1. Nalezněte řešení Cauchyovy úlohy

$$4y^2 u_{xx} + 2(1-y^2)u_{xy} - u_{yy} - \frac{2y}{1+y^2}(2u_x - u_y) = 0 \text{ v } \mathbb{R}$$

$$u(x,0) = f(x), \quad u_y(x,0) = g(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

kde $f \in C^2(\mathbb{R})$ a $g \in C^1(\mathbb{R})$ jsou dané funkce.

2. Vyřešte Fourierovou metodou úlohu

$$u_t - a^2 u_{xx} = 0 \quad \text{v } (0,\ell) \times \mathbb{R}^+,$$

$$u_x(0,t) = u_x(\ell,t) = 0 \quad \text{pro } t > 0,$$

$$u(x,0) = x \quad \text{pro } x \in (0,\ell).$$

3. Uvažujte schéma

$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\tau} + a\,\frac{U_{j+1}^n - U_{j-1}^n}{2h} - \frac{a^2\tau}{2}\,\frac{U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n}{h^2} = 0$$

pro řešení rovnice $u_t + a u_x = 0$ ($a = \text{const.}$).

Vyšetřete chybu diskretizace, stabilitu a splnění CFL podmínky.

4. Uvažujte schéma

$$\frac{U_j^{n+1} - \frac{1}{2}(U_{j+1}^n + U_{j-1}^n)}{\tau} + a\,\frac{U_{j+1}^n - U_{j-1}^n}{2h} = 0$$

pro řešení rovnice $u_t + a u_x = 0$.

Vypočítejte fázovou chybu a zjistěte, kdy je splněn princip maxima.