Příklad 4.6. Zjistěte, zda jsou následující funkce sudé/liché.

a) $f(x) = x \sin x$

b) $f(x) = x^3 + 2$

c) $f(x) = x^3 \cos x$

d) $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$

e) $f(x) = \dfrac{\ln(1+x^4)}{x}$

f) $f(x) = -\operatorname{sgn}(x)$

g) $f(x) = x\mathrm{e}^x$

h) $f(x) = \operatorname{tg} x - x^3$

i) $f(x) = 2^{\sqrt{x^2-4}}$

j) $f(x) = 2^x - 2^{-x}$

k) $f(x) = 2^x\, 2^{-x}$

l)* $f(x) = \ln \dfrac{2-x}{2+x}$

Řešení 4.6.

a) s.

b) ani ani

c) l.

d) l.

e) l.

f) l.

g) ani ani

h) l.

i) s.

j) l.

k) s.

l)* l.

Příklad 4.7. Operace s funkcemi. Buď $f(x) = x^2$, $g(x) = \sin x$. Najděte funkční předpisy a definiční obory funkcí

a) $f + g$

b) $f\,g$

c) g/f

d) f/g

e) $f \circ g$

f) $g \circ f$

Řešení 4.7.

a) $(f+g)(x) = x^2 + \sin x,\ \mathcal{D}(f+g) = \mathbb{R}$

b) $(fg)(x) = x^2 \sin x,\ \mathcal{D}(fg) = \mathbb{R}$

c) $(g/f)(x) = \dfrac{\sin x}{x^2},\ \mathcal{D}(g/f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

d) $(f/g)(x) = \dfrac{x^2}{\sin x}, \mathcal{D}(f/g) = \mathbb{R} \backslash \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

e) $(f \circ g)(x) = \sin^2 x,\ \mathcal{D}(f \circ g) = \mathbb{R}$

f) $(g \circ f)(x) = \sin x^2,\ \mathcal{D}(g \circ f) = \mathbb{R}$

Příklad 4.8. Napište funkční předpisy a definiční obory složených funkcí $f \circ g$ a $g \circ f$. Načrtněte jejich grafy. Určete obory hodnot.

a) $f(x) = |x|\,,\; g(x) = \mathrm{e}^x$

b) $f(x) = \sqrt{x},\; g(x) = 1 - x$

c) $f(x) = x^3,\; g(x) = 2 + 3x$

d)* $f(x) = \operatorname{sgn}(x),\; g(x) = \cos x$

Řešení 4.8.

a) $(f \circ g)(x) = |\mathrm{e}^x|\,,$
$\mathcal{D}(f \circ g) = \mathbb{R},\; \mathcal{H}(f \circ g) = (0, \infty)$
$(g \circ f)(x) = \mathrm{e}^{|x|}$
$\mathcal{D}(g \circ f) = \mathbb{R},\; \mathcal{H}(g \circ f) = \langle 1, \infty)$

b) $(f \circ g)(x) = \sqrt{1-x},$
$\mathcal{D}(f \circ g) = (-\infty, 1\rangle\,,\; \mathcal{H}(f \circ g) = \langle 0, \infty)$
$(g \circ f)(x) = 1 - \sqrt{x}$
$\mathcal{D}(g \circ f) = \langle 0, \infty\rangle\,,\; \mathcal{H}(g \circ f) = (-\infty, 1\rangle$

c) $(f \circ g)(x) = (2+3x)^3,$
$\mathcal{D}(f \circ g) = \mathbb{R},\; \mathcal{H}(f \circ g) = \mathbb{R}$
$(g \circ f)(x) = 2 + 3x^3$
$\mathcal{D}(g \circ f) = \mathbb{R},\; \mathcal{H}(g \circ f) = \mathbb{R}$

d) $(f \circ g)(x) = \operatorname{sgn}(\cos x)),$
* $\mathcal{D}(f \circ g) = \mathbb{R},\; \mathcal{H}(f \circ g) = \{-1\} \cup \{0\} \cup \{1\}$
$(g \circ f)(x) = \cos(\operatorname{sgn} x))$
$\mathcal{D}(g \circ f) = \mathbb{R},\; \mathcal{H}(g \circ f) = \{\cos 1\} \cup \{1\}$

Příklad 4.9. Napište předpis a definiční obor složené funkce $f \circ g \circ h$, je-li

a) $f(x) = \ln x,\; g(x) = 1 - x\,,\; h(x) = \frac{1}{x}$

b) $f(x) = |x|\,,\; g(x) = 2 - x\,,\; h(x) = x^2$

c) $f(x) = \sqrt{x},\; g(x) = \sin x,\; h(x) = x + \pi$

Řešení 4.9.

a) $(f \circ g \circ h)(x) = \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right),\; \mathcal{D}(f \circ g \circ h) = (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$

b) $(f \circ g \circ h)(x) = \left|2 - x^2\right|,\; \mathcal{D}(f \circ g \circ h) = \mathbb{R}$

c) $(f \circ g \circ h)(x) = \sqrt{\sin(x+\pi)},\; \mathcal{D}(f \circ g \circ h) = \bigcup \{\langle (2k-1)\pi, 2k\pi\rangle\,,\; k \in \mathbb{Z}\}$

Příklad 4.10. Složená funkce: Zapište následující funkce jako složené.

a) $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{x+1}{x+3}} \left(= \mathrm{e}^{1 - \frac{2}{x+3}}\right)$

b) $f(x) = \sqrt{1 - \log^2(x+1)}$

c) $f(x) = 1 - 2^{\sin x}$

Řešení 4.10.

a) $f = f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1,\; f_1(x) = x + 3,\; f_2(x) = \frac{1}{x},\; f_3(x) = 1 - 2x,\; f_4(x) = \mathrm{e}^x$

b) $f = f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1,\; f_1(x) = x + 1,\; f_2(x) = \log(x),\; f_3(x) = 1 - x^2,\; f_4(x) = \sqrt{x}$

c) $f = f_3 \circ f_2 \circ f_1,\; f_1(x) = \sin x,\; f_2(x) = 2^x,\; f_3(x) = 1 - x$

Příklad 4.11. Funkce definované po částech: Načrtněte graf funkce f. Z grafu určete obor hodnot $\mathcal{H}(f)$, zda je funkce omezená, prostá a zda je na svém $\mathcal{D}(f)$ monotonní.

a) $f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^x, & x < 0 \\ \log 100, & x \geq 0 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} (x+1)^3 - 1, & x \in (-3, 0) \\ \log_2(x+1), & x \in \langle 0, 3) \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in (-2, 1\rangle \\ |2 - x|\,, & x \in (1, 4) \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} 1 + \sqrt{-x}, & x \leq 0 \\ 1 - \frac{1}{(x+1)^2}, & x > 0 \end{cases}$

e) $f(x) = \begin{cases} \cos\frac{\pi}{4}, & x \in (-\infty, -1\rangle \\ x^3, & x \in (-1, 1) \\ \mathrm{e}^{-x+1} & x \in \langle 1, \infty) \end{cases}$

f) $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x+1}, & x < 0 \\ 0\,, & x = 0 \\ \frac{1}{x^2} + 1, & x > 0 \end{cases}$

*(**Nejde** o složené funkce!)*

Příklad 4.12. Načrtněte graf (nějaké) funkce s vlastnostmi

a) $\mathcal{D}(f) = (-\infty, 4\rangle$, $f(4) = -6$, f je klesající na $\mathcal{D}(f), \mathcal{H}(f) = \{-6\} \cup (-5, 2)$

b) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$, f je sudá, 2-periodická a $f(x) = x^2$ pro $x \in \langle 0, 1\rangle$

c) $\mathcal{D}(f) = \langle -1, 1\rangle$, f je lichá, $\mathcal{H}(f) = \mathbb{R}$, f není monotónní na $\mathcal{D}(f)$

d) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$, $\mathcal{H}(f) = (-5, 2\rangle$, f je rostoucí na $(-\infty, 1)$ a klesající na $(1, \infty)$, $f(1) =?$

Příklad 4.13. Určete $\mathcal{D}(f)$ a rozhodněte, zda je funkce prostá.

a) $f(x) = 3^{\frac{x+1}{x+3}}$

b) $f(x) = \dfrac{\mathrm{tg}(x - \frac{\pi}{2})}{4} + 1$

c) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{9 + x^2}}$

d) $f(x) = \sqrt{\ln x}$

e) $f(x) = \begin{cases} x - 1, & x < 0 \\ \frac{x}{x+1}, & x \geq 0 \end{cases}$

f) $f(x) = \begin{cases} |x - 3|, & x \in (-2, 4) \\ 5 - x, & x \in \langle 4, 8) \end{cases}$

Příklad 4.18. Načrtněte graf (nějaké) prosté funkce, pro kterou $\mathcal{D}(f) = (-\infty, 4\rangle, f(-6) = -6$, $f(4) = 3$. K tomuto grafu načrtněte graf funkce inverzní.