4) <u>Poissonovo rozdělení</u> $X \sim Pois(\lambda)$

$$P[X=k] = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}$$

$$EX = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot P[X=k] = \sum_{k=1}^{\infty} \cancel{k} \cdot \frac{\lambda^1 \cdot \lambda^{k-1}}{\cancel{k} \cdot (k-1)!} \cdot e^{-\lambda} =$$

$$= \lambda \cdot e^{-\lambda} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \cdot \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}}_{e^{\lambda}} = \lambda \underbrace{e^{-\lambda} e^{\lambda}}_{1} = \underline{\underline{\lambda}}$$

$$E(X(X-1)) = \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1) \cdot P[X=k] = \sum_{k=2}^{\infty} \cancel{k(k-1)} \cdot \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{\cancel{k(k-1)}(k-2)!}$$

$$= \lambda^2 \cdot e^{-\lambda} \cdot \underbrace{\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!}}_{e^{\lambda}} = \lambda^2 \cdot \underbrace{e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda}}_{1} = \lambda^2$$

$$\operatorname{var} X = EX^2 - (EX)^2 = E[X(X-1) + X] - (EX)^2 =$$

$$= \underbrace{E(X(X-1))}_{\lambda^2} + \underbrace{EX}_{\lambda} - \underbrace{(EX)^2}_{\lambda^2} = \underline{\underline{\lambda}}$$

Příklad: Telefonní ústředna přijme průměrně 15 hovorů za 1 hodinu.

Jaká je pravděpodobnost, že během 4 minut přijme

a) právě jeden hovor?

b) alespoň dva hovory?

$\frac{4}{60} \cdot 15 = 1$ ... průměrný počet hovorů za 4 min.

X ... počet hovorů za 4 minuty, střední hodnota $\lambda = 1$

$X \sim Pois(1)$, tedy $P[X=k] = e^{-1} \cdot \frac{1^k}{k!}$

a) $P[X=1] = \frac{\lambda^1}{1!} \cdot e^{-\lambda} = e^{-1} \doteq 0{,}36$

b) $P[X \geq 2] = 1 - P[X<2] = 1 - \left(P[X=0] + P[X=1]\right)$

$= 1 - \left(\frac{\lambda^0}{0!} \cdot e^{-\lambda} + \frac{\lambda^1}{1!} \cdot e^{-\lambda} \right)$

$= 1 - \left(e^{-1} + e^{-1} \right) \doteq 1 - 2 \cdot 0{,}36 = 1 - 0{,}72 = 0{,}28$