

Písemná práce z NSTP022

Varianta A

19.5.2011

1. Necht X_1, \dots, X_n je náhodný výběr z log-normálního rozdělení (tj. veličiny $\log(X_i)$ mají normální rozdělení $\mathcal{N}(\mu, 1)$) s hustotou

$$f(x; \mu) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \exp\left\{-\frac{(\log x - \mu)^2}{2}\right\}, & x > 0, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

- (a) Nalezněte odhad parametru μ metodou maximální věrohodnosti.
(b) Rozhodněte, zda je tento odhad nestranný.
(c) Rozhodněte, zda je tento odhad konzistentní.

[8 bodů]

2. Firma provedla test znalostí angličtiny u svých sedmi zaměstnanců. Poté jim zaplatila jazykový kurs a po něm opět otestovala jejich znalosti. Počty bodů získané jednotlivými zaměstnanci před a po kursu zachycuje následující tabulka. Zajímá nás, jestli absolvování kursu přispělo k významnému zlepšení znalostí zaměstnanců.

Zaměstnanec	1	2	3	4	5	6	7
Před kursem	175	133	143	133	132	105	101
Po kursu	172	133	147	135	134	113	109

- (a) Najděte vhodný model pro tuto situaci, zformulujte hypotézu a alternativu.
(Předpokládejte normalitu)
(b) Testujte uvažovanou hypotézu na hladině významnosti $\alpha = 0,05$.

[7 bodů]

Pro úspěšné napsání této zápočtové práce je nutné získat alespoň 10 bodů z celkových 15 bodů.

První zápočtová písemka – 3. 4. 2012 – varianta A

1. (6 bodů) Ke každé otázce na testu je uvedeno 5 možných odpovědí, z nichž je vždy právě jedna správná. Student zná správnou odpověď na 10 % otázek. Dále u 50 % otázek si student myslí, že zná správnou odpověď, ale jeho odpověď je správná pouze s pravděpodobností 0,8. Zbytek otázek bude student náhodně tipovat.

 - (a) Jaká je pravděpodobnost, že student zodpoví správně náhodně vybranou otázku?
 - (b) Jestliže je odpověď na danou otázku špatná, s jakou pravděpodobností odpověď student tipoval?
2. (9 bodů) Necht' X a Y jsou nezávislé náhodné veličiny s rovnoměrným rozdělením na $(0, 1)$. Označte $U = XY$ a $V = \frac{X}{Y}$.

 - (a) Spočtete $P(X > 2Y)$.
 - (b) Spočtete $E[UV]$.
 - (c) Spočtete $E \sin(X)$.
 - (d) Spočtete $P(U < V)$.

Pro úspěšné napsání písemky je zapotřebí získat 10 bodů.

Třetí zápočtová písemka – 22. 5. 2012 – varianta A

1. (9 bodů) Necht' X_1, \dots, X_n je náhodný výběr z absolutně spojitého rozdělení s hustotou f , kde

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{\pi}b} \exp\left\{-\frac{x^2}{b}\right\}, & x > 0, \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases}$$

a $b > 0$ je neznámý parametr.

- (a) Vyšetřete, zda je odhad $\tilde{b}_n = \frac{\sqrt{\pi}}{n} \sum_{i=1}^n X_i^3$ nestranným a konzistentním odhadem parametrické funkce $b^{3/2}$.
- (b) Odhadněte parametr b metodou maximální věrohodnosti.

Může se hodit, že pro gamma funkci $\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1} e^{-x} dx$ platí,
 $\Gamma(n) = (n-1)!$, pro $n \in \mathbb{N}$, $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$, $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

2. (6 bodů) Agentura se rozhodla porovnávat členy politické strany Veřejného pokroku a strany Demokratického pokroku. Z každé strany náhodně vybrala 25 členů. Pro členy strany Veřejného pokroku byl výběrový průměr 48 let a výběrový rozptyl 34 (let²). Pro členy strany Demokratického pokroku byl výběrový průměr 55 let a výběrový rozptyl 38 (let²). Dá se na hladině spolehlivosti 1 procento tvrdit, že průměrný věk členů jednotlivých stran je stejný? Nezapomeňte sestavit matematický model pro daná data a zformulovat všechny předpoklady.

Pro úspěšné napsání písemky je zapotřebí získat alespoň 10 bodů.

Písemná práce z NSTP022 - Varianta A (21.5.2012)

1. Necht' X_1, \dots, X_n je náhodný výběr z binomického rozdělení s parametry $m \in \mathbb{N}$ a $p \in (0, 1)$, tj.

$$P(X_i = k) = \binom{m}{k} p^k (1-p)^{m-k}, \quad k = 0, \dots, m,$$

kde parametr $m > 1$ považujeme za **známý**.

- (a) Odvoďte odhad parametru p metodou maximální věrohodnosti.
(b) Uvažujte odhad T_n parametrické funkce p^2 ve tvaru

$$T_n = \frac{1}{(m - m^2)n} \sum_{i=1}^n X_i - \frac{1}{(m - m^2)n} \sum_{i=1}^n X_i^2.$$

Je T_n **nestranný** a **konzistentní** odhad parametrické funkce p^2 ?

[9 bodů]

2. Po několika porážkách ve hře „Člověče, nezlob se“ jsme se rozhodli prozkoumat soupeřovu kostku. Z 250 hodů nám padlo 61 šestek. Můžeme na hladině 0,01 prohlásit, že kostka není pravidelná? *Nezapomeňte sestavit vhodný model, zformulovat hypotézu a alternativu a ověřit předpoklady.*

[6 bodů]

Pro úspěšné napsání této zápočtové práce je nutné získat **alespoň 10 bodů** z celkových 15 bodů.

Druhá zápočtová písemka – 24. 4. 2012 – varianta A

1. (8 bodů) Nechť $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost nezávislých náhodných veličin takových, že

$$P(X_n = 1) = P(X_n = -1) = \frac{1}{2\sqrt{n}}, \quad P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

- (a) Určete EX_n a $\text{Var}(X_n)$.
- (b) Ověřte, že posloupnost $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ splňuje centrální limitní větu. Co nejvíce explicitně zformulujte, co nám v tomto případě centrální limitní věta dává.
- (c) Určete pravděpodobnost toho, že pro nekonečně mnoho $n \in \mathbb{N}$ nastane jev $[X_n > 0]$.
2. (7 bodů) Ambulantní lékař zakoupil do své ordinace diagnostický přístroj v ceně 190 000 Kč a účtuje za jedno vyšetření na tomto přístroji 200 Kč. Počet pacientů vyšetřených přístrojem za jeden den je roven n ($n = 1, \dots, 4$) s pravděpodobností $1/4$. Předpokládejme, že počty pacientů vyšetřených přístrojem v jednotlivých dnech jsou vzájemně nezávislé.
- (a) Jaká je střední hodnota a rozptyl množství peněz vybraného na poplatcích za 200 pracovních dní?
- (b) S jakou pravděpodobností lékař během roku a půl (400 pracovních dní) vybere na poplatcích za vyšetření alespoň cenu přístroje?

Pro úspěšné napsání písemky je zapotřebí získat alespoň 10 bodů.

1. (6 bodů) Automatická tiskařská řezačka odstrihává z role papíru přibližně 30 cm kusy (beze zbytku a nezávislé na sobě). Přesná délka jednoho odstriženého kusu (v centimetrech) je náhodná veličina X , kde $X = 30 + \Theta$ a $\Theta \sim Unif(-2, 2)$ (v centimetrech).
- (a) Když odstrihneme 665 kusů papíru, jaká bude dohromady jejich celková střední očekávaná délka a rozptyl?
- (b) Jaká je pravděpodobnost, že z 200 metrové role papíru dokážeme odstrihnout alespoň 665 kusů papíru? (řešte pomocí CLV)
2. (9 bodů) Necht' $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost nezávislých náhodných veličin s hustotou

$$g_n(z) = \begin{cases} n e^{-nz}, & z \geq 0, \\ 0, & z < 0. \end{cases}$$

- (a) Určete EZ_n a $\text{Var}(Z_n)$.
- (b) Dokážte, že posloupnosti $\frac{1}{n}Z_n$ a Z_n konvergují k nule v pravděpodobnosti.
- (c) Ověřte, že posloupnost $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$ splňuje silný zákon velkých čísel. Co nejvíce explicitně zformulujte, co nám v tomto případě silný zákon velkých čísel dává.
- (d) Spočítejte pravděpodobnost, že pro nekonečně mnoho $n \in \mathbb{N}$ nastane jen $A_n = [Z_1 < \frac{1}{n}]$.

1. (8 bodů) Necht' $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost nezávislých náhodných veličin s hustotou

$$f_n(x) = \begin{cases} \sqrt{n}, & x \in (0, \frac{1}{\sqrt{n}}), \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

- (a) Určete EX_n a $\text{Var}(X_n)$.
- (b) Ověřte, že posloupnost $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ splňuje silný zákon velkých čísel. Co nejvíce explicitně zformulujte, co nám v tomto případě silný zákon velkých čísel dává.
- (c) Spočítejte pravděpodobnost, že pro nekonečně mnoho $n \in \mathbb{N}$ nastane jen $A_n = [X_n < \frac{1}{n}]$.
2. (7 bodů) Hasiči používají obecně tři různé délky hadice: 2-metrové, 4-metrové a 6-metrové. Hadice jsou stočené a tudíž není přímo možné zjistit jejich délku, proto předpokládáme, že hasiči používají hadice zcela náhodně (a nezávesle na sobě). Víme, že hasiči mají stejný počet kusů 2 a 6 metrových hadic a 4-metrových hadic je tolik, jako 2 a 6 metrových dohromady. Necht' náhodná veličina X značí délku použité hadice.

- (a) Jaká je očekávaná střední hodnota a rozptyl celkové délky soustavy hadic, jestliže hasiči zapojí dohromady 40 kusů.
- (b) Kolik kusů hadic je potřebné vzít na zásah, aby měli hasiči alespoň 98% šanci, že dokážou zapojit systém o délce alespoň 250 metrů? (řešte pomocí CLV)