Jméno a příjmení (čitelně): ______________________________

Zakroužkujte jméno cvičícího a čas cvičení:

Konopka   Kryštof   Michalík   Vlasáková

9:15   11:00   12:45   14:30   16:15   18:00

Závěrečný test ZS 2019/20
Varianta A

1. (6 bodů) Určete limitu funkce

$$\lim_{x\to 0} \frac{x \cdot e^{2x}}{1 - e^{2x}}.$$

2. (18 bodů) (a) Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = x + \frac{4}{x} - 5,$$

tj. najděte její definiční obor, určete případnou sudost/lichost, kdy je f kladná/záporná, průsečíky s osami (případně hodnoty v jiných důležitých bodech), limity v krajních bodech D_f, derivaci funkce a její nulové body, lokální a globální extrémy, obor hodnot, intervaly monotonie, asymptoty, druhou derivaci, oblasti konvexity, konkavity a inflexní body. Nakreslete graf funkce. Vše řádně zdůvodněte.
(b) Určete rovnici tečny ke grafu funkce f v bodě $x_0 = -1$ a také ji zakreslete do grafu.

3. (18 bodů) Určete globální extrémy funkce f na množině M.

$$f(x, y) = x^2 + 10y$$

$$M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 \leq 169;\ -x - 17 \leq y \leq x + 7\}.$$

Množinu M nakreslete a vyznačte do ní všechny nalezené kandidáty na extrém.

4. (18 bodů) Určete globální extrémy funkce f na množině M.

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2$$

$$M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3;\ (x-1)^2 + y^2 + z^2 = 4\}.$$

② $f(x) = x + \frac{4}{x} - 5$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$f(-x) = -x - \frac{4}{x} - 5 \neq f(x) \Rightarrow f$ není sudá

$f(-x) \neq -f(x) \Rightarrow f$ není lichá

průsečíky s osami: $f(x) = 0 \iff x + \frac{4}{x} - 5 = 0 \quad / \cdot x$

$$x^2 + 4 - 5x = 0$$
$$x^2 - 5x + 4 = 0$$
$$(x-4)(x-1) = 0$$
$$\underline{x=4} \vee x = 1$$

1. derivace: $f'(x) = 1 - \frac{4}{x^2}$

$f'(x) = 0 \iff 1 - \frac{4}{x^2} = 0 \quad / \cdot x^2$

$$x^2 - 4 = 0$$
$$(x-2)(x+2) = 0$$
$$\underline{x=2} \vee \underline{x=-2}$$

$f'>0$ $\quad -2 \quad$ $f'<0$ $\quad 0 \quad$ $f'<0$ $\quad 2 \quad$ $f'>0$

$\forall x \in (-\infty,-2) \cup (2,\infty): f'(x) > 0 \Rightarrow f$ je rostoucí

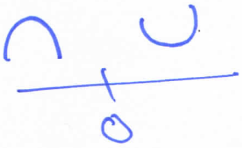
$\forall x \in (-2,0) \cup (0,2): f'(x) < 0 \Rightarrow f$ je klesající

lok. maximum: $[-2; f(-2)] = [-2; -9]$

lok. minimum: $[2; f(2)] = [2; -1]$

2. derivace: $f''(x) = \frac{8}{x^3}$

$\forall x \in D_f: f''(x) \neq 0 \Rightarrow f$ nemá žádný inflexní bod



$\forall x \in (0,\infty): f''(x) > 0 \Rightarrow f$ je konvexní

$\forall x \in (-\infty,0): f''(x) < 0 \Rightarrow f$ je konkávní

Limity v krajních bodech D_f:

$$\lim_{x \to 0_+} \left(x + \frac{4}{x} - 5\right) = 0_+ + \frac{4}{0_+} - 5 = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0_-} \left(x + \frac{4}{x} - 5\right) = 0_- + \frac{4}{0_-} - 5 = -\infty$$

$\Rightarrow$ přímka $x=0$ je svislá asymptota

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+\frac{4}{x}-5\right)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+\frac{4}{x}-5\right)=-\infty$

$\Rightarrow$ Funkce nemá vodorovnou asymptotu v $+\infty$ ani v $-\infty$.

šikmá asymptota: $y=kx+q$

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x+\frac{4}{x}-5}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{4}{x^2}-\frac{5}{x}\right)=\underline{\underline{1}}$$

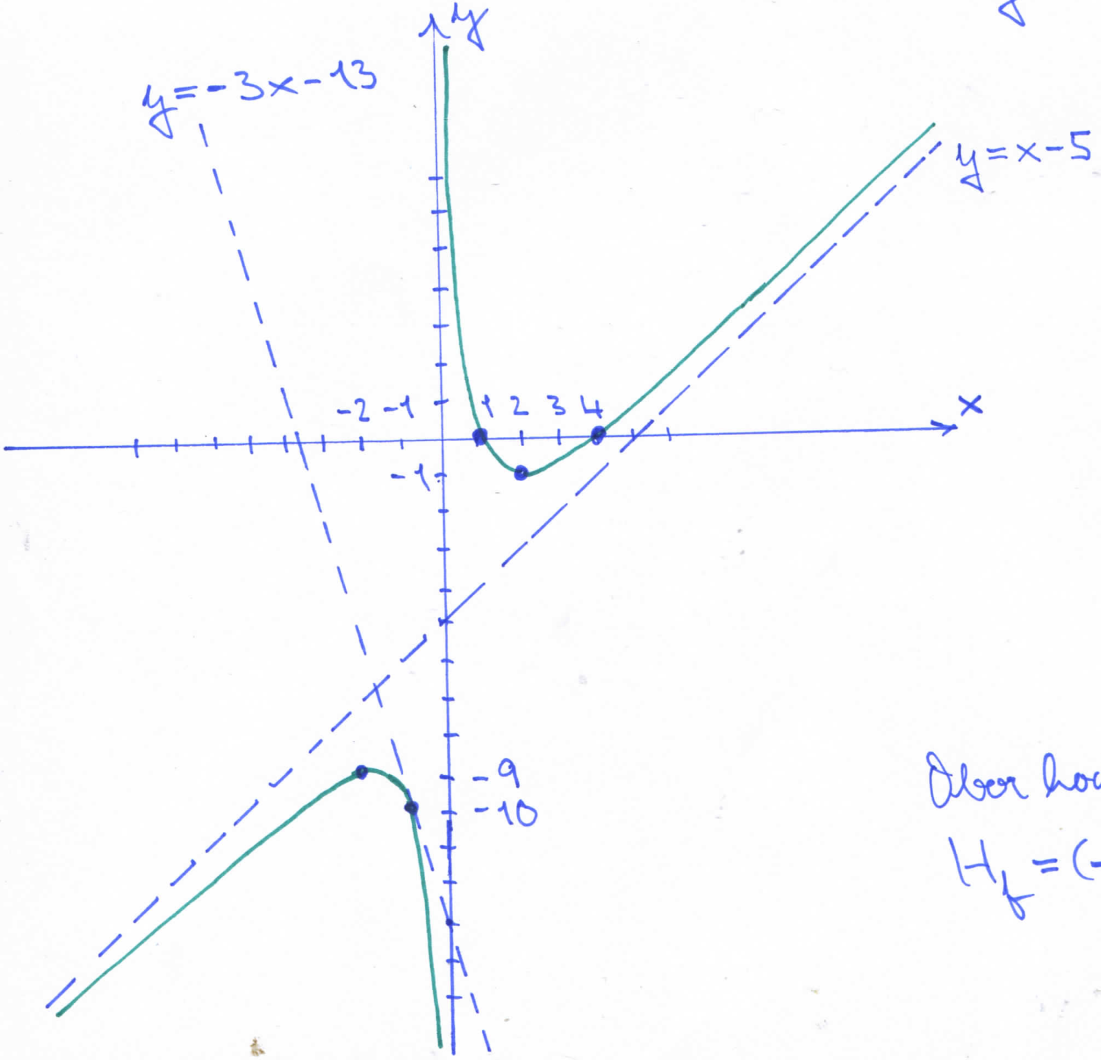
$$q=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-k\cdot x)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(x+\frac{4}{x}-5-1\cdot x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{4}{x}-5\right)=0-5=\underline{\underline{-5}}$$

šikmá asymptota v $\pm\infty$ je přímka $y=x-5$

x	1	4	0	2	-2	-1
y	0	0	–	-1	-9	-10

rovnice tečny v bodě $x_0=-1$:

$$y-y_0=f'(x_0)\cdot(x-x_0)$$
$$y+10=(-3)\cdot(x+1)$$
$$y=-3x-13$$



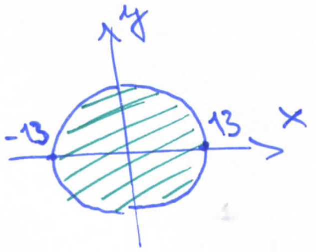
Obor hodnot

$H_f=(-\infty,-9\rangle\cup\langle-1,\infty)$

(3.) $f(x,y) = x^2 + 10y$

$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 \le 169;\ -x-17 \le y \le x+7\}$

$x^2 + y^2 \le 169$

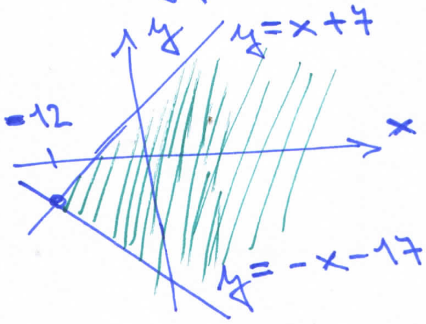


$-x-17 \le y \le x+7$

průsečíky přímek: $-x-17 = x+7$

$-2x = 24$

$x = -12$



průsečíky kružnice a přímky $y = x+7$:

$x^2 + (x+7)^2 = 169$

$x^2 + x^2 + 14x + 49 = 169$

$2x^2 + 14x - 120 = 0 \quad |:2$

$x^2 + 7x - 60 = 0$

$(x+12)(x-5) = 0$

$\underline{x=-12} \vee \underline{x=5}$

průsečíky kružnice a přímky $y = -x-17$:

$x^2 + (-x-17)^2 = 169$

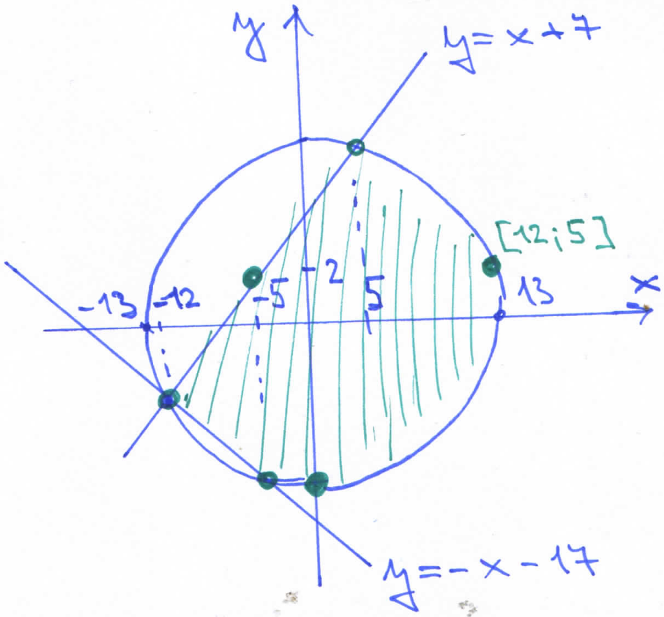
$x^2 + x^2 + 34x + 289 = 169$

$2x^2 + 34x + 120 = 0 \quad |:2$

$x^2 + 17x + 60 = 0$

$(x+12)(x+5) = 0$

$\underline{x=-12} \vee \underline{x=-5}$



1) Vnitřek množiny M

$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$

$\frac{\partial f}{\partial y} = 10 \neq 0 \quad \forall (x,y) \in M$ $\Rightarrow$ funkce f nemá žádné stacionární body

$\Rightarrow$ nemá volné extrémy v M

2) Hranice množiny M

I. úsečka $y = x+7, \; x \in (-12, 5)$

$g(x) := f(x, x+7) = x^2 + 10(x+7) = x^2 + 10x + 70$

$g'(x) = 2x + 10 = 0 \Leftrightarrow x = -5$

$y = 2$

$g' < 0 \quad -5 \quad g' > 0$

II. úsečka $y = -x-17, \; x \in (-12, -5)$

$g(x) := f(x, -x-17) = x^2 + 10\cdot(-x-17) = x^2 - 10x - 170$

$g'(x) = 2x - 10 = 0 \Leftrightarrow x = 5 \notin (-12, -5)$

III. oblouk $x^2 + y^2 = 169, \; x \in (-5, 13\rangle, \; y \in (-13, 12)$

metoda Jacobiánu: $\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & 10 \\ 2x & 2y \end{vmatrix} = 4xy - 20x$

I. $4xy - 20x = 0 \Leftrightarrow 4x\cdot(y-5) = 0$

II. $x^2 + y^2 = 169$ $\quad x = 0 \vee y = 5$

$x = 0$: $y^2 = 169 \Leftrightarrow y = \pm 13$ $\quad [0;13] \notin M$, $[0;-13] \in M$

$y = 5$: $x^2 + 25 = 169$

$x^2 = 144 \Leftrightarrow x = \pm 12$ $\quad [12;5] \in M$, $[-12;5] \notin M$

podezřelé body: $[5;12]; [-12;-5]; [-5;-12]; [-5;2]$

$[0;-13]; [12;5]$

$f(5,12) = 25 + 10 \cdot 12 = 145$

$f(-12,-5) = 144 - 50 = 94$

$f(-5,-12) = 25 - 120 = -95$

$f(-5;2) = 25 + 20 = 45$

$f(0,-13) = -130$ - minimum

$f(12,5) = 144 + 50 = 194$ - maximum

(4.) $f(x,y,z) = x^2 + y^2$

$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ;\ (x-1)^2 + y^2 + z^2 = 4\}$

$L(x,y,z) := f(x,y,z) + \lambda \cdot g(x,y,z) = x^2 + y^2 + \lambda\left((x-1)^2 + y^2 + z^2 - 4\right)$

$\frac{\partial L}{\partial x} = 2x + \lambda \cdot 2(x-1) = 0 \iff \boxed{\lambda = -\frac{x}{x-1}}$

$\frac{\partial L}{\partial y} = 2y + \lambda \cdot 2y = 0 \quad |:2$

$\frac{\partial L}{\partial z} = 2\lambda z = 0 \quad |:2$

$y + \lambda y = 0$

$y(1+\lambda) = 0 \iff y = 0 \vee \lambda = -1$

$y \cdot \left(1 - \frac{x}{x-1}\right) = 0$

$y \cdot \frac{x-1-x}{x-1} = 0$

$y \cdot \left(-\frac{1}{x-1}\right) = 0 \iff y = 0$

I. $\lambda = -1$: $-1 = -\frac{x}{x-1} \quad |\cdot(x-1)$

$x - 1 = x \quad |-x$

$-1 = 0x \implies$ nemá řešení

II. $\lambda = 0$: $x = 0$

$y = 0$ $\quad [0,0,\pm\sqrt{3}] \in M$

$1 + 0 + z^2 = 4$

$z = \pm\sqrt{3}$

III. $\lambda = -\frac{x}{x+1}$: $y = 0 \wedge ((x=0) \vee (z=0))$

a) $y=0,\ x=0 \ \ldots z = \pm\sqrt{3}$

b) $y=0,\ z=0 \ \ldots (x-1)^2 = 4$

$x^2 - 2x + 1 = 4$

$x^2 - 2x - 3 = 0$

$(x-3)(x+1) = 0 \implies x = 3 \vee x = -1$

kandidáti : $[0;0;\pm\sqrt{3}]$

$[3;0;0]$

$[-1;0;0]$

$f(0,0,\pm\sqrt{3}) = 0$ – minima

$f(3,0,0) = 9$ – maximum

$f(-1,0,0) = 1$

1. $$\lim_{x\to 0} \frac{x\cdot e^{2x}}{1-e^{2x}} \overset{L.P.}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}+x\cdot 2e^{2x}}{(-2)\cdot e^{2x}} =$$

typ „$\frac{0}{0}$"

$$= \frac{e^0 + 0\cdot 2e^0}{(-2)\cdot e^0} = \frac{1}{(-2)} = -\frac{1}{2}$$