mělo by zde být lokální a tedy dle „našich představ" i globální minimum:

<u>Potvrzení lokálního minima:</u>

$$H\left(\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V}\right) = \begin{vmatrix} \frac{4V}{a^3}, & 1 \\ 1, & \frac{4V}{b^3} \end{vmatrix}_{\left(\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V}\right)} = 3 > 0, \quad \frac{\partial^2 S}{\partial a^2}\left(\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V}\right) > 0$$

$\Rightarrow$ v bodě $\left(\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V}\right)$ je ostré lokální (a tedy i globální) minimum.

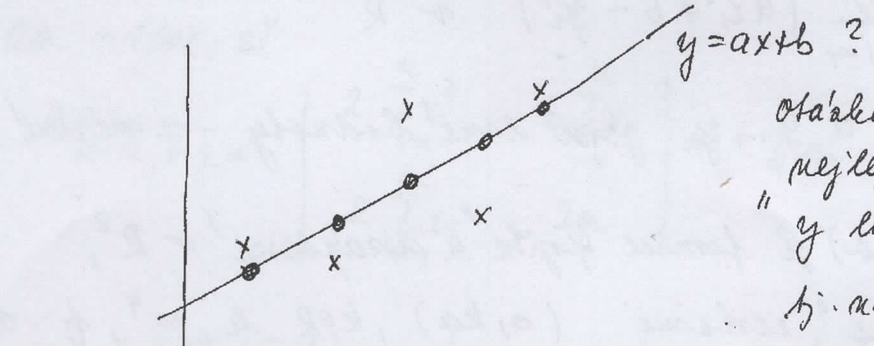
A minimální povrch (bez víka) je (ale raději „přepočítejte"):

$$S_{min} = 3\sqrt[3]{4V^2}.$$

2. <u>Metoda „nejmenších čtverců"</u>

měří se opakovaně veličina $y = y(x)$, o které předpokládáme, že $y(x) = ax + b$ (tj. že „y "závisí lineárně" na x") –

– máme pro $x_1, \ldots, x_n$, $x_i \neq x_j$, naměřené hodnoty y pro x_i označme y_i – graficky (na začátku „přednášky")



Otázka byla, jak najít „nejlepší aproximaci veličiny y lineárně závislou", tj. najít koeficienty a, b v lineární funkci $y = ax + b$ tak, aby naměřené hodnoty a „vypočítané" hodnoty byly „co nejblíže"

Metoda „nejmenších čtverců" (zde kvadrátů) spočívá v tom, že hledáme takovou lineární funkci $y = ax+b$, aby pro naměřené hodnoty y_i (odpovídající „volbě" x_i) a vypočítané hodnoty $y_i^* = ax_i + b_i$ (vypočítané hodnoty značíme y_i^*) platilo, že

$$\sum_{i=1}^{n} (y_i - y_i^*)^2 \quad (*)$$

je minimální (součet kvadrátů rozdílu naměřených hodnot a vypočítaných pro $x = x_i$).

Kdybychom n-tici naměřenou $(y_1, .., y_n) = Y \in R^n$ a n-ti vypočítanou $(y_1^*, .., y_n^*) = Y^*$ brali jako body z R^n, pak výraz v $(*)$ je $d_n^2(Y, Y^*)$ (tj. kvadrát vzdálenosti (Euklidovské) bodů Y, Y^*), tj. hledáme a, b v lineární funkci tak, aby „body naměřené" a „vypočítané" byly sobě nejblíže – v R^n s Euklidovskou vzdáleností.

<u>Tedy: formulace úlohy</u> – hledáme globální minimum funkce

$$f(a,b) = \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i)^2 \quad v \ R^2$$

($x_1, .., x_n$ a $y_1, .., y_n$ jsou dané hodnoty – z měření)

„Situace": $f(a,b)$ je funkce spojitá a nezáporná v R^2, a když „pojedeme" cestami (a, ka), $k \in R$ k „∞", tj. $a \to \infty$, pak

$$\lim_{a\to\infty} f(a,ka) = \lim_{a\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (a(x_i+k) - y_i)^2 = +\infty$$

$\Rightarrow$ intuice říká (odpovídá našim znalostem), že (asi) taková funkce $f(a,b)$ globální minimum má

A kde? Hledáme stacionární body funkce $f(a,b)$, tj. body, kde $\nabla f(a,b) = (0,0)$, tedy máme řešit soustavu rovnic

$$\left(\frac{\partial f}{\partial a}(a,b) = \right) \quad 2\sum_{i=1}^{n}(ax_i + b - y_i)x_i = 0$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial b}(a,b) = \right) \quad 2\sum_{i=1}^{n}(ax_i + b - y_i) = 0$$

a po úpravě dostaneme soustavu rovnic (lineárních) pro a, b:

$$(**)\quad \begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ a\sum x_i + nb = \sum y_i \end{cases}$$

Determinant soustavy je $D = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & n \end{vmatrix} = n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2$,

a dá se ukázat, že $D \neq 0$ (dokonce je $D > 0$), tedy soustava $(**)$ má právě jedno řešení $(\bar{a}, \bar{b})$, je-li $x_i \neq x_j$, $i \neq j$, $i,j = 1,2,\dots,n$.

A ptáme-li se, zda je zde lokální minimum, a tedy are jisté (dle úvahy dříve) i globální – vyšetříme Hessián v $(\bar{a}, \bar{b})$:

Ale vidíme, že

$$H(\bar{a},\bar{b}) = \begin{vmatrix} 2\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \,, & 2\sum_{i=1}^{n} x_i \\ 2\sum_{i=1}^{n} x_i \,, & 2n \end{vmatrix} = 4D > 0 \,, \text{ také } \left(\frac{\partial^2 f}{\partial a^2} > 0\right)$$

v bodě $(\bar{a}, \bar{b})$ má f ostré lokální (a tedy i globální) minimum.

(„řešení" $\bar{a}, \bar{b}$ si můžete spočítat)

A na závěr ten „obávaný" přednášky:

Pro zájemce (opět nepovinný) důkaz toho, že $D > 0$, platí-li $x_i \neq x_j$ pro $i \neq j$, $j, i = 1, 2, \ldots n$.

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum_{j=1}^{n} x_j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j \underset{\text{pro } x_i \neq x_j}{<} \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(x_i^2 + x_j^2) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i^2 + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} x_j^2\right) = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} n x_i^2 + \sum_{j=1}^{n} n x_j^2\right) =$$

$$= n \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \text{, tedy (shrnuto):}$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 < n \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \Rightarrow \underline{D = n \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 > 0}$$