

Zápočtový test
Matematika pro geoinformatiky
1. termín 5. 1. 2023

- 1) Určete definiční obor a obor hodnot následujících funkcí.

$$f(x) = \arcsin\left(\frac{x^2}{9}\right)$$

$$g(x) = \arcsin\left(\frac{x^3}{8}\right)$$

Dále rozhodněte a zdůvodněte, zda jsou dané funkce prosté a pokud ano, určete předpis inverzní funkce. (4 body)

- 2) Zderivujte funkci (1 bod)

$$y = \ln(\sin(3x))$$

- 3) Vypočtěte integrál (1 bod)

$$\int_0^1 (2x + 1)^{49} dx$$

- 4) Najděte řešení diferenciální rovnice

$$y' = \sqrt{y}$$

splňující počáteční podmínku $y(5) = 9$. (1 bod)

- 5) Zakreslete definiční obor funkce $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dané předpisem (1 bod)

$$f(x, y) = \sqrt{4x - x^3 - xy^2}$$

- 6) Vypočítejte obě parciální derivace funkce (1 bod)

$$f(x, y) = 3x \ln y + x^6 - 2y^3 + y \sin(xy)$$

7) Určete rovnici tečny ke grafu funkce

$$f(x) = e^{3x}$$

v jejím průsečíku s osou y . Situaci zakreslete. (1 bod)

8) Určete rovnici tečné roviny ke grafu funkce

$$f(x, y) = x^5 + \ln(2y + 1) + 1$$

v jejím průsečíku s osou z . (1 bod)

9) Určete vlastní čísla a vlastní vektory matice (2 body)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

10) Určete argument komplexního čísla

$$z = (1 - i)^{16}$$

Argument uvádějte v základním tvaru, tedy z intervalu $[0, 2\pi)$. (2 body)

11) Napište předpis afinního zobrazení $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, které zobrazí

- graf funkce $y = 3^x$ na graf funkce $y = \log_3 x$
- parabolu $y = x^2$ na parabolu $y = 12x - 3x^2$
- kružnici $x^2 + y^2 = 1$ na elipsu $4x^2 + 9y^2 - 8x + 54y + 49 = 0$

Rozhodněte, zda je dané zobrazení shodnost či podobnost, potažmo přímá či nepřímá. (3 body)

12) Napište matici otočení kolem osy y o úhel $\frac{\pi}{2}$ proti směru hodinových ručiček. Jaký je obraz bodu $[1, 1, 1]$? (1 bod)

13) Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$$

Určete intervaly monotonie a konvexity, najděte lokální extrémy, inflexní body, průsečíky s osami a graf funkce zakreslete. (3 body)

14) Napište parametrické vyjádření křivky

$$4x^2 + 9y^2 = 36$$

ležící v polorovině $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y \leq 0\}$. Určete tečný vektor k této křivce v jejím průsečíku s osou y . (2 body)

Bonusový příklad (1 bod) Určete graficky počet řešení rovnice

$$e^x - \sin x = 0$$