Jméno a příjmení (čitelně): ____________________

Zakroužkujte jméno cvičícího a čas cvičení:

Konopka Kryštof Michalík Vlasáková

9:15 11:00 12:45 14:30 16:15 18:00

Průběžný test ZS 2019/20
Varianta A

1. (3 body) Určete limitu posloupnosti

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}}{\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}}.$$

2. (5 bodů) Parabola je zadána jako graf funkce

$$f(x) = -x^2 + 11x - 28.$$

Určete rovnici tečny ke grafu funkce v bodě $x_0 = 2$. Načrtněte tuto parabolu s vyznačenými průsečíky s osami, vrcholem a se zadanou tečnou, u tečny určete a vyznačte její průsečíky s osami a bod dotyku s parabolou.

3. (12 bodů) Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{4 - 2x},$$

tj. najděte její definiční obor, určete případnou sudost/lichost, kdy je f kladná/záporná, průsečíky s osami (případně hodnoty v jiných důležitých bodech), limity v krajních bodech D_f, derivaci funkce a její nulové body, intervaly monotonie, lokální a globální extrémy, obor hodnot, asymptoty, druhou derivaci, oblasti konvexity, konkavity a inflexní body. Nakreslete graf funkce. Vše řádně zdůvodněte.

Jméno a příjmení (čitelně): ______________________________

Zakroužkujte jméno cvičícího a čas cvičení:

Konopka Kryštof Michalík Vlasáková

9:15 11:00 12:45 14:30 16:15 18:00

Průběžný test ZS 2019/20
Varianta B

1. (3 body) Určete limitu posloupnosti

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}(\sqrt{n^3+3n+1} - \sqrt{n^3-3n-1}).$$

2. (5 bodů) Parabola je zadána jako graf funkce

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 4x + 6.$$

Určete rovnici tečny ke grafu funkce v bodě $x_0 = -8$. Načrtněte tuto parabolu s vyznačenými průsečíky s osami, vrcholem a se zadanou tečnou, u tečny určete a vyznačte její průsečíky s osami a bod dotyku s parabolou.

3. (12 bodů) Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = 2(x-1)\cdot e^{2-x},$$

tj. najděte její definiční obor, určete případnou sudost/lichost, kdy je f kladná/záporná, průsečíky s osami (případně hodnoty v jiných důležitých bodech), limity v krajních bodech D_f, derivaci funkce a její nulové body, intervaly monotonie, lokální a globální extrémy, obor hodnot, asymptoty, druhou derivaci, oblasti konvexity, konkavity a inflexní body. Nakreslete graf funkce. Vše řádně zdůvodněte.

Pomůcka: $e \doteq 2,72$, $\frac{4}{e} \doteq 1,47$.

1.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}+\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}}{\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{\left(\frac{1}{3}\right)^{n}}\cdot\left(\left(\frac{1}{3}\right)^{1}+\left(\frac{3}{4}\right)^{n}\right)}{\cancel{\left(\frac{1}{3}\right)^{n}}\cdot\left(\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}+\left(\frac{3}{4}\right)^{n}\right)}$$

$$=\frac{\frac{1}{3}+0}{\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}+0}=\frac{\frac{1}{3}}{3}=\frac{1}{9}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}=\left(\frac{1}{3}\right)^{n}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{1}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}=\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{2}\right)^{n}=\left(\frac{1}{4}\right)^{n}$$

$$\boxed{q^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \text{ pro } q\in(-1,1)}$$

2.

$f(x)=-x^2+11x-28$, $x_0=2$

$f'(x)=-2x+11$

$f'(2)=-2\cdot 2+11=7$

$y_0=f(2)=-4+22-28=-10$

ROVNICE TEČNY: $\boxed{y-y_0=f'(x_0)\cdot(x-x_0)}$

$y+10=7\cdot(x-2)$

$\boxed{y=7x-24}$

$f(x)=-x^2+11x-28$

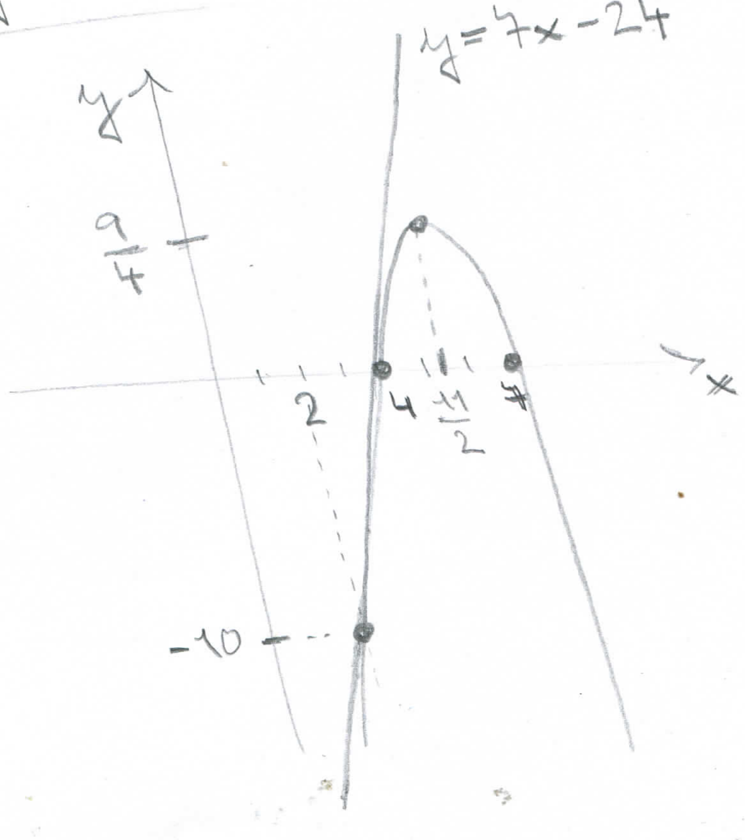
$=(-1)(x^2-11x+28)$

$=(-1)(x-4)(x-7)$

x	4	7	$\frac{11}{2}$
y	0	0	$\frac{9}{4}$

VRCHOL: $f\left(\frac{11}{2}\right)=(-1)\left(\frac{3}{2}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\right)$

$f\left(\frac{11}{2}\right)=\frac{9}{4}$



$$f(x)=\frac{x^2+x-2}{4-2x}$$

x	1	-2	0	4
$f(x)$	0	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{9}{2}$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

průsečíky s osami: $y=0 \iff x^2+x-2=0$

$$(x+2)(x-1)=0$$

$$\underline{x=-2} \vee \underline{x=1}$$

$P_y=[0;-\frac{1}{2}]$

$P_{x_1}=[1;0]$

$P_{x_2}=[-2;0]$

$$f'(x)=\frac{(2x+1)(4-2x)-(x^2+x-2)\cdot(-2)}{(4-2x)^2}=\frac{6x+4-4x^2+2x^2+2x-4}{(4-2x)^2}$$

$$=\frac{8x-2x^2}{(4-2x)^2}=\frac{2x\cdot(4-x)}{(4-2x)^2}$$

↘	0	↗	2	↗	4	↘
$f'<0$		$f'>0$		$f'>0$		$f'<0$

$f'(x)=0 \iff \underline{x=0} \vee \underline{x=4}$

$\underline{\text{lok. minimum}}$: $[0;-\frac{1}{2}]$

$\underline{\text{lok. maximum}}$: $[4;-\frac{9}{2}]$ $\qquad f(4)=\frac{16+4-2}{4-8}=-\frac{9}{2}$

$$f''(x)=\left(\frac{8x-2x^2}{(4-2x)^2}\right)'=\frac{(8-4x)(4-2x)^2-(8x-2x^2)\cdot 2(4-2x)(-2)}{(4-2x)^4}$$

$$=\frac{\cancel{(4-2x)}\cdot\left((8-4x)(4-2x)+4\cdot(8x-2x^2)\right)}{(4-2x)^{\cancel{4}\,3}}$$

$$=\frac{32-16x-16x+8x^2+32x-8x^2}{(4-2x)^3}=\frac{32}{(4-2x)^3}$$

$\forall x\in(2,+\infty)$: $f''(x)<0 \Rightarrow$ funkce je konkávní

$\forall x\in(-\infty,2)$: $f''(x)>0 \Rightarrow$ funkce je konvexní

$\forall x\in D_f$: $f''(x)\neq 0 \Rightarrow f$ nemá inflexní bod

∪	2	∩
$f''>0$		$f''<0$

šikmá asymptota:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{x^2+x-2}{4-2x}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+x-2}{4x-2x^2}$$

$$\overset{L.P.}{=} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x+1}{4-4x} \overset{L.P.}{=} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2}{-4} = \underline{\underline{-\frac{1}{2}}}$$

$$q = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x)-kx) = \lim\left(\frac{x^2+x-2}{4-2x} + \frac{1}{2}x\right)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\lim\left(\frac{x^2+x-2}{2-x} + x\right) = \frac{1}{2}\lim \frac{x^2+x-2+2x-x^2}{2-x}$$

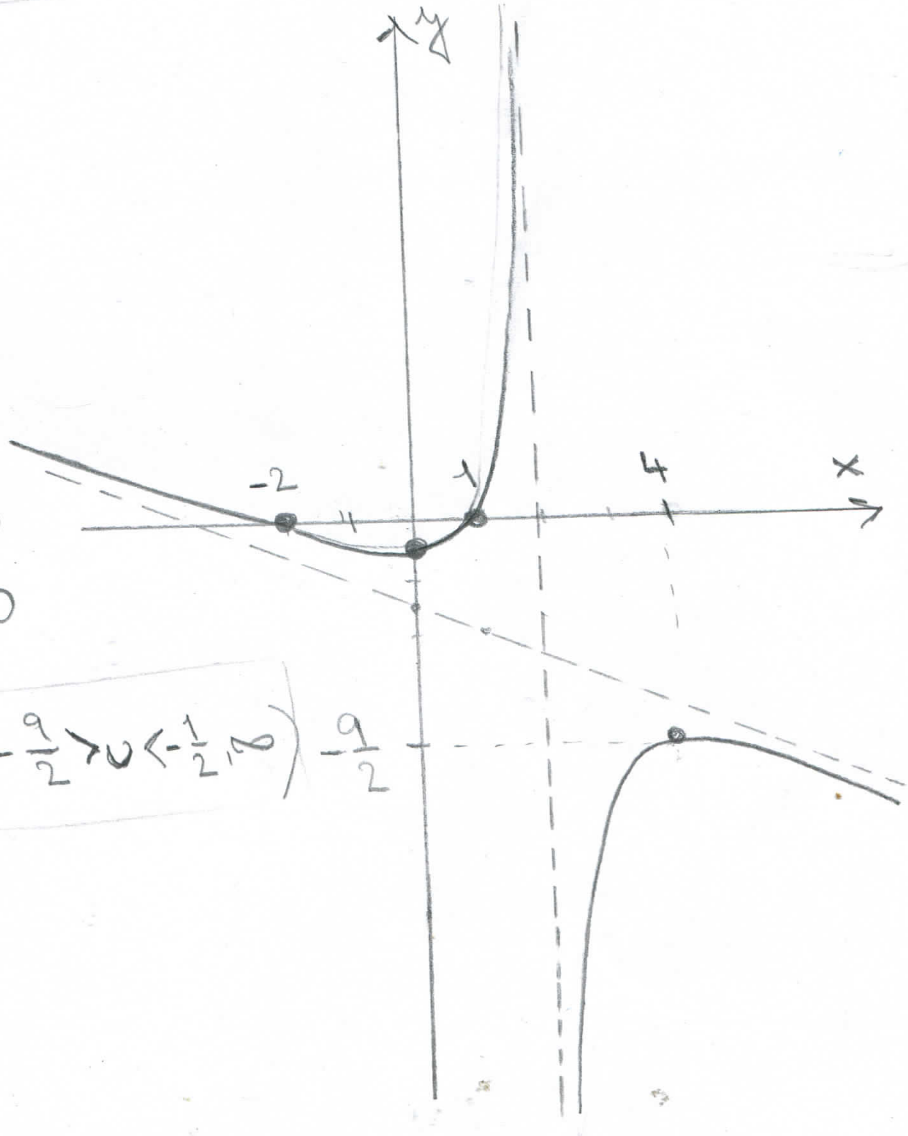
$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x-2}{2-x} \overset{L.P.}{=} \frac{1}{2}\cdot\lim \frac{3}{(-1)} = \underline{\underline{-\frac{3}{2}}}$$

$\Rightarrow$ přímka $\boxed{y = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}}$ je šikmá asymptota v $\pm\infty$

$$f(x) = \frac{(x+2)(x-1)}{2(2-x)}$$

$x+2$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$+$	$+$
$2-x$	$+$	$+$	$+$	$-$
	$+$	$-$	$+$	$-$

$-\infty \quad -2 \quad 1 \quad 2 \quad \infty$



$\forall x \in (-\infty, -2) \cup (1, 2): f(x) > 0$

$\forall x \in (-2, 1) \cup (2, \infty): f(x) < 0$

Obor hodnot: $\boxed{H_f = (-\infty, -\frac{9}{2}\rangle \cup \langle -\frac{1}{2}, \infty)}$

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n}\cdot\left(\sqrt{n^3+3n+1}-\sqrt{n^3-3n-1}\right)$

$$= \lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\cdot \frac{n^3+3n+1-(n^3-3n-1)}{\sqrt{n^3+3n+1}+\sqrt{n^3-3n-1}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\cdot \frac{6n+2}{n^{\frac{3}{2}}\cdot\left(\sqrt{1+\frac{3}{n^2}+\frac{1}{n^3}}+\sqrt{1-\frac{3}{n^2}-\frac{1}{n}}\right)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^{\frac{3}{2}}}\cdot(6n+2)\cdot \underbrace{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{3}{n^2}+\frac{1}{n^3}}+\sqrt{1-\frac{3}{n^2}-\frac{1}{n}}}}_{=\frac{1}{\sqrt{1+0+0}+\sqrt{1+0+0}}=\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{2}-\frac{3}{2}}\cdot(6n+2)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{6n+2}{n} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{n}\left(6+\frac{2}{n}\right)}{\cancel{n}} = \frac{1}{2}\cdot 6 = \underline{\underline{3}}$$

(2.) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 4x + 6 \quad , x_0 = -8$

ROVNICE TEČNY: $y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$

$f'(x) = x + 4$

$f'(-8) = -4$

TEČNÝ BOD: $[-8; 6]$

$y_0 = f(-8) = 32 - 32 + 6 = 6$

TEČNA: $\boxed{y - 6 = (-4) \cdot (x + 8)}$

$\Rightarrow \quad y = -4x - 26$

průsečíky s osami: $y = 0 \iff \frac{1}{2}x^2 + 4x + 6 = 0 \quad | \cdot 2$

$x^2 + 8x + 12 = 0$

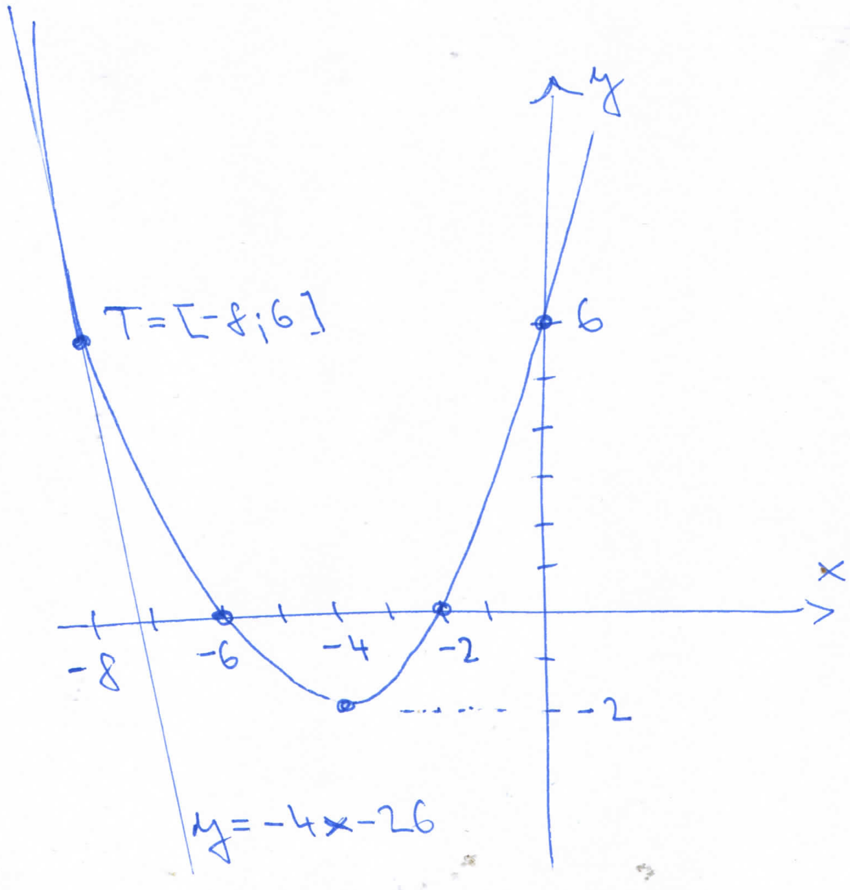
$(x+6)(x+2) = 0$

$\underline{x = -6} \lor \underline{x = -2}$

x	-2	-6	0	-4
$f(x)$	0	0	6	-2

$f'(x) = 0 \iff x = -4$

$f(-4) = 8 - 16 + 6 = -2$



$$\underline{f(x) = 2(x-1)\cdot e^{2-x}} \qquad D_f = \mathbb{R}$$

$$f'(x) = 2\cdot e^{2-x} + 2(x-1)\cdot e^{2-x}\cdot(-1) = e^{2-x}\cdot(2-2x+2)$$

$$f'(x) = e^{2-x}\cdot(4-2x)$$

$$f'(x) = 0 \iff 4-2x = 0$$

$$\underline{\underline{x=2}}$$

$f'>0$ 2 $f'<0$

lok. maximum : $[2;2]$

$$f(2) = 2\cdot(2-1)\cdot e^0 = 2$$

$$f''(x) = -e^{2-x}\cdot(4-2x) + e^{2-x}\cdot(-2) = e^{2-x}\cdot(2x-6)$$

$$f''(x) = 0 \iff 2x-6 = 0$$

$$\underline{x=3}$$

$f''<0$ 3 $f''>0$

$\forall x \in \underline{(3,\infty)} : \underline{f''(x) > 0} \implies$ funkce je KONVEXNÍ

$\forall x \in \underline{(-\infty,3)} : \underline{f''(x) < 0} \implies$ funkce je KONKÁVNÍ

inflexní bod : $[3; \frac{4}{e}]$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{2(x-1)}{e^{x-2}} \overset{L.P.}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{2}{e^{x-2}} = \frac{2}{+\infty} = \underline{\underline{0}}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2(x-1)}{e^{x-2}} = \frac{-\infty}{0_+} = \underline{\underline{-\infty}}$$

šikmá asymptota: $k = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2(x-1)e^{2-x}}{x} =$

$$= 2\cdot\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)\cdot e^{2-x} = 2\cdot e^{+\infty} = +\infty$$

$\implies$ nemá šikmou asymptotu v $-\infty$

v $+\infty$ má vodorovnou asymptotu $y=0$.

$\forall x \in (1, \infty): f(x) > 0$

$\forall x \in (-\infty, 1): f(x) < 0$

x	1	0	2	3
y	0	$-2e^2$	2	$\frac{4}{e}$

průsečíky s osami: $y = 0 \iff x = 1$

$x = 0 \iff y = -2e^2$

Obor hodnot: $H_f = (-\infty, 2\rangle$