Početní část

Příklad 1 Nechť

$$F(x,y,z) = (0, x^2, 0), \ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$$

a nechť plocha

$$P = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x > 0, y > 0, x + y < 1, x + y^2 - z = 0\}$$

je orientovaná „nahoru“ (tj. jednotkovým normálovým polem ν, pro které $\nu_3 > 0$).

Spočtěte $T = \int_P \overrightarrow{\operatorname{rot} F}\, d\overrightarrow{S}$

(i) z definice;

(ii) pomocí Stokesovy věty.

Napište znění Stokesovy věty a přehledně napište, co je v našem případě (např.) φ, G, ψ, φ^*. Srozumitelně ověřte, že Vámi zvolená parametrizace ψ je kladná. To, že jsou splněny ostatní předpoklady Stokesovy věty, nemusíte dokazovat (ale musí to být pravda).

(10 bodů)

Příklad 2 Napište (v co nejjednodušší formě) kosinovou řadu, která má na intervalu $[0, \pi]$ za součet funkci $\pi - x$. Tuto její vlastnost dokažte. Napište znění věty (důsledku, tvrzení) *z přednášky*, kterou užíváte; předpoklady ověřte.

(5 bodů)

Příklad 3 Uvažujme diferenciální rovnici

$$\frac{x^2y - y + x^2}{x^2} + y' \cdot \frac{x^2 - 3x + 1}{x} = 0.$$

Nalezněte (i s definičním oborem) maximální řešení y této rovnice, pro které platí $y(1) = 0$. Svůj postup srozumitelně vysvětlete.

(5 bodů)

Nutné podmínky na hodnocení **dobře**:
- dosažení aspoň **8*** bodů jak z početní, tak i z teoretické části.
- dosažení aspoň **19*** bodů z obou částí dohromady.

Nutné podmínky na hodnocení **velmi dobře**:
- dosažení aspoň **11*** bodů jak z početní, tak i z teoretické části.
- dosažení aspoň **25* (17)** bodů z obou částí dohromady.
- dosažení aspoň **5*** bodů z důkazové úlohy D1 nebo z úlohy D2.

Nutné podmínky na hodnocení **výborně**:
- dosažení aspoň **13* (8)** bodů jak z početní, tak i z teoretické části.
- dosažení aspoň **30* (20)** bodů z obou částí dohromady.
- dosažení aspoň **6* (5)** bodů z důkazové úlohy D2.

Početní část

Příklad 1 Nechť

$$G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < z < 1\} \quad a$$

$$F(x,y,z) = (y,x,z), \ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

Ověřte rovnost z věty o divergenci pro tento případ přímým výpočtem obou stran této rovnosti. Svůj postup srozumitelně vysvětlete. Znění věty o divergenci (=Gaussovy věty) zformulujte; splnění jejích předpokladů však nemusíte ověřovat. (9 bodů)

Příklad 2 Nechť $\varphi(t) = (t, t^2, 2t^2), \quad t \in [0,1], \quad$ a

$$f(x,y,z) = e^{\sin x}(z-y), \quad F(x,y,z) = (x^2 \cos z, y, \sin z), \qquad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

Spočtěte
(i) $\int_\varphi \text{rot}\, F \, d\varphi$, (2,5 b.)
(ii) $\int_\varphi \text{grad}\, f \, d\varphi$, (1,5 b.)
(iii) $\int_\varphi x \, ds$. (2 b.)
Při výpočtu jednoho z integrálů je vhodné použít větu z přednášky.

Příklad 3 Uvažujme diferenciální rovnici

$$y' - \frac{y}{x} - \frac{x}{8y^2} = 0.$$

Nalezněte definiční obor maximálního řešení y této rovnice, pro které $y(2) = 1$. Svůj postup srozumitelně vysvětlete.
(5 bodů)

Nutné podmínky na hodnocení **dobře**:
- dosažení aspoň **8*** bodů jak z početní, tak i z teoretické části.
- dosažení aspoň **19*** bodů z obou částí dohromady.

Nutné podmínky na hodnocení **velmi dobře**:
- dosažení aspoň **11*** bodů jak z početní, tak i z teoretické části.
- dosažení aspoň **25*** **(17)** bodů z obou částí dohromady.
- dosažení aspoň **5*** bodů z důkazové úlohy D1 nebo z úlohy D2.

Nutné podmínky na hodnocení **výborně**:
- dosažení aspoň **13*** **(8)** bodů jak z početní, tak i z teoretické části.
- dosažení aspoň **30*** **(20)** bodů z obou částí dohromady.
- dosažení aspoň **6*** **(5)** bodů z důkazové úlohy D2.

Teoretická část

Úloha A (2 + 2 body)

(a) Definujte pojem souvislého a obloukově (=křivkově) souvislého metrického prostoru.

(b) Definujte pojem tečného vektoru ke k-rozměrné ploše v $\mathbb{R}^n$.

Úloha B (2 + 2 body)

(a) Napište znění Stokesovy věty. (Použité pojmy nemusíte definovat.)

(b) Napište znění Baireovy věty o kategoriích. Použité pojmy ze 4. semestru plně definujte.

Úloha C Zformulujte a podrobně dokažte větu o výpočtu integrálu $\int_\varphi v$ potenciálního vektorového pole pomocí potenciálu. Použité pojmy ze 4. semestru definujte.
(3 body)

Úloha D1 Zformulujte (1 b.) a podrobně dokažte větu o Jordanově rozkladu. Věty (tvrzení, lemmata) ze 4. semestru, které používáte, zformulujte bez důkazu. Použité pojmy ze 4. semestru definujte.
(7 bodů)

Úloha D2 Zformulujte větu o lokalizaci (1 b.) a Diniho kritérium (1 b.). Tyto věty srozumitelně dokažte. Věty (tvrzení, lemmata) ze 4. semestru, které používáte, zformulujte bez důkazu. Použité pojmy ze 4. semestru definujte.
(9 bodů)

(Body z D1 a D2 se nesčítají, počítá se lepší varianta.)

Nutné podmínky na hodnocení **dobře**:
- dosažení aspoň **8*** bodů jak z početní, tak i z teoretické části.
- dosažení aspoň **19*** bodů z obou částí dohromady.

Nutné podmínky na hodnocení **velmi dobře**:
- dosažení aspoň **11*** bodů jak z početní, tak i z teoretické části.
- dosažení aspoň **25* (17)** bodů z obou částí dohromady.
- dosažení aspoň **5*** bodů z důkazové úlohy D1 nebo z úlohy D2.

Nutné podmínky na hodnocení **výborně**:
- dosažení aspoň **13* (8)** bodů jak z početní, tak i z teoretické části.
- dosažení aspoň **30* (20)** bodů z obou částí dohromady.
- dosažení aspoň **6* (5)** bodů z důkazové úlohy D2.

Teoretická část

Úloha A (2 + 2 body)
(a) Definujte pojem absolutně spojité funkce.
(b) Definujte pojem k-rozměrné implicitně zadané plochy v $\mathbb{R}^n$.

Úloha B (3 + 2 body) (a) Napište znění Gaussovy věty (=věty o divergenci). Pojem regulární hranice $\partial_* G$ definujte. Ostatní pojmy definovat nemusíte.
(b) Napište znění Jordanovy věty o rozkladu. Pojem funkce s konečnou variací plně definujte.

Úloha C Podrobně dokažte, že každý otevřený interval $\emptyset \neq I \subset \mathbb{R}$ je souvislá množina. Použité pojmy ze 4. semestru definujte. Věty (tvrzení, lemmata) která používáte (i z jiných semestrů), zformulujte bez důkazu.
(3 body)

Úloha D1 Zformulujte (2 b. i s definicemi) a podrobně dokažte Baireovu větu (o kategoriích). Použité pojmy ze 4. semestru definujte. Věty (tvrzení, lemmata) ze 4. i 3. semestru, které používáte, zformulujte bez důkazu.
(7 bodů)

Úloha D2 Zformulujte (1 b.) a podrobně dokažte Lebesgueovu větu o derivaci neurčitého Lebesgueova integrálu. Věty (tvrzení, lemmata) ze 4. semestru, které používáte, zformulujte bez důkazu.
(9 bodů)

(Body z D1 a D2 se nesčítají, počítá se lepší varianta.)

Nutné podmínky na hodnocení **dobře**:
- dosažení aspoň **8*** bodů jak z početní, tak i z teoretické části.
- dosažení aspoň **19*** bodů z obou částí dohromady.

Nutné podmínky na hodnocení **velmi dobře**:
- dosažení aspoň **11*** bodů jak z početní, tak i z teoretické části.
- dosažení aspoň **25* (17)** bodů z obou částí dohromady.
- dosažení aspoň **5*** bodů z důkazové úlohy D1 nebo z úlohy D2.

Nutné podmínky na hodnocení **výborně**:
- dosažení aspoň **13* (8)** bodů jak z početní, tak i z teoretické části.
- dosažení aspoň **30* (20)** bodů z obou částí dohromady.
- dosažení aspoň **6* (5)** bodů z důkazové úlohy D2.

Početní část

Příklad 1 Nechť

$$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 < 1, \ 1 < z < 2\} \ \ a$$

$$F(x, y, z) = (xz, xy, z^2), \ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Ověřte rovnost z věty o divergenci pro tento případ přímým výpočtem obou stran této rovnosti. Svůj postup srozumitelně vysvětlete. Znění věty o divergenci (=Gaussovy věty) zformulujte; splnění jejích předpokladů však nemusíte ověřovat.
(10 bodů)

Příklad 2 Napište (v co nejjednodušší formě) sinovou řadu, která má na intervalu $(-\pi, 0]$ za součet funkci x^2. Tuto její vlastnost dokažte. Napište znění věty (důsledku, tvrzení) *z přednášky*, kterou užíváte; předpoklady ověřte.
(5 bodů)

Příklad 3 Uvažujme diferenciální rovnici

$$2x^3yy' + 3x^2y^2 + 7 = 0.$$

Nalezněte definiční obor maximálního řešení y této rovnice, pro které $y(1) = 1$. Svůj postup srozumitelně vysvětlete.
(5 bodů)

Postačující podmínky pro ústní zkoušení na známku **dobře**:
- dosažení aspoň **8*** bodů jak z početní, tak i z teoretické části.
- dosažení aspoň **19*** bodů z obou částí dohromady.

Nutné podmínky na hodnocení **velmi dobře**:
- dosažení aspoň **11*** bodů jak z početní, tak i z teoretické části.
- dosažení aspoň **25* (17)** bodů z obou částí dohromady.
- dosažení aspoň **5*** bodů z důkazové úlohy D1 nebo z úlohy D2.

Nutné podmínky na hodnocení **výborně**:
- dosažení aspoň **13* (8)** bodů jak z početní, tak i z teoretické části.
- dosažení aspoň **30* (20)** bodů z obou částí dohromady.
- dosažení aspoň **6* (5)** bodů z důkazové úlohy D2.

Teoretická část

Úloha A (2 + 3 body)

(a) Definujte pojem souvislého a obloukově (=křivkově) souvislého metrického prostoru.

(b) Definujte plošný integrál 1. druhu $\int_P f\, dS$ pro případ, kdy P je k-rozměrná parametricky zadaná plocha v $\mathbb{R}^n$. Všechny použité pojmy ze 4. semestru plně definujte.

Úloha B (2 + 2 body)

(a) Napište znění dvou Weierstrassových vět o aproximaci. Použité pojmy ze 4. semestru definujte.

(b) Napište znění věty o charakterizaci potenciálnosti C^1 vektorového pole na hvězdicovité množině pomocí parciálních derivací. Použité pojmy ze 4. semestru definujte.

Úloha C

(i) (1,5 b.) Definujte pojem separabilního metrického prostoru a báze otevřených množin.

(ii) (1,5 b.) Podrobně dokažte, že pokud má metrický prostor spočetnou bázi otevřených množin, pak je tento metrický prostor separabilní.

Úloha D1 Zformulujte (1 b.) a podrobně dokažte Banachův princip kontrakce (větu o pevném bodě). Použité pojmy ze 4. semestru definujte. Věty (tvrzení, lemmata) ze 4. semestru, které používáte, zformulujte bez důkazu.
(7 bodů)

Úloha D2 Zformulujte větu o lokalizaci (1 b.) a Diniho kritérium (1 b.). Tyto věty srozumitelně dokažte. Věty (tvrzení, lemmata) ze 4. semestru, které používáte, zformulujte bez důkazu. Použité pojmy ze 4. semestru definujte.
(9 bodů)

(Body z D1 a D2 se nesčítají, počítá se lepší varianta.)

Postačující podmínky pro ústní zkoušení na známku **dobře**:
- dosažení aspoň **8*** bodů jak z početní, tak i z teoretické části.
- dosažení aspoň **19*** bodů z obou částí dohromady.

Nutné podmínky na hodnocení **velmi dobře**:
- dosažení aspoň **11*** bodů jak z početní, tak i z teoretické části.
- dosažení aspoň **25* (17)** bodů z obou částí dohromady.
- dosažení aspoň **5*** bodů z důkazové úlohy D1 nebo z úlohy D2.

Nutné podmínky na hodnocení **výborně**:
- dosažení aspoň **13* (8)** bodů jak z početní, tak i z teoretické části.
- dosažení aspoň **30* (20)** bodů z obou částí dohromady.
- dosažení aspoň **6* (5)** bodů z důkazové úlohy D2.

Písemka pro cvičení z MA4 dne 6.5.2015

1.

(a) Spočtěte $\int_J \vec{F}\, d\vec{S}$, kde $\vec{F}(x,y,z) = (y,z,x)$, $J = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 5,\ x+y+z=0\}$.

(b) Spočtěte integrál z (a) pomocí Stokesovy věty a plošného integrálu z rotace přes kruh $K (= \operatorname{conv} J)$ s hranicí J.

(c) Vyjádřete integrál přes J pomocí integrálu přes cestu $\psi \circ \varphi$, kde $K = \psi(\operatorname{Int} \varphi)$ a všechny další předpoklady "klasické Stokesovy věty"jsou splněny (ověřte).

(8 bodů)

2. Dokažte, že pro každý metrický prostor (X,ρ) platí ekvivalence

$$(X,\rho) \text{ je separabilní, právě když } (\forall \varepsilon > 0)(\exists S \subset X \text{ spočetná}) S \text{ je } \varepsilon - \text{síť } (X,\rho).$$

(4 body)

2. test

Pomocí Stokesovy věty spočtěte integrál

$$\int_C (2y - z^4)\,\mathrm{d}x + 2yz\,\mathrm{d}y + y(y+1)\,\mathrm{d}z,$$

kde $C = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 = 1, x^2 + z^2 = 4, z > 0\}$ je orientovaná proti směru hodinových ručiček při pohledu z kladné části osy z. Nezapomeňte ověřit předpoklady.