20 Pravděpodobnost a statistika

20.1 Definice pravděpodobnosti, vlastnosti pravděpodobnosti, binomické rozdělení

1 Jaká je pravděpodobnost, že při hodu mincí padne
a) rub, b) líc?

2 Jaká je pravděpodobnost, že při hodu hrací kostkou padne
a) šestka, c) číslo větší než jedna,
b) sudé číslo, d) číslo deset?

3 Hodíme dvěma kostkami, červenou a modrou. Jaká je pravděpodobnost, že
a) na obou kostkách padne šestka,
b) na obou kostkách padne liché číslo,
c) alespoň na jedné kostce padne liché číslo,
d) bude součet bodů na kostkách 5,
e) bude součet bodů na kostkách menší než 5?

4 Hodíme dvakrát hrací kostkou. Jaká je pravděpodobnost, že
a) padne alespoň jednou liché číslo, c) padne součet osm,
b) padne dvojice sudých čísel, d) padne součet větší než deset?

5 Hodíme dvakrát hrací kostkou. Jaká je pravděpodobnost, že
a) padne právě jednou šestka, c) padne nejvýše jednou šestka,
b) padne alespoň jednou šestka, d) nepadne ani jednou šestka?

6 Hodíme třikrát hrací kostkou. Jaká je pravděpodobnost, že
a) padne právě jednou šestka, c) padne nejvýše jednou šestka,
b) nepadne ani jednou šestka, d) padne alespoň jednou šestka?

7 Hodíme třemi kostkami. Hráč A vyhraje, padne-li součet bodů 10, hráč B vyhraje, padne-li součet bodů 11. Padne-li jiný součet, nevyhraje nikdo, hráči házejí znova. Který z hráčů má větší pravděpodobnost výhry?

8 Hodíme třikrát kostkou. Vypočítejte pravděpodobnost, že při prvním hodu padne sudé číslo, při druhém hodu padne liché číslo a při třetím hodu padne šestka?

9 Hodíme třikrát kostkou. Vypočítejte pravděpodobnost, že při prvním, nebo při druhém, nebo třetím hodu padne sudé číslo.

10 Jaká je pravděpodobnost, že při hodu dvěma mincemi najednou padne
a) na obou rub, b) alespoň na jedné rub?

11 a) Jaká je pravděpodobnost, že při třech hodech jednou mincí padne alespoň dvakrát líc?
b) Jaká je pravděpodobnost, že při hodu třemi mincemi najednou padne alespoň na dvou mincích líc?

12 Hodíme jedenkrát čtyřmi mincemi najednou. S jakou pravděpodobností padne na dvou mincích rub a na dvou mincích líc?

13 Kolikrát musíme hodit hrací kostkou, aby alespoň jedna šestka padla s pravděpodobností větší než 0,5?

14 Kolikrát musíme hodit hrací kostkou, aby alespoň jedna šestka padla s pravděpodobností větší než 75 %?

15 Kolikrát musíme hodit dvěma kostkami, aby dvojice šestek padla s pravděpodobností větší než 80 %?

16 Kolikrát musíme hodit dvěma kostkami, aby součet dvanáct padl s pravděpodobností větší než 50 %?

17 Kolikrát musíme hodit mincí, aby pravděpodobnost, že padne alespoň jednou líc byla větší než 0,999?

18 Hodíme pětkrát kostkou. Jaká je pravděpodobnost, že šestka padne právě dvakrát?

19 Hodíme desetkrát kostkou. S jakou pravděpodobností mezi prvními pěti hody nepadne žádná šestka a mezi šestým až desátým hodem padnou právě tři šestky?

20 S jakou pravděpodobností padne při deseti hodech jednou kostkou alespoň třikrát šestka?

21 Rozhodněte, který z případů a), b) je pravděpodobnější.
a) Při dvaceti hodech kostkou padne šestka alespoň desetkrát.
b) Při dvaceti hodech kostkou padne šestka nejvýše desetkrát.

22 S jakou pravděpodobností při deseti hodech dvěma kostkami najednou padne alespoň třikrát dvojice šestek?

23 Co je pravděpodobnější? Hodit při čtyřech hodech kostkou právě jednu šestku, nebo hodit při osmi hodech dvěma kostkami právě jednou dvojici šestek?

24 Jaká je pravděpodobnost, že se Jana a Tomáš narodili ve stejný měsíc? (Počítejte, že měsíc je $\frac{1}{12}$ roku.)

25 Jaká je pravděpodobnost, že ze skupiny 5 studentů se alespoň dva studenti narodili ve stejný měsíc? (Počítejte, že měsíc je $\frac{1}{12}$ roku.)

26 Jaká je pravděpodobnost, že se Jana a Tomáš narodili ve stejný den? (Narodili se roku 1990.)

27 Ve skupině je 10 děvčat a 18 chlapců. Náhodně vybereme skupinu 3 studentů. S jakou pravděpodobností jsou ve vybrané skupině 2 děvčata a jeden chlapec?

28 Ve třídě je 30 žáků. Právě pět z nich nemá domácí úkol. Učitel náhodně kontroluje 6 žáků. Vypočítejte pravděpodobnost, že nejvýše dva žáci, které učitel kontroluje, nemají domácí úkol.

29 Dvanáct studentů, mezi kterými je Pavel a Tomáš, mají ze svého středu vylosovat čtyřčlennou skupinu. Jaká je pravděpodobnost, že ve skupině bude
a) Tomáš, c) Tomáš a Pavel,
b) Tomáš, ale Pavel ne, d) Tomáš nebo Pavel?

30 Šest studentek a osm studentů, mezi kterými jsou Jana a David, mají ze svého středu vylosovat čtyřčlennou skupinu. Jaká je pravděpodobnost, že mezi vylosovanými studenty bude
a) Jana a David, c) David,
b) Jana nebo David, d) Jana, ale David ne?

31 Střelec zasáhl cíl dvaadevadesátkrát ze 100 výstřelů.
a) Jaká je pravděpodobnost jednoho zásahu cíle?
b) S jakou pravděpodobností střelec cíl nezasáhne?
c) Jaká je pravděpodobnost, že při dvou pokusech zasáhl cíl právě dvakrát?
d) Jaká je pravděpodobnost, že při třech pokusech zasáhl cíl alespoň jedenkrát?

32 Střelec zasáhne cíl v průměru osmkrát z 10 ran.
a) S jakou pravděpodobností zasáhne cíl alespoň jedenkrát ze tří ran?
b) S jakou pravděpodobností zasáhne cíl alespoň dvakrát ze tří ran?
c) Kolikrát musí střelit, aby zasáhl cíl alespoň jednou s pravděpodobností, která je větší než 99 %?

33 Dva střelci střílejí nezávisle na sobě na cíl. První střelec zasáhne cíl s pravděpodobností 0,6, druhý s pravděpodobností 0,8. Každý vystřelí právě jednu ránu. Jaká je pravděpodobnost, že
a) žádný z nich nezasáhl cíl,
b) právě jeden zasáhl cíl,
c) oba dva zasáhli cíl?
d) Jaký výsledek dostaneme, sečteme-li pravděpodobnosti z úloh a) až c)?

34 V porotě jsou tři členové. Dva z nich rozhodují s pravděpodobností 0,95 správně, třetí rozhoduje tak, že si hodí mincí. Jaká je pravděpodobnost, že celá porota rozhodne správně (tj. rozhodnou správně alespoň dva porotci)?

35 Žárovka svítí se spolehlivostí 0,85 (tj. po určité době svítí jen 85 % žárovek). Jaká je spolehlivost systému (alespoň část svítí), jsou-li zapojeny
a) dvě žárovky sériově,
b) dvě žárovky paralelně,
c) dvě žárovky sériově a třetí k nim paralelně?

36 Žárovka svítí se spolehlivostí 92 %. Jaká je spolehlivost zařízení, ve kterém jsou tři žárovky zapojeny sériově?

37 Pravděpodobnost úspěchu určité akce je 0,9. Jaká bude pravděpodobnost, že při dvojím (při trojím) opakování akce bude alespoň jedenkrát dosaženo úspěchu?

38 Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybrané trojciferné číslo je
a) sudé, b) dělitelné 5?

39 Náhodně vybereme čtyřciferné číslo. Jaká je pravděpodobnost, že se v jeho zápisu vyskytuje cifra 8
a) právě jednou, c) alespoň jednou,
b) právě dvakrát, d) na druhém místě?

40 a) S jakou pravděpodobností náhodně vybrané dvojciferné číslo není dělitelné 5 a není dělitelné 7?
b) S jakou pravděpodobností náhodně vybrané dvojciferné číslo není dělitelné 5 nebo není dělitelné 7?

41 Z čísel 1 až 50 vybereme náhodně jedno číslo. S jakou pravděpodobností je dělitelné
a) šesti, b) osmi, c) šesti a osmi, d) šesti nebo osmi?

42 S jakou pravděpodobností polopřímka vedená z bodu A má s kružnicí $k(S; 3\,\mathrm{cm})$ alespoň jeden společný bod? Řešte pro případy, že
a) $|AS| = 6\,\mathrm{cm}$, b) $|AS| = 3\,\mathrm{cm}$, c) $|AS| = 2\,\mathrm{cm}$.

43 S jakou pravděpodobností protíná přímka vedená počátkem soustavy souřadnic úsečku BC, kde $B[1; 2]$, $C[6; -3]$?

44 S jakou pravděpodobností polopřímka vedená z počátku soustavy souřadnic má s elipsou $(x-3)^2 + 0{,}375y^2 = 1$ alespoň jeden společný bod?

45 Krychli o hraně $a = 4\,\mathrm{cm}$ obarvíme modrou barvou a potom ji rozřežeme na malé krychličky o hraně $a_1 = 1\,\mathrm{cm}$. Malé krychličky zamícháme a náhodně vybereme jednu krychličku. Jaká je pravděpodobnost, že vybraná krychlička
a) má obarvenou právě jednu stěnu,
b) má obarvené právě dvě stěny,
c) má obarvené právě tři stěny,
d) má všechny stěny neobarvené?
e) Vypočítejte součet pravděpodobností z úloh a) až d).

46 Krychli o hraně $a = 4\,\mathrm{cm}$ obarvíme červenou barvou a potom ji rozřežeme na malé krychličky o hraně $a_1 = 1\,\mathrm{cm}$. Malé krychličky zamícháme a náhodně vybereme osm krychliček. Jaká je pravděpodobnost, že z vybraných krychliček lze sestavit novou krychli o hraně $a_2 = 2\,\mathrm{cm}$,
a) která bude celá červená,
b) která nebude obarvená,
c) která bude mít právě jednu stěnu červenou?

47 V osudí je 5 červených a 3 bílé koule. Z osudí v prvním tahu vytáhneme jednu kouli, při druhém tahu vytáhneme opět jednu kouli. S jakou pravděpodobností vytáhneme ve druhém tahu červenou kouli, jestliže po prvním tahu kouli
a) vracíme, b) nevracíme?

48 Máme dvě osudí. V prvním osudí jsou 3 modré a 5 černých koulí, ve druhém jsou 4 modré a 6 černých koulí. Z každého osudí vytáhneme jednu kouli. S jakou pravděpodobností budeme mít jednu modrou a jednu černou kouli?

49 Máme dvě osudí. V prvním osudí jsou 3 modré a 5 černých koulí, ve druhém jsou 4 modré a 6 černých koulí. Z prvního osudí vytáhneme jednu kouli a dáme ji do druhého osudí. S jakou pravděpodobností potom vytáhneme ze druhého osudí modrou kouli?

50 V osudí je 20 koulí, ze kterých je právě 5 žlutých. Vytáhneme najednou 2 koule. S jakou pravděpodobností
a) jsou obě vytažené koule žluté,
b) je mezi vytaženými koulemi právě jedna žlutá,
c) mezi vytaženými koulemi není žádná žlutá?
d) Vypočítejte součet pravděpodobností z úloh a) až c).

51 V osudí je 10 koulí, ze kterých jsou právě 3 zelené. Vytáhneme najednou tři koule. S jakou pravděpodobností
a) je mezi vytaženými koulemi alespoň jedna zelená,
b) jsou mezi vytaženými koulemi alespoň dvě zelené?

52 V osudí je 8 červených a 6 bílých koulí.

a) Vytáhneme postupně tři koule. Po každém tahu kouli vracíme. Jaká je pravděpodobnost, že postupně vytáhneme kouli červenou, bílou, červenou?

b) Vytáhneme postupně tři koule. Po každém tahu kouli nevracíme. Jaká je pravděpodobnost, že postupně vytáhneme kouli červenou, bílou, červenou?

c) Vytáhneme tři koule najednou. S jakou pravděpodobností jsou ve vytažené trojici koulí dvě červené a jedna bílá koule?

53 V osudí jsou v dostatečném množství stejným počtem zastoupeny koule bílé a červené. Náhodně vytáhneme 2 koule najednou. Bez ohledu na počet koulí v osudí dokažte, že pravděpodobnost, že vybrané koule jsou

a) obě červené, je vždy menší než 25 %,

b) různé barvy, je vždy větší než 50 %.

54 V bedně je 40 výrobků, z nichž právě 6 je vadných. Náhodně vybereme 5 výrobků. S jakou pravděpodobností

a) budou mezi 5 vybranými výrobky právě tři vadné,

b) budou mezi 5 vybranými výrobky alespoň dva vadné,

c) bude mezi 5 vybranými výrobky nejvýše jeden vadný?

55 V loterii vyhrává 4. cenu ten, jehož výrobní číslo losu končí stejným dvojčíslím, jako je dvojčíslí, které bylo vylosováno. S jakou pravděpodobností vyhrajeme alespoň jednu 4. cenu, koupíme-li si

a) jeden los, b) pět losů?

56 Koupíme si po jednom losu ve dvou tombolách. V první tombole vyhrává každý desátý, ve druhé tombole vyhrává každý padesátý los. Jaká je pravděpodobnost, že

a) vyhrajeme na oba losy,

b) vyhrajeme alespoň na jeden los,

c) nevyhrajeme na žádný los?

57 V tombole je 30 cen (vyhrává 30 losů). Bylo prodáno 500 losů. Pan Novák si koupil 3 losy. Jaká je pravděpodobnost, že

a) na všechny tři losy vyhraje,

b) vyhraje alespoň jednu cenu?

58 Loterie má 10 000 losů, z nichž právě 20 vyhrává. S jakou pravděpodobností alespoň něco vyhrajeme, koupíme-li si 4 losy?

59 Stroj vyrobí jednu součástku za dvě minuty. Pravděpodobnost, že součástka je vadná, je 0,05. Jaká je pravděpodobnost, že za směnu (8 hodin) vyrobí stroj právě 10 vadných součástek?

60 Dlouhodobým pozorováním bylo zjištěno, že pravděpodobnost narození chlapce je 0,485, pravděpodobnost narození děvčete je 0,515. Jaká je pravděpodobnost, že rodina, která má tři děti, má

a) právě tři děvčata,

b) dva chlapce a jedno děvče,

c) alespoň jednoho chlapce,

d) alespoň jednu dívku?

61 Student dostal test, který obsahuje 10 otázek. Ke každé otázce vybírá ze tří možností právě jednu odpověď. Jaká je pravděpodobnost, že student zodpoví právě polovinu otázek správně, volí-li odpovědi zcela náhodně?

62 Student dostal test, který obsahuje 10 otázek. Ke každé otázce vybírá právě jednu odpověď z možností a, b, c, d. Jaká je pravděpodobnost, že student zodpoví alespoň 70 % otázek správně, volí-li odpovědi zcela náhodně?

63 Lék úspěšně léčí 90 % případů onemocnění. Vypočítejte pravděpodobnost, že se vyléčí alespoň 18 pacientů z 20, kterým je lék podán.

64 Klíčivost semen určitého druhu mrkve je 96 %. Jaká je pravděpodobnost, že vyklíčí alespoň 25 semen ze 30 semen, které jsme zasadili?

65 V obchodě zjistili, že pravděpodobnost dodávky s vadnými výrobky je 0,08. Určete pravděpodobnost, že mezi 20 dodávkami budou

a) právě dvě dodávky obsahovat vadné výrobky,

b) nejvýše dvě dodávky obsahovat vadné výrobky.

Statistika

20.2 Aritmetický průměr, modus, medián, směrodatná odchylka, variační koeficient

66 Ve třídě 1. A je 15 chlapců. Údaje o výšce chlapců udává následující tabulka:

Výška (cm)	160–164	165–169	170–174	175–179	180–184
Počet žáků	2	5	4	3	1

Vypočítejte průměrnou výšku žáka, určete modus, medián.

67 Pan Dvořák jel automobilem prvních 20 km rychlostí $80\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$, dalších 30 km rychlostí $90\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$. Vypočítejte průměrnou rychlost jeho jízdy.

68 V testu při zkoušce dostalo 15 studentů známku 1, dalších 35 studentů dostalo známku 2, známku 3 dostalo 30 studentů, 15 studentů dostalo známku 4 a zbylých 5 studentů dostalo známku 5. Vypočítejte průměrnou známku z testu, modus, medián. Výsledky testu znázorněte graficky.

69 Při kontrole hmotnosti sušenek bylo zkontrolováno 10 krabic se sušenkami a zjistili se následující hodnoty: 250 g, 247 g, 251 g, 249 g, 252 g, 248 g, 251 g, 250 g, 251 g, 248 g. Vypočítejte průměrnou hmotnost krabice sušenek, směrodatnou odchylku a variační koeficient.

70 Průměrný měsíční příjem byl zjištěn náhodně u 20 osob. Výsledky zachycuje následující tabulka:

Příjem (Kč)	0–2 000	2 001–4 000	4 001–6 000	6 001–8 000
Četnost	0	3	6	4

Příjem (Kč)	8 001–10 000	10 001–12 000	12 001–14 000	18 001–20 000
Četnost	3	1	2	1

Vypočítejte průměrný příjem, modus, medián a směrodatnou odchylku.

19.17 Objem rotačního tělesa

128 a) $\frac{8}{3}\pi$; b) $\frac{7}{3}\pi$; c) $\frac{7}{3}\pi$; d) $\frac{32}{5}\pi$; e) $\frac{412}{15}\pi$; f) $\frac{16}{15}\pi$; g) 18π; h) 2π; i) π; j) $\frac{9}{5}\pi$; k) $\frac{1}{2}\pi^2$; l) $\frac{9}{2}\pi^2$. **129** a) $\frac{32}{3}\pi$; b) $\frac{4}{3}\pi$; c) $\frac{8}{3}\pi$; d) $\frac{16}{3}\pi$. **130** a) $\frac{5}{3}\pi$; b) $\frac{41}{24}\pi$; c) $\frac{472}{3}\pi$; d) $\frac{43}{30}\pi$; e) 2π; f) 8π; g) $\frac{4}{3}\pi$; h) $\frac{28}{3}\pi$. **131** $\frac{4}{3}\pi r^3$. **132** $\pi r^2 v$.

133 $\frac{1}{3}\pi r^2 v$. **134** $\frac{1}{3}\pi v(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)$. **135** a) $\frac{4}{3}\pi b^2 a$; b) $\frac{4}{3}\pi a^2 b$. **136** a) $\frac{384}{5}\pi$; b) 12π. **137** $k = \pm 3$. **138** $p = \frac{5}{2\pi}$. **139** $p = \frac{3}{2}$. **140** $(\frac{16}{3} - \frac{8}{3}\sqrt{2})\pi$.

20 Pravděpodobnost a statistika

20.1 Definice pravděpodobnosti, vlastnosti pravděpodobnosti, binomické rozdělení

1 a) $\frac{1}{2}$; b) $\frac{1}{2}$. **2** a) $\frac{1}{6}$; b) $\frac{1}{2}$; c) $\frac{5}{6}$; d) 0. **3** a) $\frac{1}{36}$; b) $\frac{1}{4}$; c) $\frac{3}{4}$; d) $\frac{1}{9}$; e) $\frac{1}{6}$.

4 a) $\frac{3}{4}$; b) $\frac{1}{4}$; c) $\frac{5}{36}$; d) $\frac{1}{12}$. **5** a) $\frac{5}{18}$; b) $\frac{11}{36}$; c) $\frac{35}{36}$; d) $\frac{25}{36}$. **6** a) $\frac{25}{72}$; b) $\frac{125}{216}$; c) $\frac{25}{27}$; d) $\frac{91}{216}$. **7** Pravděpodobnost výhry obou hráčů je stejná $p = \frac{27}{216}$. **8** $\frac{1}{24}$.

9 $\frac{7}{8}$. **10** a) $\frac{1}{4}$; b) $\frac{3}{4}$. **11** a) $\frac{1}{2}$; b) $\frac{1}{2}$. **12** $\frac{3}{8}$. **13** Alespoň 4×. **14** Alespoň 8×.

15 Alespoň 58×. **16** Alespoň 25×. **17** Alespoň 10×. **18** 0,161. **19** 0,013.

20 0,225. **21** a) 0,0006; b) 0,9999. **22** 0,0022. **23** Pravděpodobnější je, že při 4 hodech padne právě jedna šestka (0,386 > 0,182). **24** 0,083. **25** 0,618. **26** 0,003.

27 0,247. **28** 0,959. **29** a) 0,333; b) 0,242; c) 0,091; d) 0,576. **30** a) 0,066; b) 0,505; c) 0,286; d) 0,220. **31** a) 0,920; b) 0,080; c) 0,846; d) 0,999.

32 a) 0,992; b) 0,896; c) alespoň 3×. **33** a) 0,08; b) 0,44; c) 0,48; d) 1. **34** 0,950.

35 a) 0,723; b) 0,978; c) 0,958. **36** 0,779. **37** 0,99 (0,999). **38** a) 0,5; b) 0,2.

39 a) 0,297; b) 0,051; c) 0,352; d) 0,100. **40** a) 0,678; b) 0,978. **41** a) 0,16; b) 0,12; c) 0,04; d) 0,24. **42** a) 0,167; b) 1; c) 1. **43** 0,5. **44** 0,167.

45 a) 0,375; b) 0,375; c) 0,125; d) 0,125; e) 1. **46** a) $2{,}259 \cdot 10^{-10}$; b) 1; c) 0,999 6.

47 a) 0,625; b) 0,625. **48** 0,475. **49** 0,398. **50** a) 0,052 6; b) 0,394 7; c) 0,552 6; d) 1.

51 a) 0,708; b) 0,183. **52** a) 0,140; b) 0,154; c) 0,462.

53 a) $\forall n \in \mathrm{N}$: $\binom{n}{2} : \binom{2n}{2} < \frac{1}{4}$; b) $\forall n \in \mathrm{N}$: $n^2 : \binom{2n}{2} > \frac{1}{2}$. **54** a) 0,017; b) 0,154; c) 0,846. **55** a) 0,010; b) 0,049. **56** a) 0,002; b) 0,118; c) 0,882.

57 a) 0,000 2; b) 0,170. **58** 0,008. **59** 0,106. **60** a) 0,137; b) 0,363; c) 0,863; d) 0,886. **61** 0,137. **62** 0,003 5. **63** 0,677. **64** 0,999. **65** a) 0,271; b) 0,788.

Statistika

20.2 Aritmetický průměr, modus, medián, směrodatná odchylka, variační koeficient

66 a) $\overline{v} = 170\frac{2}{3}$ cm, modus: 167 cm, medián: 172 cm. **67** $\overline{v} = 85{,}7\,\mathrm{km \cdot h^{-1}}$.

68 $\overline{x} = 2{,}6$, modus: 2, medián: 2,5. **69** $\overline{x} = 249{,}7$ g, $s_x = 1{,}55$ g, $v_x = 0{,}62\,\%$.

70 $\overline{x} \doteq 7\,500$ Kč, modus: 5 000 Kč, medián: 7 000 Kč, $s_x = 3\,900$ Kč.

Výsledky zkoušek z matematiky na některých VŠ

UNIVERZITA KARLOVA v Praze

Matematicko-fyzikální fakulta

Varianta A

1 $x \in (-4; -2) \cup (0; 2)$.

2 Pro k sudé je $s_n = \frac{1}{4}(k-62)(k+64)$; pro k liché je $s_n = \frac{1}{4}(k-63)(k+63)$.

3 $r_{1,2} = 15 \pm \frac{15}{2}\sqrt{2}$, $r_{3,4} = \frac{15}{2}\sqrt{2}$.

4 $\triangle ABC$ doplňte na rovnoběžník ABA_1C, bodem A_1 veďte rovnoběžku s CP, její průsečík s přímkou AB označte P_1. Potom $\triangle APQ \sim \triangle AP_1A_1$. Poměr podobnosti je $\frac{5}{2} \Rightarrow S_{\triangle APQ} : S_{\triangle ABC} = \frac{4}{15}$.

Varianta B

1

$p \in (-\infty; -1)$	$p = -1$	$p \in (-1; \infty) - \{0; 1\}$	$p = 1$
$x \in \emptyset$	$x = 0$	$x = \pm\frac{p+1}{2}$	$x \in \mathrm{R}$

2 4 168 332.

3 Úloha má 2 řešení. $p_1 = 6$, $T_1[2; -1]$; $p_2 = -2$, $T_2[-2; 7]$.

4 $V_{\text{kužel}} : V_{\text{koule}} = n$.

Varianta C

1 $x \in \{\frac{1}{10}; \sqrt{10}; 100\}$. **2** k neexistuje, $m = 9$.

3 $(x-10)^2 + (y-7{,}5)^2 = 12{,}5^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 20x - 15y = 0$.

4 $V_{\text{čtyřstěn}} : V_{\text{koule}} = \frac{2\sqrt{3}}{9\pi}$.

Varianta D

1 $x \in (-\infty; -2) \cup (0; 1) \cup (1; \infty)$. **2** $a_n = 4n - 3$, $s_n = n(2n-1)$.

3 Hledaný $S \in p \Rightarrow S[2y_S - 4; y_S]$. Pro r hledané kružnice platí: $r = y_S + 2 \wedge r = |SS_0| + 1$, kde $S_0[0; 1]$. Úloha má 2 řešení: $(x-4)^2 + (y-4)^2 = 36$, $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 9$.

4 $V_{\text{čtyřstěn}} = \frac{a^3\sqrt{2}}{24}$.

ČVUT v Praze

Fakulta architektury

1 $x \in (1; \frac{9}{5}) \cup (2; \infty)$. **2** Po úpravě dostaneme $35 - x^2 = (5-x)^3$. Vidíme, že jeden kořen rovnice bude číslo 6. Umocníme $\Rightarrow x^3 - 16x^2 + 75x - 90 = 0$. Mnohočlen na levé straně vydělíme závorkou $(x-6)$, potom $x^2 - 10x + 15 = 0$. Podmínku $x \in (-\sqrt{35}; 5) - \{4\}$ splňuje jen $x = 5 - \sqrt{10}$. **3** $x \in \bigcup_{k \in \mathrm{Z}} \{\pi + 2k\pi; \frac{2}{3}\pi + 2k\pi; \frac{4}{3}\pi + 2k\pi\}$.

4 Délka tětivy je $4\sqrt{2}$.

5 Stejnolehlost. Sestrojíme pomocnou polokružnici se středem na přímce p dotýkající se přímky q. Průsečíky polokružnice s přímkou AV, kde $V \in p \cap q$ označíme M_1, M_2. Bodem A vedeme rovnoběžky s AM_1, AM_2, jejich průsečíky s přímkou p jsou hledané body B. Úloha má 2 řešení.

Fakulta stavební

1 $x = 6$. **2** $x \in (0; \frac{3}{4}\pi) \cup (\pi; \frac{7}{4}\pi)$.

3 Úloha má dvě řešení: $k = 5$, potom $a_1 = -3 \wedge d = 2$; $k = 1$, potom $a_1 = 5 \wedge d = -6$.

4 $P_1[0; 0]$, $P_2[4; 0]$.