3. zápočtový test - vzor

Matematika B (B413002)

Věta o implicitních funkcích, křivkový integrál, potenciální vektorové pole

1) Na okolí bodu $[\frac{\pi}{2}, 0]$ je rovnicí

$$\cos(y+x) - xy^2 = 0$$

implicitně definovaná funkce jedné proměnné $y = f(x)$.

- Určete hodnoty $f(\frac{\pi}{2})$, $f'(\frac{\pi}{2})$ a $f''(\frac{\pi}{2})$.
- Načrtněte graf funkce f na okolí bodu $[\frac{\pi}{2}, 0]$.
- Napište Taylorův polynom 2. stupně v tomto bodě.

2) Je dána rovnice

$$e^{2x+y-z} + yz + \frac{y-1}{x} = 0$$

- Ověřte, že tato rovnice definuje na okolí bodu $[-1, 2, 0]$ implicitně funkci dvou proměnných $z = f(x, y)$.
- Vypočtěte její gradient v tomto bodě.
- Napište obecnou rovnici tečné roviny ke grafu funkce $f(x, y)$ v bodě $[-1, 2, 0]$.

3) Vypočtěte křivkový integrál

$$\int_{\mathcal{K}} (x^2 + y)\,dx + 2y\,dy\,,$$

kde křivka $\mathcal{K}$ je částí grafu funkce $y = \sin x$ s počátečním bodem $[0, 0]$ a koncovým bodem $[\pi, 0]$.

4) Je dáno vektorové pole $\vec{F}(x, y) = \left(\frac{y^2}{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}\,; 2y\ln x + 2\right)$.

1. Určete jeho definiční obor $D(\vec{F})$.
2. Ověřte, že pole $\vec{F}$ je na $D(\vec{F})$ potenciální.
3. Určete potenciál $U(x, y)$ pole $\vec{F}$ tak, aby $U(1, 1) = 2$.