Příklad 12.4. Určete partikulární řešení rovnice s danou počáteční podmínkou. V některých případech proveďte zkoušku.

a) $y' = \dfrac{y-2}{x+1},\ y(3) = 0$

b) $y' = y^2 + 1,\ y(\pi) = 1$

c) $y' = -\dfrac{x}{y},\ y(1) = -3$

d) $y' = \dfrac{y^2-1}{x},\ y(-4) = -1$

e) $y' = \dfrac{y^3}{x^2},\ y(1) = -1$

f) $y' = \dfrac{y^2+1}{2xy},\ y(-2) = 1$

g) $y' = 3^{x+y},\ y(1) = -1$

h) $y' = \operatorname{cotg} x (y-1)^2,\ y(\frac{\pi}{2}) = \frac{3}{2}$

Řešení 12.4.

a) $\mathcal{O} = (-1,\infty) \times (-\infty, 2),\ y = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}x,\ x \in (-1,\infty)$ *odstranění abs. hodnot, rovnice též lineár.*

b) $\mathcal{O} = \mathbb{R}^2,\ y = \operatorname{tg}\left(x - \frac{3\pi}{4}\right),\ x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$ *pozor na def. obor*

c) $\mathcal{O} = \mathbb{R} \times (-\infty, 0),\ y = -\sqrt{10 - x^2},\ x \in (-\sqrt{10}, \sqrt{10})$ *krajní body def. oboru!*

d) $y = 1, x \in (-\infty, 0)$ *stacionární řešení*

e) $\mathcal{O} = (0,\infty) \times (-\infty, 0),\ y = -\sqrt{\dfrac{x}{2-x}},\ x \in (0,2)$ *odstranění abs. hodnoty*

f) $\mathcal{O} = (-\infty, 0) \times (0, \infty),\ y = \sqrt{-x-1},\ x \in (-\infty, -1)$

g) $\mathcal{O} = \mathbb{R}^2,\ y = -\log_3(6 - 3^x),\ x \in (-\infty, 1 + \log_3 2)$

h) $\mathcal{O} = (0,\pi) \times (1,\infty),\ y = 1 + \dfrac{1}{2 - \ln(\sin x)},\ x \in (0,\pi)$

Příklad 12.5. Určete obecné řešení rovnice

a) $y' = y^2$

b) $y' = \dfrac{\mathrm{e}^y}{\sqrt{x}}$

c) $y' = y \cos x$

d) $y' = \dfrac{2y \ln y}{x}$

Řešení 12.5.

a) $y = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{R} \\ \frac{1}{C-x}, & x \in (-\infty, C),\ C \in \mathbb{R} \\ \frac{1}{C-x}, & x \in (C, \infty),\ C \in \mathbb{R} \end{cases}$

b) $y = -\ln\left(C - 2\sqrt{x}\right), C > 0, x \in \left(0, \frac{C^2}{4}\right)$

c) $y = C\mathrm{e}^{\sin x}, x \in \mathbb{R}, C \in \mathbb{R}$

homogenní lineární

d) $y = \begin{cases} \mathrm{e}^{Cx^2}, & x \in (-\infty, 0),\ C \in \mathbb{R} \\ \mathrm{e}^{Cx^2}, & x \in (0, \infty),\ C \in \mathbb{R} \end{cases}$

Příklad 13.1. Nalezněte obecné řešení homogenní rovnice.

a) $y'' + y' - 2y = 0$

b) $y'' - 6y' + 9y = 0$

c) $y'' - 2y' + 2y = 0$

d) $y'' - 4y = 0$

e) $y'' + 4y = 0$

f) $y'' + 4y' = 0$

g) $y'' - 4y' + 4y = 0$

h) $y'' - 6y' + 13y = 0$

Řešení 13.1.

a) $y(x) = C_1 \mathrm{e}^{x} + C_2 \mathrm{e}^{-2x}$, $x \in \mathbb{R}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

b) $y(x) = C_1 \mathrm{e}^{3x} + C_2 x \mathrm{e}^{3x}$, $x \in \mathbb{R}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

c) $y(x) = C_1 \mathrm{e}^{x} \cos x + C_2 \mathrm{e}^{x} \sin x$, $x \in \mathbb{R}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

d) $y(x) = C_1 \mathrm{e}^{2x} + C_2 \mathrm{e}^{-2x}$, $x \in \mathbb{R}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

e) $y(x) = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$, $x \in \mathbb{R}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

f) $y(x) = C_1 + C_2 \mathrm{e}^{-4x}$, $x \in \mathbb{R}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

g) $y(x) = C_1 \mathrm{e}^{2x} + C_2 x \mathrm{e}^{2x}$, $x \in \mathbb{R}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

h) $y(x) = C_1 \mathrm{e}^{3x} \cos 2x + C_2 \mathrm{e}^{3x} \sin 2x$, $x \in \mathbb{R}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

Příklad 13.2. Nalezněte řešení homogenní rovnice vyhovující daným počátečním podmínkám.

a) $y'' + 4y' + 3y = 0, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 3$

b) $y'' - 4y' + 4y = 0, \quad y(1) = 0,\ y'(1) = \mathrm{e}^2$

c) $y'' + 2y = 0, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 0$

d) $2y' + 3y = 0, \quad y(0) = 4$

Řešení 13.2.

a) $y(x) = -2\mathrm{e}^{-3x} + 3\mathrm{e}^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$

b) $y(x) = -\mathrm{e}^{2x} + x\mathrm{e}^{2x}$, $x \in \mathbb{R}$

c) $y(x) = \cos(\sqrt{2}x)$, $x \in \mathbb{R}$

d) $y(x) = 4\mathrm{e}^{-\frac{3x}{2}}$, $x \in \mathbb{R}$

Příklad 13.3. Nalezněte řešení homogenní rovnice $y'' + 4y = 0$ vyhovující daným okrajovým podmínkám.

a) $y(0) = 1,\ y(\frac{\pi}{4}) = 1$

b) $y(0) = 1,\ y(\frac{\pi}{2}) = 3$

c) $y(0) = 1,\ y(\frac{\pi}{2}) = -1$

d) $y(0) = 0,\ y(\frac{\pi}{4}) = 3$

Řešení 13.3.

a) $y(x) = \cos 2x + \sin 2x$, $x \in \mathbb{R}$

b) nemá řešení

c) $y(x) = \cos 2x + C \sin 2x$, $x \in \mathbb{R}$, $C \in \mathbb{R}$

d) $y(x) = 3 \sin 2x$, $x \in \mathbb{R}$

Příklad 13.4. Nalezněte obecné řešení homogenní rovnice vyššího řádu.

(Nepovinné, v písemkách nebude. Lze ale jednoduše vyřešit, umíme-li určit kořeny charakteristické rovnice.)

a) $y''' - y'' - 2y' = 0$

b) $y^{(iv)} - 2y'' + y = 0$

c) $y^{(iv)} - y = 0$

d) $y''' - 6y'' + 9y' = 0$

Řešení 13.4.

a) $y(x) = C_1 + C_2\mathrm{e}^{-x} + C_3\mathrm{e}^{2x}$, $x \in \mathbb{R}$, $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$

b) $y(x) = C_1\mathrm{e}^{x} + C_2x\mathrm{e}^{x} + C_3\mathrm{e}^{-x} + C_4x\mathrm{e}^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$, $C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}$

c) $y(x) = C_1\mathrm{e}^{x} + C_2\mathrm{e}^{-x} + C_3\cos x + C_4\sin x$, $x \in \mathbb{R}$, $C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}$

d) $y(x) = C_1 + C_2\mathrm{e}^{3x} + C_3x\mathrm{e}^{3x}$, $x \in \mathbb{R}$, $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$

Příklad 13.5. Určete koeficienty k_0, k_1, k_2, aby funkce y_1 a y_2 byly řešeními diferenciální rovnice

$$k_0y'' + k_1y' + k_2y = 0$$

a) $y_1(x) = \mathrm{e}^{x}$, $y_2(x) = \mathrm{e}^{5x}$, $x \in \mathbb{R}$

b) $y_1(x) = \mathrm{e}^{-4x}$, $y_2(x) = x\mathrm{e}^{-4x}$, $x \in \mathbb{R}$

c) $y_1(x) = \mathrm{e}^{-2x}\cos 2x$, $y_2(x) = \mathrm{e}^{-2x}\sin 2x$, $x \in \mathbb{R}$

Řešení 13.5.

a) například $y'' - 6y' + 5y = 0$

b) například $y'' + 8y' + 16y = 0$

c) například $y'' + 4y' + 8y = 0$