příklad: Ve sportce losujeme 6 čísel z 49, z nich je 6 výherních.
Zaveďte náhodnou veličinu X udávající počet správně uhodnutých čísel a určete její rozdělení.

$$P[X=0] = \frac{\binom{43}{6}}{\binom{49}{6}}$$

$$P[X=1] = \frac{\binom{43}{5}\cdot\binom{6}{1}}{\binom{49}{6}}$$

počet způsobů kolika lze vybrat 1 číslo z množiny výherních čísel a k němu 5 nevýherních čísel

počet způsobů, kolika lze vybrat 6 čísel z 49

$\vdots$

$$P[X=k] = \frac{\binom{43}{6-k}\cdot\binom{6}{k}}{\binom{49}{6}}, \quad k\in\{0,1,2,3,4,5,6\}$$

příklad: V urně je 10 koulí: 4 bílé a 6 černých, náhodně vybereme 3 koule.
Určete rozdělení náhodné veličiny X udávající počet bílých koulí v našem náhodném výběru.

$$P[X=0] = \frac{\binom{6}{3}}{\binom{10}{3}}$$

$$P[X=1] = \frac{\binom{6}{2}\cdot\binom{4}{1}}{\binom{10}{3}}$$

počet způsobů jak vybrat 1 bílou kouli a 2 černé

počet způsobů jak vybrat 3 koule z 10

$\vdots$

$$P[X=k] = \frac{\binom{6}{3-k}\cdot\binom{4}{k}}{\binom{10}{3}}, \quad k\in\{0,1,2,3\}$$

Hypergeometrické rozdělení

$X \sim HG(N, A, n)$

n — kolik prvků vybíráme

N — počet všech prvků (všechna čísla, koule)

A — počet prvků s požadovanou vlastností (výherní čísla, bílé koule)

$$P[X = k] = \frac{\binom{A}{k} \cdot \binom{N-A}{n-k}}{\binom{N}{n}} \quad , k \in \{0, \dots, A\}$$

střední hodnota $EX = \frac{n \cdot A}{N}$

rozptyl $\operatorname{var} X = n \cdot \frac{A}{N} \cdot \left(1 - \frac{A}{N}\right) \cdot \left(\frac{N-n}{N-1}\right)$

<u>Věta</u>: nechť $X_n \sim Bi(n, p_n)$, $n \in \mathbb{N}$,

přičemž $n \cdot p_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda \in \mathbb{R}$ ..,

pak $P[X_n = k] \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$ pro $k \in \mathbb{N}_0$

Jinými slovy: pro dostatečně velké $n \in \mathbb{N}$ lze binomické rozdělení $Bi(n, p_n)$ aproximovat Poissonovým rozdělením $Po(\lambda)$, kde $\lambda = n \cdot p_n$, tedy $P[X_n = k] \doteq e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$

Důkaz: připomeňme si definici exponenciální funkce e^x:

$$\forall x \in \mathbb{R}: \quad e^x = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}}_{\substack{\text{součet řady} \\ 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots}} = \underbrace{\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n}_{\substack{\text{limita posloupnosti funkcí} \\ (1+x),\ \left(1+\frac{x}{2}\right)^2,\ \left(1+\frac{x}{3}\right)^3,\ \dots}}$$

$$P[X_n = k] = \binom{n}{k} \cdot p_n^k \cdot (1 - p_n)^{n-k} =$$

$$= \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) \cdot \cancel{(n-k)!}}{k! \cdot \cancel{(n-k)!}} \cdot (n \cdot p_n)^k \cdot n^{-k} \cdot (1 - p_n)^{-k} \cdot (1 - p_n)^n$$

$$= \underbrace{\frac{(n \cdot p_n)^k}{k!}}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\lambda^k}{k}} \cdot \underbrace{\underbrace{\frac{n}{n}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{n-1}{n}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{n-2}{n}}_{\to 1} \cdot \ldots \cdot \underbrace{\frac{n-k+1}{n}}_{\to 1}}_{k \text{ součinitelů}} \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{n \cdot p_n}{n}\right)^{-k}}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} (1-0)^{-k} = 1} \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{n \cdot p_n}{n}\right)^n}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-\lambda}}$$