Jméno a příjmení (čitelně): ______________________________

Zakroužkujte jméno cvičícího a čas cvičení:

Konopka Kryštof Michalík Vlasáková

9:15 11:00 12:45 14:30 16:15 18:00

**Závěrečný test ZS 2019/20**
**Varianta C**

**1.** (6 bodů) Určete limitu posloupnosti

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(\frac{6}{7})^{n+2} - (\frac{11}{14})^n}{(\frac{36}{49})^n - (\frac{18}{21})^n - (\frac{7}{6})^{-n}}$$

**2.** (18 bodů) (a) Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \sqrt{-x^2 + 4x + 21},$$

tj. najděte její definiční obor, určete případnou sudost/lichost, kdy je $f$ kladná/záporná, průsečíky s osami (případně hodnoty v jiných důležitých bodech), limity v krajních bodech $D_f$, derivaci funkce a její nulové body, lokální a globální extrémy, obor hodnot, intervaly monotonie, asymptoty, druhou derivaci, oblasti konvexity, konkavity a inflexní body. Nakreslete graf funkce. Vše řádně zdůvodněte.
(b) Určete rovnici tečny ke grafu funkce $f$ v bodě $x_0 = 5$ a také ji zakreslete do grafu.
Pomůcka: $\sqrt{21} \doteq 4,58$.

**3.** (18 bodů) Určete globální extrémy funkce $f$ na množině $M$.

$$f(x,y) = x^2 - 8y$$

$$M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 \leq 25;\ y \leq 13 - x^2;\ x \geq 0\}.$$

Množinu $M$ nakreslete a vyznačte do ní všechny nalezené kandidáty na extrém.

**4.** (18 bodů) Určete globální extrémy funkce $f$ na množině $M$.

$$f(x,y,z) = e^{xy+z}$$

$$M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 = 9;\ x - yz = 0\}.$$

② $f(x) = \sqrt{-x^2+4x+21}$

DEFINIČNÍ OBOR: $-x^2+4x+21 \geq 0 \quad | \cdot (-1)$

$$x^2-4x-21 \leq 0$$

$$(x-7)(x+3) \leq 0 \iff x \in \langle -3; 7 \rangle$$

| | $-\infty$ | $-3$ | $7$ | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $x-7$ | $-$ | $-$ | $+$ | |
| $x+3$ | $-$ | $+$ | $+$ | |
| | $+$ | $-$ | $+$ | |

$$\boxed{D_f = \langle -3, 7 \rangle}$$

PRŮSEČÍKY S OSAMI: $P_y = [0; \sqrt{21}]$

$P_{x_1} = [-3; 0]$, $P_{x_2} = [7; 0]$

1. DERIVACE: $f'(x) = (-2x+4) \cdot \frac{1}{2}(-x^2+4x+21)^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{-x+2}{\sqrt{-x^2+4x+21}}$

$f'(x) = 0 \iff x = 2$

$-3 \quad \nearrow \ f'>0 \quad 2 \quad \searrow \ f'<0 \quad 7$

$\forall x \in (-3, 2): f'(x) > 0 \Rightarrow f$ je rostoucí

$\forall x \in (2, 7): f'(x) < 0 \Rightarrow f$ je klesající

$f(2) = \sqrt{-4+8+21} = \sqrt{25} = 5$ GLOBÁLNÍ MAXIMUM: $[2; 5]$

2. DERIVACE: $f''(x) = \dfrac{(-1) \cdot \sqrt{-x^2+4x+21} - (-x+2) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{-2x+4}{\sqrt{-x^2+4x+21}}}{(-x^2+4x+21)}$

$$= \frac{-\sqrt{-x^2+4x+21} - \frac{(-x+2)^2}{\sqrt{-x^2+4x+21}}}{(-x^2+4x+21)} \cdot \frac{\sqrt{-x^2+4x+21}}{\sqrt{-x^2+4x+21}} = \frac{-(-x^2+4x+21)-(2-x)^2}{(-x^2+4x+21)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{x^2-4x-21-(4-4x+x^2)}{(-x^2+4x+21)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{25}{(-x^2+4x+21)^{\frac{3}{2}}}$$

$\forall x \in D_f: f''(x) < 0 \Rightarrow$ FUNKCE JE KONKÁVNÍ NA $D_f$

$\forall x \in D_f: f''(x) \neq 0 \Rightarrow$ NEMÁ INFLEXNÍ BOD

1.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{6}{7}\right)^{n+2} - \left(\frac{11}{14}\right)^{n}}{\left(\frac{36}{49}\right)^{n} - \left(\frac{18}{21}\right)^{n} - \left(\frac{7}{6}\right)^{-n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{6}{7}\right)^{n}\cdot\left(\frac{6}{7}\right)^{2} - \left(\frac{11}{14}\right)^{n}}{\left(\frac{6}{7}\right)^{2n} - \left(\frac{6}{7}\right)^{n} - \left(\frac{6}{7}\right)^{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{6}{7}\right)^{n}\cdot\left(\frac{36}{49} - \left(\frac{\frac{11}{14}}{\frac{6}{7}}\right)^{n}\right)}{\left(\frac{6}{7}\right)^{n}\cdot\left(\left(\frac{6}{7}\right)^{n} - 1 - 1\right)}$$

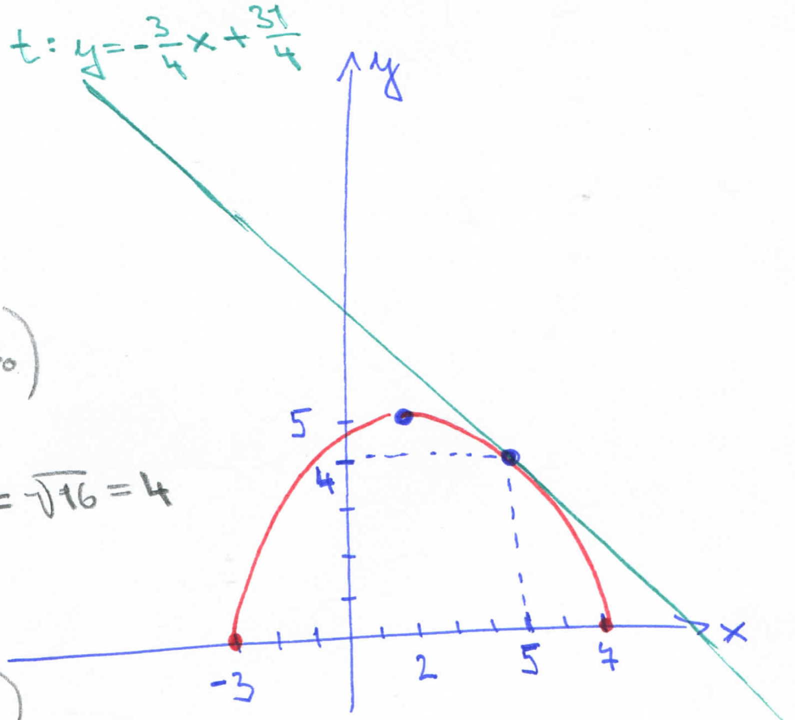
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{36}{49} - \left(\frac{11}{12}\right)^{n}}{\left(\frac{6}{7}\right)^{n} - 2} \overset{A.L.}{=} \frac{\frac{36}{49} - 0}{0 - 2} = -\frac{18}{49}$$

$$\frac{11}{14} : \frac{6}{7} = \frac{11}{14}\cdot\frac{7}{6} = \frac{11}{12}$$

$$\boxed{q^{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \text{ pro } q\in(-1,1)}$$

2. 2. část

Graf:




ROVNICE TEČNY:

$$y - y_0 = f'(x_0)\cdot(x - x_0)$$

$$f(5) = \sqrt{-25+20+21} = \sqrt{16} = 4$$

$$f'(5) = \frac{-5+2}{4} = -\frac{3}{4}$$

$$y - 4 = \left(-\frac{3}{4}\right)\cdot(x-5)$$

TEČNA: $y = -\frac{3}{4}x + \frac{31}{4}$

OBOR HODNOT $H_f = \langle 0, 5 \rangle$

(3.) $f(x,y) = x^2 - 8y$

$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ;\ x^2 + y^2 \leq 25 ;\ y \leq 13 - x^2 ;\ x \geq 0\}$

průsečíky kružnice a paraboly: $x^2 + y^2 = 25$

$y = 13 - x^2$

$x^2 + (13 - x^2)^2 = 25$

$x^2 + 169 - 26x^2 + x^4 = 25$

$x^4 - 25x^2 + 144 = 0$

substituce: $\boxed{x^2 = t}$

$t^2 - 25t + 144 = 0$

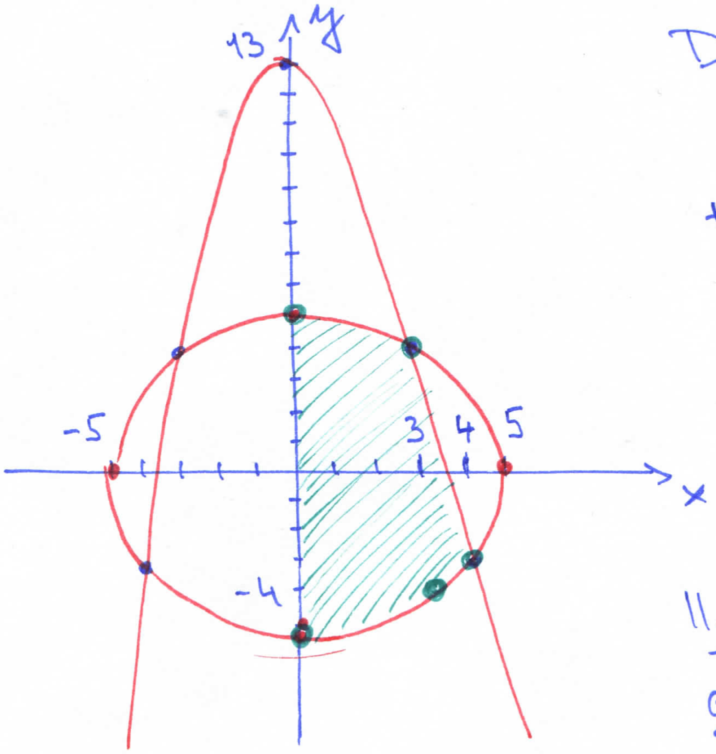
$D = (-25)^2 - 4 \cdot 144 = 625 - 576$

$D = 49$

$t_{1,2} = \dfrac{25 \pm 7}{2} = \left\langle \begin{matrix} 16 \\ 9 \end{matrix} \right.$

$t = 16 \quad \vee \quad t = 9$

$\underline{x = \pm 4} \quad \vee \quad \underline{x = \pm 3}$




1. $x = 0,\ y \in \langle -5, 5 \rangle$

$g(y) := f(0, y) = -8y$

$g'(y) = -8 \neq 0$

$\Rightarrow f$ nemá extrém na úsečce $x = 0,\ y \in (-5, 5)$

II. $y = 13 - x^2,\ x \in (3, 4)$

$g(x) := f(x, 13 - x^2) = x^2 - 8(13 - x^2)$

$= x^2 - 104 + 8x^2 = 9x^2 - 104$

$g'(x) = 18x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \notin (3, 4)$

$\Rightarrow f$ nemá extrém na parabole $y = 13 - x^2$, $x \in (3, 4)$

III. $x^2+y^2=25$ , $(x,y)\in((0,3)\times(4,5))\cup((0,4)\times(-3,-5))$

Metoda Jakobiánu: $\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & -8 \\ 2x & 2y \end{vmatrix} = 2x\cdot 2y + 2x\cdot$

$= 2x\cdot(2y+8) = 0 \iff \underline{x=0} \vee \underline{y=-4}$

$y=-4$ : $x^2+16=25$
$x^2=9$
$x=\pm 3$

$\Rightarrow$ kandidát : $[3;-4]$

Vnitřek množiny M : $\frac{\partial f}{\partial x}=2x$

$\frac{\partial f}{\partial y}=-8\neq 0 \Rightarrow$ f nemá volné extrémy

Kandidáti : $[3;-4]$, $[3;4]$, $[0;5]$, $[0;-5]$, $[4;-3]$

$f(3,-4)=9+32=\underline{\underline{41}}$ vázané maximum

$f(3,4)=9-32=-23$

$f(0,5)=\underline{\underline{-40}}$ vázané minimum

$f(0,-5)=40$

$f(4,-3)=16+24=40$

4. $f(x,y,z) = e^{xy+z}$

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ; \underbrace{x^2+y^2+z^2-9}_{=: g_1(x,y,z)} = 0 ; \underbrace{x - yz}_{=: g_2(x,y,z)} = 0 \}$$

Jakobián:
$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} & \frac{\partial g_1}{\partial z} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y} & \frac{\partial g_2}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y \cdot e^{xy+z} & x \cdot e^{xy+z} & e^{xy+z} \\ 2x & 2y & 2z \\ 1 & -z & -y \end{vmatrix}$$

SARRUSOVO PRAVIDLO

$$= -2y^3 \cdot e^{xy+z} \cancel{- 2xz \cdot e^{xy+z}} \cancel{+ 2xz\, e^{xy+z}}$$
$$-\left(2y\, e^{xy+z} - 2z^2 y\, e^{xy+z} - 2x^2 y\, e^{xy+z}\right)$$
$$= e^{xy+z} \cdot \left(-2y^3 - 2y + 2z^2 y + 2x^2 y\right) = 0$$

I. $-2y^3 - 2y + 2z^2 y + 2x^2 y = 0$

$2y \cdot (x^2 + z^2 - y^2 - 1) = 0 \iff y = 0 \lor \underline{y^2 = x^2 + z^2 - 1}$

II. $x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0$

III. $x - yz = 0$ dosazením: $x = 0$

$0^2 + 0^2 + z^2 - 9 = 0$

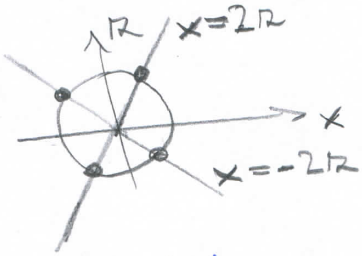
1) $\underline{y=0}$, $\underline{x=0}$, $\underline{z=\pm 3}$

2) $x^2 + z^2 = 1 + y^2$ → dosazením do II.: $1 + y^2 + y^2 - 9 = 0$

$2y^2 = 8$

$y^2 = 4$

$y = \pm 2$




$\underline{y = \pm 2}$: $x^2 + z^2 = 5$

$x \pm 2z = 0$

$4z^2 + z^2 = 5$

$5z^2 = 5 \implies \underline{z = \pm 1}$

$\underline{x = \pm 2}$

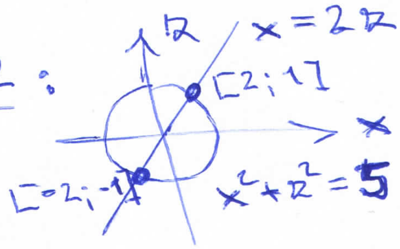
BODY PODEZŘELÉ Z EXTRÉMŮ:

$[0;0;3]$

$[0;0;-3]$

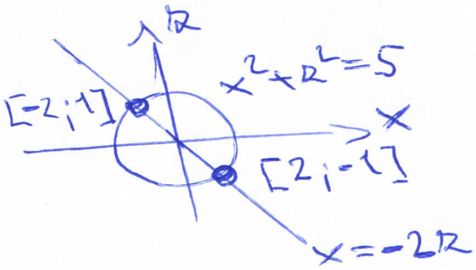
$[2;2;1]$

$[-2;2;-1]$ $\Big\}$ $y=2$:




$[2;-2;-1]$

$[-2;-2;1]$ $\Big\}$ $y=-2$:




$f(0,0,3) = e^3$

$f(0,0,-3) = e^{-3}$

$f(2,2,1) = e^5$ → maximum

$f(-2,2,-1) = e^{-5}$

$f(2,-2,-1) = e^{-5}$ $\Big\}$ minima

$f(-2,-2,1) = e^5$ → maximum