \left|\sum_{j=1}^{k} \alpha_j(x)\right| = \left|\sum_{j=1}^{k} a_{n+j}(x)\right| = \left|\sum_{i=1}^{n+k} a_i(x) - \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\right| \le$$
$$\le \left|\sum_{i=1}^{n+k} a_i(x)\right| + \left|\sum_{i=1}^{n} a_i(x)\right| \underset{\text{dle (1)}}{\le} 2C.$$

Je-li $m \in \mathbb{N}$, $m > 1$, $s_k(x) := \sum_{i=1}^{k} \alpha_i(x)$, $k \in \mathbb{N}$, $x \in M$, pak platí

$$(8)\quad \left|\sum_{k=n+1}^{n+m} a_k(x)\, b_k(x)\right| = \left|\sum_{k=1}^{m} \alpha_k(x)\, \beta_k(x)\right| \overset{\text{Abelova parciální sumace a }\Delta\text{-nerovnost}}{\le}$$
$$\le \sum_{k=1}^{m-1} \underbrace{|s_k(x)|}_{\le 2C \text{ dle (7)}} \cdot |\beta_k(x) - \beta_{k+1}(x)| + \underbrace{|s_m(x)|}_{\le C \text{ dle (7)}} \cdot |\beta_m(x)|.$$



Protože $\forall x \in M$ je posl. $\{b_k(x)\}_{k\in\mathbb{N}}$ monotónní, tak rozdíly $\beta_k(x) - \beta_{k+1}(x)$ mají $\forall k \in \mathbb{N}$ stejné znaménko a platí $\operatorname{sgn}(\beta_k(x) - \beta_{k+1}(x)) = \operatorname{sgn}(\beta_1(x) - \beta_m(x))\ \forall k \in \mathbb{N}$. (9),

Dále platí $\operatorname{sgn} \beta_1(x) = \operatorname{sgn}(\beta_1(x) - \beta_m(x))$. $(9\frac{1}{2})$

---

*) Tzn., že částečné součty řady $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)$ jsou stejně omezené na M.

*) Tzn., že posl. $\{b_k(x)\}_{k\in M}$ je stejně omezená na M.

Tedy

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+m} a_k(x)\, b_k(x)\right| \leq 2C\cdot \operatorname{sgn}(B_1(x)-B_m(x))\Big[\underbrace{\sum_{k=1}^{m-1}(B_k(x)-B_{k+1}(x))}_{=B_1(x)-B_m(x)}+B_m(x)\Big] =$$

$$= 2C \operatorname{sgn}(B_1(x)-B_m(x))\cdot B_1(x) = 2C\,|B_1(x)| = 2C\,|\underbrace{b_{n+1}(x)}_{\leq \frac{\varepsilon}{2C}\ (\text{dle } (5))}| \leq \varepsilon \quad \forall x\in M$$

a BC-podmínka pro stejnoměrnou konvergenci řady $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)\, b_k(x)$ na M je ověřena.

ad (ii) (Abel). Buď $\varepsilon>0$. Protože $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x) \rightrightarrows$ na M, tak je splněna BC-podmínka pro stejnoměrnou konvergenci této řady na M. Tedy

$$\exists n_0\in\mathbb{N}\ \forall x\in M\ \forall n,k\in\mathbb{N},\ n\geq n_0:\ \left|\sum_{j=n+1}^{n+k} a_j(x)\right| \leq \frac{\varepsilon}{3C},\ \text{kde } C \text{ je z } (4),$$

tj. (cf. (6))

$$(10)\qquad \Big|\underbrace{\sum_{j=1}^{k}\alpha_j(x)}_{=:s_k(x)}\Big| \leq \frac{\varepsilon}{3C} \quad \forall x\in M\ \forall k\in\mathbb{N}.$$

Je-li $m\in\mathbb{N}$, $m>1$, pak platí

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+m} a_k(x)\, b_k(x)\right| \underset{\text{cf. } (8)}{\leq} \sum_{k=1}^{m-1} \underbrace{|s_k(x)|}_{\leq \frac{\varepsilon}{3C}\ \text{dle } (10)}\cdot|B_k(x)-B_{k+1}(x)| + \underbrace{|s_m(x)|}_{\leq\frac{\varepsilon}{3C}\ \text{dle } (10)}\cdot|B_m(x)|$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{3C}\Big[\sum_{k=1}^{m-1}|B_k(x)-B_{k+1}(x)| + |B_m(x)|\Big] =$$

$$\underset{\text{dle } (9)}{=} \frac{\varepsilon}{3C}\Big[\operatorname{sgn}(B_1(x)-B_m(x))\underbrace{\sum_{k=1}^{m-1}(B_k(x)-B_{k+1}(x))}_{=B_1(x)-B_m(x)} + |B_m(x)|\Big] =$$

$$= \frac{\varepsilon}{3C}\Big[|B_1(x)-B_m(x)| + |B_m(x)|\Big] \leq \frac{\varepsilon}{3C}\Big[\underbrace{|B_1(x)|}_{\leq C\ \text{dle } (4)} + 2\underbrace{|B_m(x)|}_{\leq C\ \text{dle } (4)}\Big] \leq \frac{\varepsilon}{3C}\cdot 3C = \varepsilon, \quad {}^{*)}$$

a tedy $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ splňuje BC-podmínku pro stejnoměrnou konvergenci na M. □

Poznámka. (i) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x) \rightrightarrows$ na M $\Leftrightarrow$ $\{r_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ (kde $r_n(x) := \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k(x)$, tj. $r_n(x)$ je zbytek po n-tém členu řady) konverguje stejnoměrně k 0 na M.

Toto tvrzení plyne z rovnosti

$$r_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x) - \sum_{k=1}^{n} a_k(x) \quad \forall x\in M\ \forall n\in\mathbb{N}.$$

(ii) Jestliže $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x) \rightrightarrows$ na M, pak $a_k(x) \rightrightarrows 0$ na M (což plyne z rovnosti $a_k(x) = s_k(x) - s_{k-1}(x) = \underbrace{[s_k(x)-s(x)]}_{\rightrightarrows 0} + \underbrace{[s(x)-s_{k-1}(x)]}_{\rightrightarrows 0}$ $\forall x\in M$ $\forall k\in\mathbb{N}, k>1$).

---

*) Poznamenejme, že v případě (ii) rovnost (9½) nemusí platit.

Věta 65 (záměna sumy a derivace). Nechť $(a,b) \subset \mathbb{R}$ je neprázdný omezený interval a $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ je řada funkcí z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$ taková, že:

(i) Fce f_k, $k \in \mathbb{N}$, mají vlastní derivaci na (a,b).

(ii) Ex. $c \in (a,b)$ tak, že $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(c)$ konverguje.

(iii) $\sum_{k=1}^{\infty} f_k'(x) \rightrightarrows$ na (a,b).

Pak $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \rightrightarrows$ na (a,b) a platí $\left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} f_k'(x)$ $\forall x \in (a,b)$.

Důkaz. Nechť $s_n(x) := \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\forall x \in (a,b)$. Pak:

(i) Fce s_n, $n \in \mathbb{N}$, mají vlastní derivaci na (a,b).

(ii) Posl. $\{s_n(c)\}_{n \in \mathbb{N}}$ je konvergentní.

(iii) Posl $\{s_n'\}_{n \in \mathbb{N}}$ konverguje stejnoměrně na (a,b).

Tedy podle Věty 58 (o derivování limitní fce) platí:

I. Existuje fce s taková, že $s_n \rightrightarrows s$ na (a,b)

II. Fce s má v (a,b) vlastní derivaci a platí

$$\underbrace{s'(x)}_{\left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\right)'} = \underbrace{\lim_{n\to\infty} s_n'(x)}_{= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f_k'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k'(x)} \quad \forall x \in (a,b).$$

$\square$

19. přednáška MA3, šk. r. 2016/17, 5. 12. 2016

Věta 66 (záměna sumy a integrálu). Buď $(a,b)\subset\mathbb{R}$ neprázdný omezený interval a $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ řada funkcí z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$, která konverguje stejnoměrně k fci f na (a,b). Nechť $\forall k\in\mathbb{N}$ má fce f_k primitivní fci a $(N)\int_a^b f_n$ existuje. Pak

$$(N)\int_a^b f = \sum_{n=1}^{\infty} (N)\int_a^b f_n .$$

Důkaz plyne z Věty 59 (záměna limity a integrálu) použité na posloupnost $\{\sum_{k=1}^{n} f_k\}_{n\in\mathbb{N}}$. $\square$

Věta 67 (o stejnoměrné konvergenci mocninné řady). Buď $a_n\in\mathbb{C}$, $n\in\mathbb{N}_0$, $z, z_0\in\mathbb{C}$. Nechť mocninná řada

$$(1)\qquad \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$$

má kladný poloměr konvergence R $(0<R\leq+\infty)$. Je-li $0<\varrho<R$, pak řada (1) konverguje stejnoměrně na $U(z_0,\varrho)$ (a tedy lokálně stejnoměrně v $U(z_0,R)$).

Důkaz. Protože $0<\varrho<R$, platí $z_1:=z_0+\varrho\in U(z_0,R)$, a tedy $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z_1-z_0)^n=\sum_{n=0}^{\infty} a_n\varrho^n$ je absolutně konvergentní řada,*) tj. $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n\varrho^n|$ je konvergentní.

Je-li $z\in U(z_0,\varrho)$, pak

$$|z-z_0|<\varrho \Rightarrow |a_n(z-z_0)^n| = |a_n|\,|z-z_0|^n \leq |a_n|\varrho^n \quad \forall n\in\mathbb{N}_0 .$$

Tedy konvergentní řada $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|\varrho^n$ je majorantní řadou k řadě $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ v $U(z_0,\varrho)$. Proto $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \rightrightarrows$ v $U(z_0,\varrho)$ dle Weierstrassova kritéria. $\square$

---

*) Viz Věta 9 (o poloměru konvergence mocninné řady), 4. přednáška MA2.

Věta 68 (Abel). Nechť řada

(2) $$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n, \quad \text{kde } a_n \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{N}_0,\ x, x_0 \in \mathbb{R},$$

má kladný konečný poloměr konvergence R. Pak platí:

(i) Je-li řada (2) konvergentní pro $x = x_0 + R$, je stejnoměrně konvergentní v $\langle x_0, x_0+R \rangle$, a tedy fce $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ je spojitá v $\langle x_0, x_0+R \rangle$.

(ii) Je-li řada (2) konvergentní pro $x = x_0 - R$, je stejnoměrně konvergentní v $\langle x_0 - R, x_0 \rangle$, a tedy fce f je spojitá v $\langle x_0 - R, x_0 \rangle$.

Důkaz. ad (i). Stačí dokázat, že z konvergence řady (2) pro $x = x_0 + R$ plyne stejnoměrná konvergence řady (2) v $\langle x_0, x_0+R \rangle$.
(Protože fce $f_n(x) := a_n (x-x_0)^n \in C(\langle x_0, x_0+R \rangle)$, bude i fce $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ spojitá v $\langle x_0, x_0+R \rangle$ dle Věty 54.) ./.

Nechť tedy řada (2) je konvergentní v bodě $x_1 = x_0 + R$, tj. řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ konverguje. Pak pro $\forall x \in \langle x_0, x_0+R \rangle$ máme

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \overbrace{a_n R^n}^{:= a_n(x)} \underbrace{\left(\frac{x-x_0}{R}\right)^n}_{=: b_n(x)}.$$

Přitom: 1) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ je konvergentní řada s konstantními členy, tedy je stejnoměrně konvergentní v $\langle x_0, x_0+R \rangle$;

2) fce $b_n(x) = \left(\frac{x-x_0}{R}\right)^n$ jsou omezené v $\langle x_0, x_0+R \rangle$, neb $\left|\left(\frac{x-x_0}{R}\right)^n\right| = \left(\frac{|x-x_0|}{R}\right)^n \leq 1$.

Dále $1 \geq \left(\frac{x-x_0}{R}\right)^0 \geq \left(\frac{x-x_0}{R}\right)^1 \geq \left(\frac{x-x_0}{R}\right)^2 \geq \dots \geq 0$. Tedy řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n \left(\frac{x-x_0}{R}\right)^n$$ konverguje stejnoměrně v $\langle x_0, x_0+R \rangle$

podle Abelova kritéria.

ad (ii). Část (ii) se dokáže analogicky.

($\sum a_n (x-x_0)^n$ konverguje v bodě $x_2 = x_0 - R$, tj. řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (-R)^n$ konverguje.
Pak $\forall x \in \langle x_0 - R, x_0 \rangle$ platí

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (-R)^n \left(\frac{-(x-x_0)}{R}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{a_n (-R)^n}_{=: a_n(x)} \underbrace{\left(\frac{|x-x_0|}{R}\right)^n}_{=: b_n(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$$

a opět použij Abelova kritéria. $\square$)

Př. Z MA 2 víme, že

$$(*) \qquad \operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad \forall x \in (-1,1).$$

Uvedená řada má poloměr konvergence $R=1$. Pro $x=1$ a $x=-1$ dostáváme řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} \quad \text{a} \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2n+1},$$

které jsou konvergentní (dle Leibnizova kritéria). Z Abelovy věty tedy plyne, že $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \rightrightarrows$ v $\langle -1,1\rangle$ a součet $s(x)$ této řady je spojitá fce v $\langle -1,1\rangle$. Proto

$$(2*) \qquad \underbrace{s(1)}_{} = \lim_{x\to 1-} s(x) \overset{\text{dle }(*)}{=} \lim_{x\to 1-} \operatorname{arctg} x \underset{\text{neb } \operatorname{arctg} \in C(\mathbb{R})}{=} \operatorname{arctg} 1 \quad \left(= \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1}$$

a obdobně dostaneme, že

$$(3*) \qquad \operatorname{arctg}(-1) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2n+1}$$

(což ovšem také plyne z vyjádření arctg 1 a z faktu, že arctg je lichá fce). Z $(*)-(3*)$ pak dostáváme

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad \forall x \in \langle -1,1\rangle.$$

Věta 69 (Dini). Nechť (M, ϱ) je kompaktní metr. prostor. Nechť $f, f_n, n \in \mathbb{N}$, jsou spojité reálné funkce definované na M. Jestliže $f_n \to f$ na M a posloupnost $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ je monotónní $\forall x \in M$, pak $f_n \rightrightarrows f$ na M.

Důkaz. Máme dokázat

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall x \in M \ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon .$$

Buď $\varepsilon > 0$. Položme

$G_n := \{x \in M ; |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\}, \ \forall n \in \mathbb{N}.$

Z předpokladů $f_n \to f$ na M a $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ je monotónní posl. $\forall x \in M$ plyne:

(i) $|f_{n+1}(x) - f(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| \ \forall x \in M \ \forall n \in \mathbb{N}$,

a tedy

(*) $G_n \subset G_{n+1} \ \forall n \in \mathbb{N}$;

(ii) $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$.

Protože $f, f_n, n \in \mathbb{N}$, jsou spojité fce na M, jsou i fce $|f_n - f|$ spojité na M $\forall n \in \mathbb{N}$. Odtud plyne, že G_n, $n \in \mathbb{N}$, jsou otevřené množiny. Přitom, dle (ii), tyto množiny pokrývají kompaktní množinu M. Proto, dle Borelovy věty (Věta 11, 2. přednáška), ex. konečné pokrytí, tj. $M \subset G_{n_1} \cup \ldots \cup G_{n_k}$ pro jisté $k \in \mathbb{N}$. Odtud a z (*) plyne, že $M \subset G_{n_0}$, kde $n_0 = \max\{n_i ; i = 1, \ldots, k\}$. Protože $G_n \subset M$ $\forall n \in \mathbb{N}$, dostáváme, že $M = G_{n_0}$, a odtud, vzhledem k (*), plyne

$M = G_n \ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$. Tedy jsme dokázali

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall x \in M \ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon . \quad \square$$

Diferenciální rovnice

Definice. Buď $n \in \mathbb{N}$ a F reálná fce $n+2$ reálných proměnných. Diferenciální rovnicí rozumíme rovnici tvaru

(1) $$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \,. \quad {}^{*)}$$

Řešením dif. rovnice (1) rozumíme reálnou fci y definovanou na nějakém neprázdném otevřeném intervalu I, která má v každém bodě $x \in I$ vlastní n-tou derivaci $y^{(n)}(x)$ a platí

$$F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0 \quad \forall x \in I.$$

Řešení y rovnice (1) nazveme maximálním, pokud neexistuje řešení z rovnice (1), pro které platí $D(y) \subset D(z)$ a $z|_{D(y)} = y$.

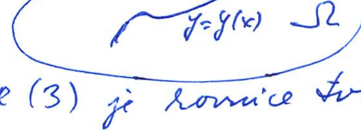
Poznámka. Speciálním případem rovnice (1) je diferenciální rovnice n-tého řádu rozřešená vzhledem k nejvyšší derivaci. Tato rovnice má tvar

(2) $$y^{(n)} = f(x, y, \dots, y^{(n-1)}) \,.$$

Uvažujme dif. rovnici

(3) $$y' = f(x,y) \,,$$

přičemž fce f je definována v nějaké ot. množině $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Hledáme řešení $y = y(x)$ rovnice (3) definované v nějakém neprázdném intervalu (a,b) takové, že bod $[x, y(x)] \in \Omega$ $\forall x \in (a,b)$ (aby číslo $f(x, y(x))$ bylo definováno, tj. hledáme řešení $y = y(x)$, jehož graf leží v Ω



Speciálním případem rovnice (3) je rovnice tvaru

(4) $$y' = f(x) \cdot g(y) \,,$$

tj. RHS(4) je součinem dvou fcí, z nichž jedna závisí jen na x a druhá jen na y. Rovnice (4) je tzv. diferenciální rovnice

---

*) Pokud fce F skutečně závisí na $y^{(n)}$, pak rovnici (1) se říká dif. rovnice n-tého řádu.

se separovanými proměnnými. Budeme předpokládat, že

(5) $f \in C((a,b))$, $g \in C((c,d))$, $g(y) \neq 0 \quad \forall y \in (c,d)$

a budeme hledat řešení, která leží v "obdélníku" $\Omega := (a,b) \times (c,d)$.

Věta 70 (rovnice se separovanými proměnnými). Nechť platí (5). Buď $F \in \int f(x)\,dx$, $x \in (a,b)$, a $G \in \int \frac{dy}{g(y)}$, $y \in (c,d)$. Funkce $y = y(x)$, $y : (\alpha, \beta) \to (c,d)$, kde $(\alpha,\beta) \subset (a,b)$, je řešením rovnice (4) právě tehdy, jestliže existuje $k \in \mathbb{R}$ tak, že

(6) $$G(y(x)) = F(x) + k \quad \forall x \in (\alpha, \beta).$$

Poznámka. Výsledek se snadno pamatuje:

$$\frac{dy}{dx} = f(x)\, g(y) \ \ldots \ \frac{dy}{g(y)} = f(x)\,dx \ \ldots\ldots \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\,dx + \{k\},$$

tedy $G(y) = F(x) + k$. Z této rovnice se snažíme vypočítat fci y jako fci proměnné x.

Důkaz Věty 70. (i) Je-li fce $y = y(x)$ řešením rovnice $y' = f(x)g(y)$ v $(\alpha,\beta) \subset (a,b)$, pak

$$\frac{dy(x)}{dx} = f(x)\, g(y(x)) \quad \forall x \in (\alpha, \beta)$$

$$\Longleftrightarrow \quad \underbrace{\frac{1}{g(y(x))} \frac{dy(x)}{dx}}_{\frac{d}{dx} G(y(x))} = \underbrace{f(x)}_{\frac{d}{dx} F(x)}$$

$$\Rightarrow \quad G(y(x)) = F(x) + k \quad \forall x \in (\alpha, \beta),$$ kde $k \in \mathbb{R}$, tj. platí (6).

(ii) Nechť naopak fce $y = y(x)$ splňuje v $(\alpha,\beta) \subset (a,b)$ rovnici (6), přičemž $y(x) \in (c,d)$ $\forall x \in (\alpha,\beta)$. Pak derivováním rovnice (6) dostaneme

$$\frac{1}{g(y(x))} \cdot \frac{dy(x)}{dx} = f(x) \quad \forall x \in (\alpha, \beta),$$

pokud

(9) fce y má v intervalu (α,β) derivaci.

Ověřme (9): Protože fce $G(y)$ má v (c,d) derivaci $\frac{1}{g(y)}$ stále kladnou nebo stále zápornou (neb $g \neq 0$, $g \in C((c,d))$), je $G = G(y)$ ryze monotónní v (c,d) a zobrazuje (c,d) na jistý (C,D). Tedy existuje inverzní fce k fci G, označme ji Γ. Platí

$G : (c,d) \xrightarrow{\text{na}} (C,D)$

a

$G(y) = z \iff y = \Gamma(z)$, $\Gamma : (C,D) \xrightarrow{\text{na}} (c,d)$.

Fce Γ má v (C,D) derivaci

$$\Gamma'(z) = \frac{1}{G'(y)} = g(y) = g(\Gamma(z)) \quad (\text{kde } y = \Gamma(z)).$$

Tedy z (6) plyne $\eta(x) = \Gamma(F(x)+k)$ $\forall x \in (\alpha,\beta)$. Vnější fce Γ má derivaci v každém bodě $z \in (C,D)$, hodnoty $F(x)+k \in (C,D)$ dle (6) $\forall x \in (\alpha,\beta)$ a v intervalu (α,β) má fce F derivaci. Proto podle věty o derivaci složené fce má fce $\eta(x) = \Gamma(F(x)+k)$ derivaci v (α,β), tj. platí (9). $\square$

Poznámka. Je-li $g(\lambda) = 0$ pro nějaké $\lambda \in (c,d)$, pak řešením rovnice $y' = f(x)g(y)$ je konstantní fce $y = y(x) = \lambda$ $\forall x \in (a,b)$.

20. přednáška MA 3, šk. r. 2016/17, 7.12.2016

Lemma 71 (o lepení řešení). Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je ot. množina, $f \in C(\Omega)$. Nechť $[x_0, y_0] \in \Omega$ a $\delta > 0$. Buď y_L řešení rovnice

(1) $$y' = f(x,y)$$

na intervalu $(x_0 - \delta, x_0)$ a y_R řešení této rovnice na intervalu $(x_0, x_0 + \delta)$. Jestliže

(2) $$\lim_{x \to x_0 -} y_L(x) = y_0 = \lim_{x \to x_0 +} y_R(x),$$

pak funkce

(3) $$y(x) = \begin{cases} y_L(x), & x \in (x_0 - \delta, x_0) \\ y_0, & x = x_0 \\ y_R(x), & x \in (x_0, x_0 + \delta) \end{cases}$$

je řešením rovnice (1) na intervalu $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Důkaz. Je třeba ověřit, že fce y splňuje rovnici (1) také v bodě x_0 (pro body z intervalů $(x_0 - \delta, x_0)$ a $(x_0, x_0 + \delta)$ je to jasné). Podle Věty 96 (o limitě derivací), 22. přednáška MA1, (a její analogii pro derivaci zleva) platí

$$y'_+(x_0) \overset{\text{Věta 96}}{=} \lim_{x \to x_0 +} y_R'(x) \overset{\text{neb } y_R \text{ řeší rovnici (1) na } (x_0, x_0+\delta)}{=} \lim_{x \to x_0 +} f(x, y_R(x)) \overset{\text{neb } f \in C(\Omega) \text{ a platí (2)}}{=} f(x_0, y_0)$$

a analogicky

$$y'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0 -} y_L'(x) = \lim_{x \to x_0 -} f(x, y_L(x)) = f(x_0, y_0).$$

Tedy $y'(x_0)$ existuje a platí $y'(x_0) = f(x_0, y_0) \overset{\text{dle (3)}}{=} f(x_0, y(x_0))$. $\square$

Lineární diferenciální rovnice 1. řádu

$y' = f(x,y)$, kde $f(x,y) = -p(x)y + q(x)$, $p, q \in C((a,b))$,
$(a,b) \subset \mathbb{R}$.

Tedy

(*) $y' + p(x)y = q(x)$, $p, q \in C((a,b))$.

Hledáme řešení rovnice (*), jehož graf leží v $:= (a,b) \times \mathbb{R}$.

Nejjednodušší metoda, jak řešit rovnici (*), je popsána v následující větě.

Věta 72 (metoda integračního faktoru). Nechť $(a,b) \subset \mathbb{R}$ je neprázdný interval, $p, q \in C((a,b))$, $P \in \int p(x)\,dx$ na (a,b).
Fce y (s $D(y) = (a,b)$) je maximálním řešením rovnice (*) právě tehdy, když

(2*) $y(x)e^{P(x)} \in \int q(x)e^{P(x)}\,dx$ na (a,b).

Důkaz. Nechť y řeší na (a,b) rovnici (*). Pak

$$\underbrace{\big(y'(x) + p(x)\,y(x)\big)e^{P(x)}}_{\frac{d}{dx}\left(y(x)e^{P(x)}\right)} = q(x)\,e^{P(x)} \quad \forall x \in (a,b)$$

$\Rightarrow$ platí (2*).

Nechť naopak y splňuje (2*). Pak platí

$$\left(y(x)e^{P(x)}\right)' = q(x)e^{P(x)} \quad \forall x \in (a,b)$$

$$\Leftrightarrow \quad y'(x)e^{P(x)} + y(x)e^{P(x)}p(x) = q(x)e^{P(x)} \quad \forall x \in (a,b)$$

$$\Leftrightarrow \quad \big(y'(x) + y(x)p(x) - q(x)\big)e^{P(x)} = 0 \quad \forall x \in (a,b)$$

$$\Leftrightarrow \quad y'(x) + p(x)y(x) = q(x) \quad \forall x \in (a,b). \quad \square$$

Poznámka. Z Věty 72 plyne: Je-li $[x_0, y_0] \in (a,b) \times \mathbb{R}$ a y maximální řešení rovnice (*) splňující $y(x_0) = y_0$, pak ex. $C \in \mathbb{R}$ tak, že

$$y(x)e^{P(x)} = \int_{x_0}^{x} q(t)e^{P(t)}\,dt + C \quad \forall x \in (a,b)$$

$$\Longrightarrow \quad \underbrace{y(x_0)}_{=y_0} e^{P(x_0)} = C \quad , \text{ tj. } C = y_0 e^{P(x_0)}.$$

Tedy $y(x) e^{P(x)} = \int_{x_0}^{x} q(t) e^{P(t)} dt + y_0 e^{P(x_0)} \quad \forall x \in (a,b)$

$$\Longrightarrow (3*) \quad \underbrace{y(x) = e^{-P(x)} \left(\int_{x_0}^{x} q(t) e^{P(t)} dt + y_0 e^{P(x_0)} \right) \quad \forall x \in (a,b).}$$

Volíme-li fci $P \in \int p(x)\,dx$ tak, že $P(x_0) = 0$, pak

$$\underbrace{y(x) = e^{-P(x)} \left(\int_{x_0}^{x} q(t) e^{P(t)} dt + y_0 \right) \quad \forall x \in (a,b).}$$

Z uvedeného plyne, že $\exists!$ maximální řešení rovnice $(*)$ splňující podmínku $y(x_0) = y_0$. Toto řešení má tvar $(3*)$.

Lineární diferenciální rovnice n-tého řádu s konstantními koeficienty

Jedná se o rovnici tvaru

(1) $\quad y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_0 y = q(x), \quad x \in (a,b) \subset \mathbb{R},$

kde $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ a $q \in C((a,b))$. Homogenní rovnice příslušná k rovnici (1) je rovnice

(2) $\quad y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_0 y = 0.$

Věta 73 (o existenci a jednoznačnosti). Nechť $x_0 \in (a,b)$, $y_0, \dots, y_{n-1} \in \mathbb{R}$. Pak existuje právě jedno maximální řešení rovnice (1) (definované na celém intervalu (a,b)), pro které platí

(3) $\quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}.$

Důkaz vynecháme.

Věta 74 (řešení homogenní rovnice). Maximální řešení rovnice (2) jsou definována na celém $\mathbb{R}$ a tvoří vektorový podprostor dimenze n prostoru $C^n(\mathbb{R})$.

Důkaz. Buď $L: C^n(\mathbb{R}) \to C(\mathbb{R})$ zobrazení dané předpisem

$$L(y) = y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_0 y, \quad y \in C^n(\mathbb{R}).$$

Protože pro $y, y_1, y_2 \in C^n(\mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{R}$ a $\forall k \in \{0,1,\dots,n\}$ platí

$$(y_1 + y_2)^{(k)}(x) = y_1^{(k)}(x) + y_2^{(k)}(x), \qquad (\lambda y)^{(k)}(x) = \lambda y^{(k)}(x), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

tak zobrazení L je lineární. Přitom fce $y \in C^n(\mathbb{R})$ řeší rovnici (2) právě tehdy, když $y \in \operatorname{Ker} L$. Odtud plyne, že maximální řešení rovnice (2) tvoří vektorový podprostor prostoru $C^n(\mathbb{R})$.

Z Věty 73 plyne, že ex. maximální řešení rovnice (2) splňující

$$(4)\quad \begin{array}{llll} y_1(0)=1 & y_2(0)=0 & \dots & y_n(0)=0 \\ y_1'(0)=0 & y_2'(0)=1 & \dots & y_n'(0)=0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(0)=0 & y_2^{(n-1)}(0)=0 & \dots & y_n^{(n-1)}(0)=1 . \end{array}$$

Tvrdíme, že fce $y_1, \dots, y_n$ tvoří bázi prostoru $\operatorname{Ker} L$.

Nejprve dokážeme, že fce $y_1, \dots, y_n$ jsou lineárně nezávislé: Nechť platí

$$c_1 y_1 + \dots + c_n y_n = 0 \quad , \text{ kde } c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}.$$

Derivováním této rovnosti dostaneme

$$(5)\quad c_1 y_1^{(k)}(x) + \dots + c_n y_n^{(k)}(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall k \in \{0, 1, \dots, n-1\}.$$

Dosadíme-li do (5) za x bod 0 a použijeme-li (4), pak dostaneme $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$. Tedy fce $y_1, \dots, y_n$ jsou lineárně nezávislá řešení rovnice (2).

Nyní dokážeme, že řešení $y_1, \dots, y_n$ generují prostor všech maximálních řešení rovnice (2). Buď y max. řešení rovnice (2). Nechť

$$c_1 := y(0) \,, \quad c_2 := y'(0), \dots, c_n := y^{(n-1)}(0)$$

a

$$z := c_1 y_1 + \dots + c_n y_n .$$

Pak z je maximálním řešením rovnice (2) a platí

$$z(0) = c_1 \,, \quad z'(0) = c_2 \,, \dots, \quad z^{(n-1)}(0) = c_n .$$

Z Věty 73 pak ihned plyne, že $z = y$, a tedy $y = c_1 y_1 + \dots + c_n y_n$. □

<u>Lemma 75 (o řešení nehomogenní rovnice).</u> Buď Y maximální řešení rovnice (1). Pak fce y je maximálním řešením rovnice (1) právě tehdy, když $y = Y + z$, kde z je nějaké řešení rovnice (2) na (a, b).

Důkaz. Řeší-li Y rovnici (1) a z rovnici (2), pak z linearity operátoru derivování plyne, že $Y+z$ řeší rovnici (1).

Naopak, je-li y maximální řešení rovnice (1), pak $y-Y=:z$ řeší rovnici (2) na (a,b), tj. $y=Y+z$. □

Definice. Bázi prostoru všech maximálních řešení rovnice (2) nazýváme fundamentální systém rovnice (2).

Definice. Polynom $\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 =: \varphi(\lambda)$ nazveme charakteristickým polynomem rovnice (2).

Věta 76 (o fundamentálním systému LDR s KK). Nechť $\lambda_1,\dots,\lambda_s$ jsou všechny různé reálné kořeny charakteristického polynomu φ s násobnostmi $r_1,\dots,r_s$. Nechť $\alpha_1+i\beta_1,\dots,\alpha_\ell+i\beta_\ell$ jsou všechny různé komplexní kořeny polynomu φ s kladnou imaginární částí a násobnostmi $q_1,\dots,q_\ell$.*) Pak fce

$$
\begin{array}{llll}
e^{\lambda_1 x}, & x e^{\lambda_1 x}, & \dots & x^{r_1-1} e^{\lambda_1 x}, \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
e^{\lambda_s x}, & x e^{\lambda_s x}, & \dots & x^{r_s-1} e^{\lambda_s x}, \\
e^{\alpha_1 x}\cos\beta_1 x, & x e^{\alpha_1 x}\cos\beta_1 x, & \dots & x^{q_1-1} e^{\alpha_1 x}\cos\beta_1 x, \\
e^{\alpha_1 x}\sin\beta_1 x, & x e^{\alpha_1 x}\sin\beta_1 x, & \dots & x^{q_1-1} e^{\alpha_1 x}\sin\beta_1 x, \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
e^{\alpha_\ell}\cos\beta_\ell x, & x e^{\alpha_\ell}\cos\beta_\ell x, & \dots & x^{q_\ell-1} e^{\alpha_\ell}\cos\beta_\ell x, \\
e^{\alpha_\ell}\sin\beta_\ell x, & x e^{\alpha_\ell}\sin\beta_\ell x, & \dots & x^{q_\ell-1} e^{\alpha_\ell}\sin\beta_\ell x
\end{array}
$$

tvoří fundamentální systém rovnice (2).

K důkazu Věty 76 použijeme několik lemmat.

---

*) Předpokládáme, že $\alpha_j, \beta_j \in \mathbb{R}$ $\forall j=1,\dots,\ell$.