Jméno a příjmení (čitelně): ________________________________

Zakroužkujte jméno cvičícího a čas cvičení:

Konopka Kryštof Michalík Vlasáková

9:15 11:00 12:45 14:30 16:15 18:00

Závěrečný test ZS 2019/20
Varianta D

1. (6 bodů) Určete limitu funkce

$$\lim_{x\to\infty} e^{-3x+1}\cdot 2x$$

2. (18 bodů) (a) Vyšetřete průběh funkce

$$f(x)=\frac{1}{2x^2}-x,$$

tj. najděte její definiční obor, určete případnou sudost/lichost, kdy je f kladná/záporná, průsečíky s osami (případně hodnoty v jiných důležitých bodech), limity v krajních bodech D_f, derivaci funkce a její nulové body, lokální a globální extrémy, obor hodnot, intervaly monotonie, asymptoty, druhou derivaci, oblasti konvexity, konkavity a inflexní body. Nakreslete graf funkce. Vše řádně zdůvodněte.
(b) Určete rovnici tečny ke grafu funkce f v bodě $x_0=1$ a také ji zakreslete do grafu.
Pomůcka: $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\doteq 0,79$.

3. (18 bodů) Určete globální extrémy funkce f na množině M.

$$f(x,y)=x^2+y^2+3x-4y$$

$$M=\{[x,y]\in\mathbb{R}^2;\ x^2+y^2\le 100;\ x\ge -2y-10\}.$$

Množinu M nakreslete a vyznačte do ní všechny nalezené kandidáty na extrém.

4. (18 bodů) Určete globální extrémy funkce f na množině M.

$$f(x,y,z)=x^2+\frac{2}{3}y^3$$

$$M=\{[x,y,z]\in\mathbb{R}^3;\ x^2+y^2+z^2=9\}.$$

1. $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-3x+1}\cdot 2x = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x}{e^{3x-1}} \overset{L.P.}{=} \lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{3e^{3x-1}}$

$= \frac{2}{3e^{\infty}} = \frac{2}{+\infty} = \underline{\underline{0}}$ TYP LIMITY „$\frac{\infty}{\infty}$"

2. $f(x) = \frac{1}{2x^2} - x$ $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$

$f'(x) = -\frac{1}{x^3} - 1$

$f'(x) = 0 \iff -\frac{1}{x^3} - 1 = 0 \quad |\cdot x^3$

$f''(x) = \frac{3}{x^4}$

$-1 - x^3 = 0$

$x^3 = -1$

$\underline{x = -1}$

$\searrow \quad \nearrow \quad \searrow$

$\underline{f'<0}$ -1 $\underline{f'>0}$ 0 $\underline{f'<0}$

$\forall x \in D_f : f''(x) > 0$

$\Rightarrow$ f je konvexní na D_f

nemá inflexní bod

lok. minimum: $\left[-1; \frac{3}{2}\right]$

průsečíky s osami: $0 \notin D_f \Rightarrow$ nemá průsečík s osou y

P_x: $\frac{1}{2x^2} - x = 0 \quad |\cdot 2x^2$

$1 - 2x^3 = 0$ $P_x = \left[\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}}; 0\right]$

$x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}} \doteq 0{,}79$

limity: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{2x^2} - x\right) = +\infty$

$\Rightarrow$ přímka $x=0$ je svislá asymptota

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2x^2} - x\right) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{2x^2} - x\right) = +\infty$

$\Rightarrow$ nemá vodorovnou asymptotu

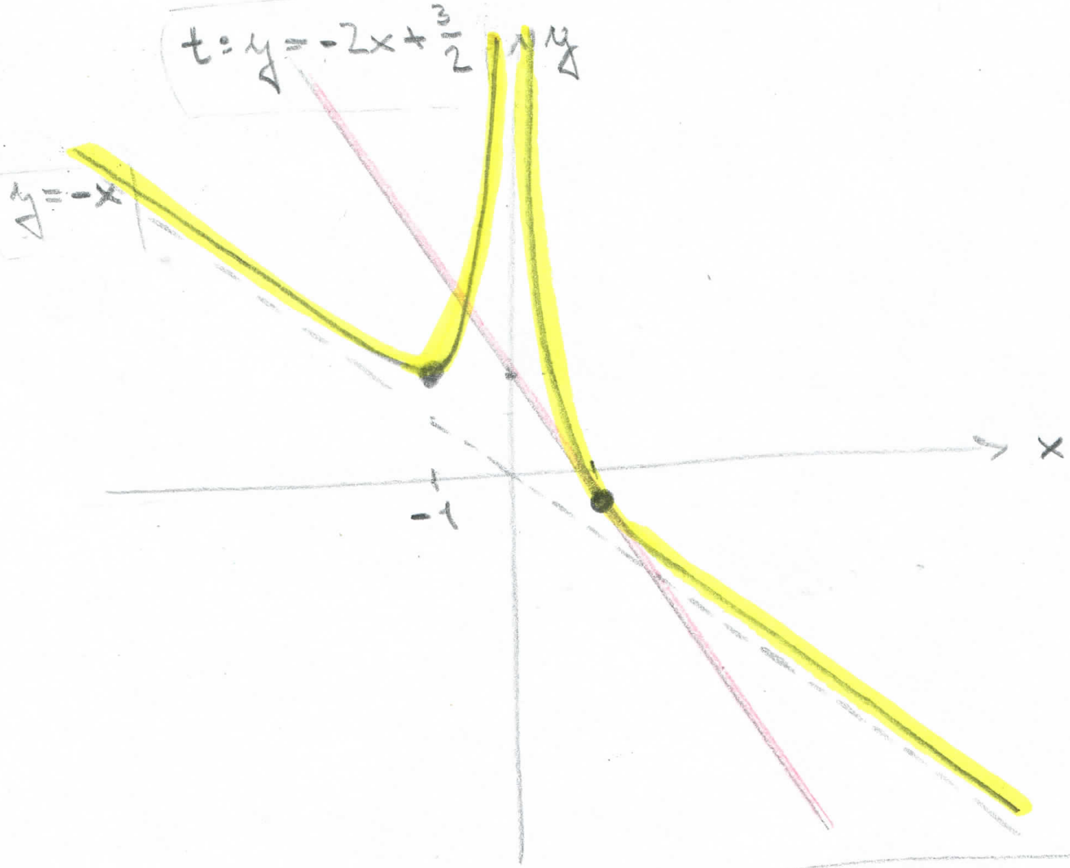
šikmá asymptota: $y = kx + q$

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\frac{1}{2x^2} - x}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{1}{2x^3} - 1 \right) = \underline{\underline{-1}}$$

$$q = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{1}{2x^2} \underbrace{- x - (-1)x}_{=0} \right) = \underline{\underline{0}}$$

$\Rightarrow$ $y = -x$ je šikmá asymptota v $\pm\infty$

$H_f = \mathbb{R}$



TEČNA V BODĚ $x_0 = 1$:

$$\boxed{y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0)}$$

$y_0 = f(1) = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$

$$y + \frac{1}{2} = (-2) \cdot (x - 1)$$

$f'(1) = -1 - 1 = -2$

$$\boxed{y = -2x + \frac{3}{2}}$$

3. $f(x,y) = x^2 + y^2 + 3x - 4y$

$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; x^2 + y^2 \leq 100 ; x \geq -2y - 10\}$

průsečíky přímky a kružnice: $x^2 + y^2 = 100$

$x = -2y - 10$ dosazení

$x = -2y - 10 \iff \boxed{y = -\frac{x}{2} - 5}$

$(-2y-10)^2 + y^2 = 100$

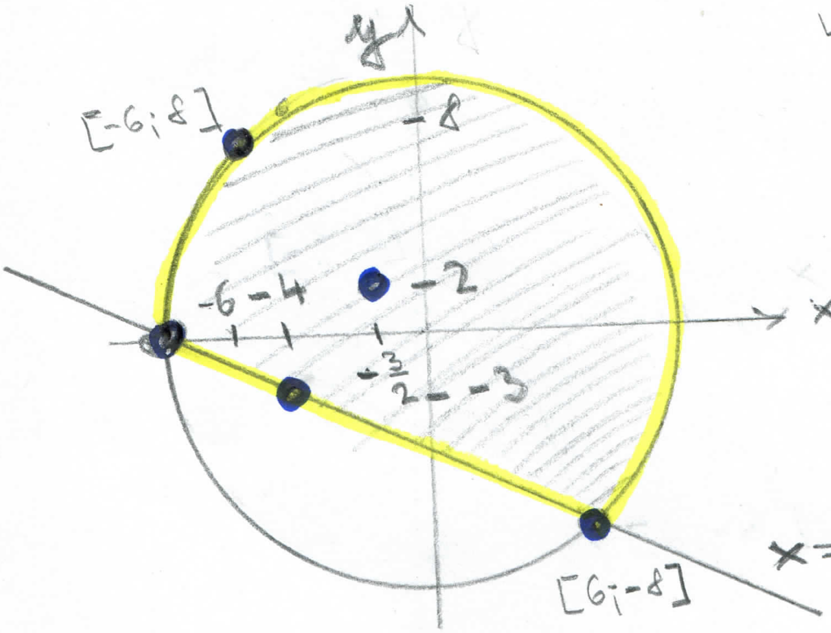
$4y^2 + 40y + 100 + y^2 = 100$

$5y^2 + 40y = 0$

$5y \cdot (y + 8) = 0$

$y = 0 \vee y = -8$

$x = -10 \quad x = 6$



Volné extrémy: $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 3 = 0 \iff \boxed{x = -\frac{3}{2}}$

$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y - 4 = 0 \iff \boxed{y = 2}$

Vázané extrémy: 1) $x = -2y - 10 ; y \in (-8, 0)$

$g(y) := f(-2y - 10 ; y) =$

$= (-2y-10)^2 + y^2 + 3(-2y - 10) - 4y$

$g'(y) = (-2) \cdot 2(-2y - 10) + 2y - 10$

$= 8y + 40 + 2y - 10 = 10y + 30$

$g'(y) = 0 \iff \boxed{y = -3} \boxed{x = -4}$

2) $x^2+y^2=100 \iff \underbrace{x^2+y^2-100}_{=:g(x,y)}=0$

Metoda Jakobiánu:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x+3 & 2y-4 \\ 2x & 2y \end{vmatrix} =$$

$$= (2x+3)\cdot 2y - 2x\cdot(2y-4)$$

$$= 4xy + 6y - 4xy + 8x = 6y + 8x = 0$$

$$\iff \boxed{y = -\frac{4}{3}x}$$

dosazením do $g(x,y)=0$

$$x^2 + \left(-\frac{4}{3}x\right)^2 = 100$$

$$x^2 + \frac{16}{9}x^2 = 100$$

$$\frac{25}{9}x^2 = 100$$

$$x^2 = 36$$

$$x = \pm 6$$

$$y = \mp 8$$

kandidáti: $[6;-8]$, $[-6;8]$, $[-10;0]$, $[-4;-3]$, $[-\frac{3}{2};2]$

$f(6,-8) = 36+64+18+32 = \underline{\underline{150}}$ MAXIMUM

$f(-6,8) = 36+64-18-32 = 50$

$f(-10,0) = 100-30 = 70$

$f(-4,-3) = 16+9-12+12 = 25$

$f(-\frac{3}{2},2) = \frac{9}{4}+4-\frac{9}{2}-8 = \underline{\underline{-\frac{25}{4}}}$ MINIMUM

(4.) $f(x,y,z) = x^2 + \frac{2}{3}y^3$

$M: x^2+y^2+z^2 = 9 \iff \underbrace{x^2+y^2+z^2-9}_{=g(x,y,z)} = 0$

$L(x,y,z) = f(x,y,z) + \lambda g(x,y,z)$

$= x^2 + \frac{2}{3}y^3 + \lambda\cdot(x^2+y^2+z^2-9)$

$\frac{\partial L}{\partial x} = 2x + 2\lambda x = 0 \iff 2x(1+\lambda) = 0$
$\underline{x=0} \vee \underline{\lambda=-1}$

$\frac{\partial L}{\partial y} = 2y^2 + 2\lambda y = 0 \iff 2y(y+\lambda) = 0$
$\underline{y=0} \vee \underline{\lambda=-y}$

$\frac{\partial L}{\partial z} = 2\lambda z = 0 \iff \underline{\lambda=0} \vee \underline{z=0}$

I. $\underline{\lambda=-1}$: $2y^2 - 2y = 0$

$2y(y-1) = 0$

$\underline{z=0}$ $\quad \underline{y=0} \vee \underline{y=1}$

$\underline{z=0, y=0}$: $x^2+0^2+0^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$

$\underline{z=0, y=1}$: $x^2+1^2+0^2 = 9 \Rightarrow x = \pm\sqrt{8}$

II. $\underline{\lambda=0}$: $x=0, y=0, z=\pm 3$

III. $\underline{\lambda=-y}$: $\underline{y=1}$ $\vee$ $\underline{x=0}$

$z=0$ $\quad z=0 \vee y=0$

$x=\pm\sqrt{8}$ $\quad y=\pm 3 \quad z=\pm 3$

Kandidáti: $[\pm 3; 0; 0]$, $[\pm\sqrt{8}; 1; 0]$, $[0; 0; \pm 3]$

$[0; \pm 3; 0]$

$f(\pm 3, 0, 0) = 9$

$f(\pm\sqrt{8}, 1, 0) = 8 + \frac{2}{3} = \frac{26}{3}$

$f(0, 3, 0) = 18$ – maximum

$f(0, -3, 0) = -18$ – minimum

$f(0, 0, \pm 3) = 0$