

Vlastní čísla a vlastní vektory

1) Je dána matice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 12 & -2 \\ -1 & -3 & 1 \\ -3 & -12 & 4 \end{pmatrix}$$

Rozhodněte, zda jsou dané vektory vlastními vektory matice A a pokud ano, určete vlastní číslo, kterému přísluší.

a) $\vec{x} = (1; 1; 1)^T$

b) $\vec{x} = (3; -1; -3)^T$

c) $\vec{x} = (-2; 1; 3)^T$

d) $\vec{x} = (2; -1; -2)^T$

2) Určete vlastní čísla a vlastní vektory následujících matic.

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 100 \\ 0 & 3 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -10 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Výsledky:

1)

- a) $\vec{x} = (1, 1, 1)^T$ není vlastním vektorem.
- b) $\vec{x} = (3, -1, -3)^T$ je vlastním vektorem příslušným vlastnímu číslu 3.
- c) $\vec{x} = (-2, 1, 3)^T$ je vlastním vektorem příslušným vlastnímu číslu 2.
- d) $\vec{x} = (2, -1, -2)^T$ je vlastním vektorem příslušným vlastnímu číslu 1.

2)

- B** $\lambda_1 = 3, v_1 = (1, 0)^T; \lambda_2 = 4, v_2 = (0, 1)^T$
- C** $\lambda_1 = 4, v_1 = (2, 1)^T; \lambda_2 = -1, v_2 = (1, -2)^T$
- D** $\lambda_1 = 0, v_1 = (1, -1)^T; \lambda_2 = 3, v_2 = (1, 2)^T$
- E** Nemá reálná vlastní čísla; $\lambda_1 = i, v_1 = (1, i)^T; \lambda_2 = -i, v_2 = (i, 1)^T$
- F** $\lambda_1 = 4, v_1 = (50, \sqrt{2}, 1)^T; \lambda_2 = 3, v_2 = (0, 1, 0)^T; \lambda_3 = 2, v_3 = (1, 0, 0)^T$
- G** $\lambda_1 = 0, v_1 = (2, 1, 1)^T; \lambda_2 = 2, v_2 = (1, -1, 0)^T; \lambda_3 = -1, v_3 = (2, 0, 1)^T$

Úlohy k zamyšlení

- 1) Najděte alespoň dvě různé matice 3. řádu, jejichž vlastní čísla jsou 3, 4, 5.
- 2) Najděte alespoň dvě různé **symetrické** matice 2. řádu, jejichž vlastní čísla jsou 3 a 4.
- 3) Určete matici A , víte-li, že obrazem vektoru $\vec{x}_1 = (1, 1)$ je vektor $A\vec{x}_1 = (8, 8)$ a obrazem vektoru $\vec{x}_2 = (1, -1)$ je vektor $A\vec{x}_2 = (-2, 2)$.
- 4) Napište nějakou matici 2. řádu, víte-li, že:
 - její charakteristický polynom je $\lambda^2 - 8\lambda + c$, kde $c \in R$ je nějaké neznámé číslo.
 - její determinant je 12
- 5) Najděte alespoň tři různé matice 2. řádu, jejichž vlastní vektory jsou $(1, 0)$ a $(0, 1)$ a charakteristický polynom má tvar

$$\lambda^2 - c\lambda + 12,$$

kde $c \in R$ je nějaké neznámé číslo.

- 6) Napište nějakou matici 3. řádu, víte-li, že:
 - $\lambda_1 = 3$ a $\lambda_2 = 2$ jsou její vlastní čísla
 - její determinant je -24
 - její vlastní vektory na sebe nejsou kolmé
- 7) Napište nějakou matici 3. řádu, víte-li, že:
 - její charakteristický polynom je $(\lambda - 1)(\lambda - 5)^2$
 - vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu $\lambda = 1$ je $(1, 0, -1)$