

### 3. zápočtový test - vzor

Matematika A (B413001)

Objem rotačních těles, konvergence integrálů, diferenciální rovnice

#### Objem rotačního tělesa

a) Pomocí vzorce pro výpočet objemu rotačního tělesa vypočtete objem kužele o výšce 6, jehož podstavou je kruh o poloměru 3.

b) Vypočtete objem rotačního tělesa, které vznikne rotací obrazce vymezeného křivkami  $y = 3x + 9$  a  $y = 9 - x^2$  kolem osy  $x$ .

#### Konvergence integrálů

Rozhodněte o konvergenci daných integrálů.

$$a) \int_0^1 \ln x \, dx, \quad b) \int_0^\infty x e^{-x} \, dx, \quad c) \int_5^\infty \frac{1}{x^2 - x - 12} \, dx, \quad d) \int_0^\infty \frac{x}{x^2 + 1} \, dx$$

#### Diferenciální rovnice - separace proměnných

Určete partikulární řešení rovnice s danou počáteční podmínkou.

$$a) \quad y' = \cotg x (y - 1)^2, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3}{2}$$

$$b) \quad y' = \frac{y^3}{x^2}, \quad y(1) = -1$$

#### Diferenciální rovnice - variace konstant

$$c) \quad y' = \frac{y}{2} \cotg x - \cos x, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$$

#### Diferenciální rovnice - metoda odhadu (speciální pravá strana)

$$d) \quad y'' - 2y' + y = \cos x, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = \frac{5}{2}$$

*Výsledky:*

*Objem rotačního tělesa:* a)  $18\pi$ , b)  $\frac{243}{5}\pi$ ;

*Konvergence integrálů:* a)  $-1$ , konverguje, b)  $1$ , konverguje, c)  $\frac{3 \ln 2}{7}$ , konverguje, d)  $+\infty$ , diverguje

*Diferenciální rovnice:* a) řešení leží v  $(0, \pi) \times (1, \infty)$ ,  $y = 1 + \frac{1}{2 - \ln(\sin x)}$ ,  $x \in (0, \pi)$ , b) řešení leží v  $(0, \infty) \times (-\infty, 0)$ ,  $y = -\sqrt{\frac{x}{2-x}}$ ,  $x \in (0, 2)$  c)  $y = 4\sqrt{\sin x} - 2 \sin x$ ,  $x \in (0, \pi)$ , d)  $y = e^x(x + 2) - \frac{1}{2} \sin x$ ,  $x \in \mathbb{R}$