Příklad 4.17. Určete definiční obor a obor hodnot pro následující složené funkce. (*Některé funkce nejsou prosté.*)

a) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{9+x^2}}$

b) $f(x) = \pi - \operatorname{arccotg}(x)$

c) $f(x) = \arcsin(\frac{1}{2} - \sqrt{x})$

d) $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{x+3}{x+2}}$

e)* $f(x) = \dfrac{1}{2-\sqrt{x}}$

f)* $f(x) = \sqrt{1-\log^2(x+1)}$

Řešení 4.17.

a) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}, \mathcal{H}(f) = \left(0, \frac{1}{3}\right\rangle$

b) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}, \mathcal{H}(f) = (0, \pi)$

c) $\mathcal{D}(f) = \left\langle 0, \frac{9}{4}\right\rangle, \mathcal{H}(f) = \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}\right\rangle$

d) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-2\}, \mathcal{H}(f) = (0, \mathrm{e}) \cup (\mathrm{e}, \infty)$

e)* $\mathcal{D}(f) = \langle 0, 4) \cup (4, \infty),$
$\mathcal{H}(f) = (-\infty, 0) \cup \left\langle \frac{1}{2}, \infty\right)$

f)* $\mathcal{D}(f) = \left\langle -\frac{9}{10}, 9\right\rangle, \mathcal{H}(f) = \langle 0, 1\rangle$

Příklad 4.19. Určete definiční obor funkce. Rozhodněte, zda k dané funkci existuje funkce inverzní, v kladném případě určete její definiční obor a předpis.

a) $f(x) = 3x - 2$

b) $f(x) = \dfrac{x^3}{x}$, $x \neq 0$

c) $f(x) = 3\pi - \operatorname{arccotg} x$

d) $f(x) = 1 - \sqrt{x+2}$

e) $f(x) = \sqrt{4 - \sqrt{x-1}}$

f) $f(x) = \arcsin^2 3x$

g) $f(x) = \arccos^2 x$

h) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-4}}{x}$, $x \in \langle 2, \infty)$

i) $f(x) = \ln \dfrac{1-x}{1+x}$

j)* $f(x) = \sqrt{\dfrac{\log_{\frac{1}{3}} x - 1}{\log_{\frac{1}{3}} x - 2}}$

Řešení 4.19.

a) $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$, prostá, $f^{-1}(x) = \frac{x+2}{3}$, $\mathcal{D}(f^{-1}) = \mathcal{H}(f) = \mathbb{R}$

b) $f(x) = \dfrac{x^3}{x} = x^2$, pro $x \neq 0$, není prostá $\Leftarrow$ sudá

c) rostoucí na $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} \Rightarrow$ prostá $\Rightarrow \exists f^{-1}$, $\mathcal{D}(f^{-1}) = (2\pi, 3\pi)$, $f^{-1}(x) = \operatorname{cotg}(3\pi - x)$.

d) $\mathcal{D}(f) = \langle -2, \infty)$, složena z prostých: $x+2$, $\sqrt{x}$, $1-x \Rightarrow f$ prostá $\Rightarrow \exists f^{-1}$,
$\mathcal{D}(f^{-1}) = \mathcal{H}(f) = (-\infty, 1\rangle$, $f^{-1}(x) = (1-x)^2 - 2$. (POZOR: $\mathcal{D}(f^{-1}) \neq \mathbb{R}$)

e) $\mathcal{D}(f) = \langle 1, 17\rangle$, složena z prostých: $x-1$, $\sqrt{x}$, $4-x$, $\sqrt{x} \Rightarrow f$ prostá $\Rightarrow \exists f^{-1}$,
$\mathcal{D}(f^{-1}) = \langle 0, 2\rangle$, $f^{-1}(x) = \left(4 - x^2\right)^2 + 1$. (POZOR: $\mathcal{D}(f^{-1}) \neq \mathbb{R}$)

f) $\mathcal{D}(f) = \left\langle -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right\rangle$, f není prostá $\Leftarrow$ sudá

g) $\mathcal{D}(f) = \langle -1, 1\rangle$, f, složena z prostých $\Rightarrow$ prostá (i když je vnější funkce x^2) $\Rightarrow \exists f^{-1}$,
$\mathcal{D}(f^{-1}) = \left\langle 0, \pi^2 \right\rangle$, $f^{-1}(x) = \cos\sqrt{x}$. (POZOR: $\mathcal{D}(f^{-1}) \neq \mathbb{R}$)

h) $\mathcal{D}(f) = \langle 2, \infty)$, složena z prostých: x^2, $\frac{4}{x}$, $1-x$, $\sqrt{x} \Rightarrow$ prostá $\Rightarrow \exists f^{-1}$,
$\mathcal{D}(f^{-1}) = \langle 0, 1)$, $f^{-1}(x) = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$.

i) $\mathcal{D}(f) = (-1, 1)$, složena z prostých: $x+1$, $\frac{2}{x}$, $x-1$, $\ln x \Rightarrow$ prostá $\Rightarrow \exists f^{-1}$,
$\mathcal{D}(f^{-1}) = \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = \frac{2}{\mathrm{e}^x+1} - 1$

j)* $\mathcal{D}(f) = \left(0, \frac{1}{9}\right) \cup \left\langle \frac{1}{3}, \infty\right)$, složena z prostých: $\log_{\frac{1}{3}} x$, $x-2$, $\frac{1}{x}$, $1+x$, $\sqrt{x} \Rightarrow$ prostá $\Rightarrow \exists f^{-1}$,
$\mathcal{D}\left(f^{-1}\right) = \langle 0, 1) \cup (1, \infty)$, $f^{-1}(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{x^2-1}+2}$.

Příklad 4.20. Rozhodněte, zda k dané funkci existuje funkce inverzní, v kladném případě určete její definiční obor a předpis. Nakreslete graf funkce, a pokud k ní existuje inverzní funkce, i graf funkce inverzní.

a) $f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-x}, & x < 0 \\ \cos\frac{x}{2}, & x \in \langle 0, 2\,\pi \rangle \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x - 1, & x < 0 \\ \frac{x}{x+1}, & x \geq 0 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} 2 + \sqrt{-x} & x \leq 0 \\ 1 - \dfrac{1}{(x+1)^2} & x > 0 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} x^3, & x \geq 0 \\ 2 - x, & x < 0 \end{cases}$

Řešení 4.20. Po částech definované funkce, grafy f a f^{-1}.

a) klesající na $\mathcal{D}(f) = (-\infty, 2\pi\rangle \Rightarrow$ prostá $\Rightarrow \exists f^{-1}$, $\mathcal{D}(f^{-1}) = \langle -1, \infty)$,
$$f^{-1}(x) = \begin{cases} -\ln x, & x \in (1, \infty) \\ 2\arccos x, & x \in \langle -1, 1 \rangle \end{cases}$$

b) $\forall$ rovnoběžka s osou x má nanejvýš 1 průsečík s grafem f $\Rightarrow$ prostá $\Rightarrow \exists f^{-1}$,
$\mathcal{D}(f^{-1}) = (-\infty, -1) \cup \langle 0, 1)$,
$$f^{-1}(x) = \begin{cases} x + 1, & x \in (-\infty, -1) \\ \frac{1}{1-x} - 1, & x \in \langle 0, 1) \end{cases}$$

c) z grafu prostá $\Rightarrow \exists f^{-1}$, $\mathcal{D}(f^{-1}) = (0, 1) \cup \langle 2, \infty)$,
$$f^{-1}(x) = \begin{cases} -(x-2)^2, & x \in \langle 2, \infty) \\ \frac{1}{\sqrt{1-x}} - 1, & x \in (0, 1) \end{cases}$$

d) $\exists$ rovnoběžka s osou x, která má více než 1 průsečík s grafem f $\Rightarrow f$ není prostá.
POZOR: Funkce $y = x^3$, $y = 2 - x$ jsou na svých přirozených definičních oborech prosté, ale f není *složená* z prostých funkcí.

Příklad 5.3. Rozhodněte, jestli je funkce $y = f(x)$ spojitá na svém definičním oboru. Načrtněte graf funkce.

a) $y = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{(x+1)^2}, & x > 0, \\ 2 + \sqrt{-x}, & x \leq 0 \end{cases}$

b) $y = \begin{cases} \operatorname{arctg} x, & x \in (-\infty, 0\rangle \\ \sqrt[3]{x}, & x \in (0, 1\rangle \\ \frac{1}{x+1} & x \in (1, \infty) \end{cases}$

Řešení 5.3.

a) není spojitá v $x = 0$

b) není spojitá v $x = 1$

Příklad 5.4. Určete hodnotu konstanty $C \in \mathbb{R}$ tak, aby funkce f byla spojitá na svém definičním oboru.

a) $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & x < 1 \\ -x + C & x \geq 1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{3 - x} & x < 3 \\ -(x-2)^2 + C & x \geq 3 \end{cases}$

Řešení 5.4.

a) $C = 2$

b) $C = 1$