SOUBOR MODELOVÝCH ÚLOH
K PŘIJÍMACÍ ZKOUŠCE Z MATEMATIKY

UNIVERZITA KARLOVA V PRAZE
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA

SOUBOR MODELOVÝCH ÚLOH K PŘIJÍMACÍ ZKOUŠCE Z MATEMATIKY

Univerzita Karlova, Přírodovědecká fakulta, 2003

úlohy vybrali a k tisku připravili:
Hana Blíziková, Václav Kotvalt, Eduard Stehlík, Milan Štědrý, Jarmila Zocová

dále spolupracovali:
Jana Adášková, Josef Bartoň, Jana Forstová, Josef Ježek, Jiří Makovička, Hana Pavlovičová

Úvod

Publikace je určena zájemcům o studium na Přírodovědecké fakultě Univerzity Karlovy v Praze, a to zvláště těch oborů, které vyžadují absolvování přijímací zkoušky z matematiky. Podává přehled typů úloh jednotlivých okruhů středoškolské látky, které se v přijímacích testech vyskytují a na které pak dále navazuje i samotná výuka matematiky v prvních ročnících studia.

Sbírka obsahuje jednak úlohy, které mohou být (s nevelkou obměnou) zařazeny v přijímacích testech, v některých partiích (zejména planimetrie nebo stereometrie) pak i úlohy určené k hlubšímu procvičení.

Až na několik málo výjimek lze uváděné příklady řešit bez použití kalkulátorů.

V následujícím textu N, Z a R značí postupně množinu všech přirozených (tj. kladných celých), celých a reálných čísel.

Funkci třetí, pátou, sedmou atd. odmocninu uvažujeme s definičním oborem rovným celému R.

Symbolem log resp. ln označujeme dekadický resp. přirozený logaritmus.

Symbolem i rozumíme imaginární jednotku. Absolutní hodnotu reálného či komplexního čísla z značíme $|z|$, komplexně sdružené číslo k číslu z pak $\bar{z}$.

1.1 Úpravy algebraických výrazů

1. Nalezněte všechny dvojice přirozených čísel a, b, pro které platí vztah:

a) $2a + 3b = 25$;

b) $5a + 7b^2 = 800$;

c) $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{2}$;

d) $a^2 - b^2 = 15$.

2. Určete, pro která čísla a má rovnice $\dfrac{2x-3}{1-x} = a$ řešení v oboru:

a) reálných čísel ;

b) celých čísel .

3. Najděte podmínky existence výrazu a výraz zjednodušte:

a) $\dfrac{a-2b}{a+b} - \dfrac{2a-b}{b-a} - \dfrac{2a^2}{a^2-b^2}$;

b) $\dfrac{1}{a-1} + \dfrac{a-1}{a+1} - \dfrac{2a}{a^2-1} - 1$;

c) $\left[x + y - \dfrac{4xy}{x+y}\right] : \dfrac{1}{x^2-y^2}$;

d) $\left[\dfrac{x^2}{x-y} - x\right] \cdot \left[\dfrac{x}{y^2} - \dfrac{1}{x}\right]$;

e) $\left[\dfrac{1}{z+1} - \dfrac{2z}{z^2-1}\right] \cdot \left[\dfrac{1}{z} - 1\right]$;

f) $\left[\dfrac{m+1}{m+2} - \dfrac{m-1}{m-2}\right] \cdot \dfrac{m^2-4}{2m}$;

g) $\dfrac{a^2-2ab+b^2}{b+2} : \dfrac{a^2-b^2}{b^2+4b+4}$;

h) $\dfrac{2a-1}{2a} - \dfrac{2a}{2a-1} - \dfrac{1}{2a-4a^2}$;

i) $\left[\dfrac{3}{1+s} - 1\right] \cdot \left[\dfrac{3}{2-s} - 1\right]$;

j) $\left[a - \dfrac{a}{a+1}\right] \cdot \left[1 - \dfrac{1}{a^2}\right]$;

k) $\left[y + 1 + \dfrac{1}{2y-1}\right] \cdot \left[y - 1 + \dfrac{1}{2y+1}\right]$.

Výsledky.
1. a) $[11,1],[8,3],[5,5],[2,7]$; **b)** $[125,5],[20,10]$; **c)** $[3,6],[4,4],[6,3]$; **d)** $[4,1],[8,7]$. **2. a)** $a \neq -2$; **b)** $a = -2 \pm 1/n$, $n \in \mathsf{N}$.
3. a) $(a-b)/(a+b)$, $a \neq \pm b$; **b)** $-3/(a+1)$, $a \neq \pm 1$; **c)** $(x-y)^3$, $x \neq \pm y$; **d)** $(x+y)/y$, $x \neq y$, $x, y \neq 0$; **e)** $1/z$, $z \neq 0$, $z \neq \pm 1$; **f)** -1, $m \neq 0$, $m \neq \pm 2$; **g)** $(b+2)(a-b)/(a+b)$, $a \neq \pm b$, $b \neq -2$; **h)** $-1/a$, $a \neq 0$, $a \neq 1/2$; **i)** 1, $s \neq 2$, $s \neq -1$; **j)** $a-1$, $a \neq 0$, $a \neq -1$; **k)** y^2, $y \neq \pm 1/2$.

4. Najděte podmínky existence výrazu a výraz zjednodušte:

a) $$\frac{1}{4u-2v} + \frac{1}{6u+3v} + \frac{2u}{v^2-4u^2}\ ;$$

b) $$\frac{a+b}{a} - \frac{a}{a-b} + \frac{b^2}{a^2-ab}\ ;$$

c) $$\frac{3a^2+3ab+3b^2}{4a+4b} \cdot \frac{2a^2-2b^2}{9a^3-9b^3}\ ;$$

d) $$\left(2 - \frac{4a}{a-2}\right) \cdot \left(1 - \frac{a+1}{a+2}\right)\ ;$$

e) $$\left(\frac{1-a}{1+a} - 3\right) \cdot \left(\frac{-2a}{1+2a} + 1\right)\ ;$$

f) $$a \cdot \left(1 + \frac{a}{1-a}\right) \cdot \frac{1-a^2}{1+b} \cdot \frac{1-b^2}{a-a^2}\ ;$$

g) $$\left(\frac{a}{a-1} - \frac{a+1}{a}\right) : \left(\frac{a}{a+1} - \frac{a-1}{a}\right)\ ;$$

h) $$\left(\frac{1}{1-a} - 1\right) : \left(a - \frac{1-2a^2}{1-a} + 1\right)\ ;$$

i) $$\frac{x^2 + \frac{1}{x}}{x + \frac{1}{x} - 1}\ ;$$

j) $$\frac{1 - \frac{2y}{x} + \frac{y^2}{x^2}}{x-y}\ ;$$

k) $\dfrac{\dfrac{1+x}{1-x}-\dfrac{1-x}{1+x}}{\dfrac{1+x}{1-x}-1}$; **l)** $\dfrac{\dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}}{\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}+2}$.

Výsledky.

4. a) $-(1/6)/(2u+v)$, $v \neq \pm 2u$; **b)** 0, $a \neq b$, $a \neq 0$; **c)** $1/6$, $a \neq \pm b$; **d)** $2/(2-a)$, $a \neq \pm 2$; **e)** $-2/(1+a)$, $a \neq -1$, $a \neq -1/2$; **f)** $(1+a)(1-b)/(1-a)$, $a \neq 0$, $a \neq 1$, $b \neq -1$; **g)** $(a+1)/(a-1)$, $a \neq 0$, $a \neq \pm 1$; **h)** $1/a$, $a \neq 0$, $a \neq 1$; **i)** $x+1$, $x \neq 0$; **j)** $(x-y)/x^2$, $x \neq y$, $x \neq 0$; **k)** $2/(1+x)$, $x \neq 0$, $x \neq \pm 1$; **l)** $(x-y)/(x+y)$, $x \neq -y$, $x, y \neq 0$.

5. Najděte podmínky existence výrazu a výraz zjednodušte:

a) $\dfrac{\dfrac{r+s}{r-s}-\dfrac{r-s}{r+s}}{1-\dfrac{r^2+s^2}{r^2-s^2}}$; **b)** $\dfrac{p+q-\dfrac{4pq}{p+q}}{\dfrac{1}{p+q}+\dfrac{1}{p-q}}$;

c) $\dfrac{\dfrac{1-x}{1-x+x^2}+\dfrac{1+x}{1+x+x^2}}{\dfrac{1+x}{1+x+x^2}-\dfrac{1-x}{1-x+x^2}}$; **d)** $\dfrac{\dfrac{p+q}{p-q}-\dfrac{p-q}{p+q}}{\dfrac{p^2q^2}{p^2-q^2}}$;

e) $\dfrac{2-\dfrac{k^2+z^2}{kz}}{\dfrac{k}{z^2}-\dfrac{2}{z}+\dfrac{1}{k}}$; **f)** $\dfrac{\dfrac{a^2}{b^2}-\dfrac{a}{b}}{\dfrac{a^2+b^2}{ab}-2} : \dfrac{a^2}{b}$;

g) $\dfrac{a^2+2a}{a+1} : \dfrac{a^2-4}{2a^2-2a-4}$; **h)** $\dfrac{a^2-a}{2a-6} : \dfrac{a^2+2a-3}{a^2-9}$;

i) $\left(\dfrac{2x^2-4x+2}{x^2+1} : \dfrac{6x-6}{x^4-1}\right) : \dfrac{x+1}{3}$;

j) $$\left(\frac{1}{t^2+3t+2}+\frac{2t}{t^2+4t+3}+\frac{1}{t^2+5t+6}\right)^2\cdot\ \frac{(t-3)^2+12t}{2}\ ;$$

k) $$\left(\frac{1}{t^2-3t+2}-\frac{2t}{t^2-4t+3}+\frac{1}{t^2-5t+6}\right)^2\cdot\ \frac{(t+3)^2-12t}{2}\ .$$

Výsledky.
5. a) $-2r/s$, $r\neq\pm s$, $s\neq 0$; **b)** $(p-q)^3/(2p)$, $p\neq\pm q$, $p\neq 0$; **c)** $1/x^3$, $x\neq 0$; **d)** $4/(pq)$, $p\neq\pm q$, $p,q\neq 0$; **e)** $-z$, $k\neq z$, $k,z\neq 0$; **f)** $1/(a-b)$, $a\neq b$, $a,b\neq 0$; **g)** $2a$, $a\neq -1$, $a\neq\pm 2$; **h)** $a/2$, $a\neq 1$, $a\neq\pm 3$; **i)** $(x-1)^2$, $x\neq\pm 1$; **j)** 2, $t\neq -1$, $t\neq -2$, $t\neq -3$; **k)** 2, $t\neq 1$, $t\neq 2$, $t\neq 3$.

6. Najděte podmínky existence výrazu a výraz zjednodušte:

a) $$\left(\frac{a+3b}{(a-b)^2}+\frac{a-3b}{a^2-b^2}\right):\frac{a^2+3b^2}{(a-b)^2}\ ;$$

b) $$\frac{x^3+y^3}{x+y}:\left(x^2-y^2\right)+\frac{2y}{x+y}-\frac{xy}{x^2-y^2}\ ;$$

c) $$\left(\frac{a}{a^2-4}-\frac{8}{a^2+2a}\right)\cdot\frac{a^2-2a}{4-a}+\frac{a+8}{a+2}\ ;$$

d) $$a-\left(\frac{(16-a)a}{a^2-4}+\frac{3+2a}{2-a}+\frac{3a-2}{a+2}\right):\frac{a-1}{a(a^2+4a+4)}\ ;$$

e) $$\left(6a^2+5a-1+\frac{a+4}{a+1}\right):\left(3a-2+\frac{3}{a+1}\right)\ ;$$

f) $$(a+b-c)(a+b)+(a-b+c)(a+c)+(-a+b+c)(b+c)\ ;$$

g) $$(ax+b)^2(bx+a)^2-(ax-b)^2(bx-a)^2-4abx(a^2+b^2)(1+x^2)\ ;$$

h) $(a-b)(1+bc)(1+ca)+(b-c)(1+ca)(1+ab)+(c-a)(1+ab)(1+bc)-$
$-(a-b)(b-c)(c-a)$;

i) $\dfrac{x^2-7x+10}{2x^2-13x+15}$; **j)** $\dfrac{3x^2-11x+6}{3x^2-17x+10}$;

k) $\dfrac{4y^2+4xy-3x^2}{3x^2-8xy+4y^2}$; **l)** $\dfrac{5y^2-8xy-4x^2}{4x^2-12xy+5y^2}$.

7. Určete konstanty α, β tak, aby polynom p byl beze zbytku dělitelný polynomem q:

a) $p(x)=x^3-2x^2-5x+\alpha\,,\quad q(x)=x^2-x-\beta$;

b) $p(x)=x^3+2x^2-3x+\alpha\,,\quad q(x)=x^2+x-\beta$.

Výsledky.
6. a) $2/(a+b)$, $a\neq\pm b$; **b)** 1, $x\neq\pm y$; **c)** $12/(a+2)$, $a\neq 0$, $a\neq 4$, $a\neq\pm 2$; **d)** $3a/(1-a)$, $a\neq 0$, $a\neq 1$, $a\neq\pm 2$; **e)** $2a+3$, $a\neq -1$; **f)** $2(a^2+b^2+c^2)$, $a,b,c\in\mathsf{R}$; **g)** 0, $a,b,c,x\in\mathsf{R}$; **h)** 0, $a,b,c\in\mathsf{R}$; **i)** $(x-2)/(2x-3)$, $x\neq 5$, $x\neq 3/2$; **j)** $(x-3)/(x-5)$, $x\neq 5$, $x\neq 2/3$; **k)** $(2y+3x)/(2y-3x)$, $y\neq x/2$, $y\neq 3x/2$; **l)** $(5y+2x)/(5y-2x)$, $y\neq 2x$, $y\neq 2x/5$. **7. a)** $\alpha=\beta=6$; **b)** $\alpha=-\beta=-4$.

8. Najděte podmínky existence výrazu a výraz zjednodušte:

a) $\dfrac{r+1}{r^2-2r}+\dfrac{r+1}{r^2+2r}-\dfrac{2r}{r^2-4}$; **b)** $\left[\left(\dfrac{n+2}{n-2}\right)^3 : \dfrac{n^3+4n^2+4n}{3n^2-12n+12}\right]\cdot\dfrac{n}{3}$;

c) $\dfrac{a^2-x^2}{a+b}\cdot\dfrac{a^2-b^2}{ax+x^2}\cdot\left[a+\dfrac{ax}{a-x}\right]$; **d)** $\dfrac{\left(\dfrac{a+b}{a-b}\right)\left(\dfrac{a-b}{a+b}\right)}{1-\dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}}\cdot\dfrac{2-\dfrac{1+b^2}{b}}{\dfrac{1}{b^2}-\dfrac{2}{b}+1}$;

e) $\dfrac{a^4-b^4}{a^2b^2} : \left[\left(1+\dfrac{b^2}{a^2}\right)\cdot\left(1-\dfrac{2a}{b}+\dfrac{a^2}{b^2}\right)\right]$;

f) $\left[\left(xy+\dfrac{1}{xy}\right)\cdot x-\dfrac{1}{y}\right]\cdot\left[(y-2)\cdot\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{xy}\right]$;

g) $\dfrac{1}{m(abm+a+b)}-\left(a+\dfrac{1}{m}\right):\left(a+\dfrac{b}{mb+1}\right)$;

h) $\left[\left(\dfrac{r}{s}-\dfrac{s}{r}\right):(r+s)-r\cdot\left(\dfrac{1}{r}-\dfrac{1}{s}\right)\right]:\dfrac{1+r}{s}$;

i) $\dfrac{3}{x+y}\cdot\left[\left(\dfrac{3}{x-y}+\dfrac{3x}{x^3-y^3}\cdot\dfrac{x^2+xy+y^2}{x+y}\right):\dfrac{2x+y}{x^2+2xy+y^2}\right]$;

j) $\left(\dfrac{x+3}{x-3}+\dfrac{x-3}{x+3}\right)\cdot\left(\dfrac{x^2+9}{6x}+1\right):\dfrac{x^2+9}{3x}$;

k) $\left(m+n-\dfrac{4mn}{m+n}\right):\left(\dfrac{m}{m+n}-\dfrac{n}{n-m}-\dfrac{2mn}{m^2-n^2}\right)$;

l) $\left(\dfrac{a}{b^2+ab}-\dfrac{2}{a+b}+\dfrac{b}{a^2+ab}\right):\left(\dfrac{b}{a}-2+\dfrac{a}{b}\right)$;

m) $\left[v+\dfrac{u-v}{1+uv}\right]:\left[1-\dfrac{v(u-v)}{1+uv}\right]$; **n)** $\dfrac{x}{x^2+y^2}-\dfrac{y(x-y)^2}{x^4-y^4}$.

Výsledky.
8. a) $2/(r^2-4)$, $r\neq 0$, $r\neq\pm 2$; **b)** $(n+2)/(n-2)$, $n\neq 0$, $n\neq\pm 2$; **c)** $a^2(a-b)/x$, $x\neq\pm a$, $a\neq -b$, $x\neq 0$; **d)** $(a^2-b^2)/(2b)$, $a\neq\pm b$, $b\neq 0$, $b\neq 1$; **e)** $(a+b)/(a-b)$, $a\neq b$, $a,b\neq 0$; **f)** $x(y-1)^2$, $x,y\neq 0$; **g)** -1, $abm+a+b\neq 0$, $mb\neq -1$, $m\neq 0$; **h)** $(r-s)/r$, $s\neq -r$, $s,r\neq 0$, $r\neq -1$; **i)** $9/(x-y)$, $y\neq\pm x$, $y\neq -2x$; **j)** $(x+3)/(x-3)$, $x\neq 0$, $x\neq\pm 3$; **k)** $m-n$, $m\neq\pm n$; **l)** $1/(a+b)$, $a\neq\pm b$, $a,b\neq 0$; **m)** u, $uv\neq -1$; **n)** $1/(x+y)$, $x\neq\pm y$.

9. Najděte podmínky existence výrazu a výraz zjednodušte:

a) $\left(\dfrac{x^3}{y^2} + \dfrac{x^2}{y} + x + y\right) : \left(\dfrac{x^2}{y^2} - \dfrac{y^2}{x^2}\right)$;

b) $\dfrac{a-b}{a^2+b^2} : \dfrac{a^2-b^2}{a^3+ab^2}$;

c) $\dfrac{(x+y)^2}{xy-y^2} : \left[-\dfrac{xy-y^2}{(x-y)^2}\right]$;

d) $\left(\dfrac{a}{a+b} + \dfrac{b}{a-b} + 1\right) : \left(\dfrac{a}{a-b} - \dfrac{b}{a+b} + 1\right)$;

e) $\left(\dfrac{x^2+y^2}{x} + y\right) : \left[\left(\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2}\right) \cdot \dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2}\right]$.

10. Najděte podmínky existence výrazu a výraz zjednodušte:

a) $\left(\dfrac{x-y}{xy} - \dfrac{z-y}{yz} - \dfrac{x+z}{xz}\right)^{-1}$; **b)** $\dfrac{a^2-b^2}{a+b} \cdot \left(\dfrac{a-b}{ab}\right)^{-1}$;

c) $\left(b + \dfrac{a-b}{1+ab}\right) : \left(1 - \left[\dfrac{1+ab}{b(a-b)}\right]^{-1}\right)$;

d) $\left(xy^{-1} - yx^{-1}\right) \cdot \left(xy^{-1} + yx^{-1} - 2\right)^{-1} \cdot \left(1 + yx^{-1}\right)^{-1}$;

e) $\left[(1-x)^{-1} - 1\right] \cdot \left[x + 1 - (1-2x^2)(1-x)^{-1}\right]^{-1}$;

f) $\left(\dfrac{1}{y-1} + 1 - \dfrac{y+1}{y}\right)^{-1}$.

Výsledky.
9. a) $x^2/(x-y)$, $x \neq \pm y$, $x, y \neq 0$; **b)** $a/(a+b)$, $a \neq \pm b$, $a \neq 0$;
c) $-(x+y)^2/y^2$, $x \neq y$, $y \neq 0$; **d)** 1, $a \neq \pm b$, $a \neq 0$; **e)** $xy^2/(x-y)$,
$x \neq y$, $x, y \neq 0$.
10. a) $-x/2$, $x, y, z \neq 0$; **b)** ab, $a \neq \pm b$, $a, b \neq 0$; **c)** a, $a \neq b$, $ab \neq -1$,

$b \neq 0$; **d)** $x/(x-y)$, $x \neq \pm y$, $x, y \neq 0$; **e)** $1/x$, $x \neq 0$, $x \neq 1$; **f)** $y(y-1)$, $y \neq 0$, $y \neq 1$.

1.2 Výrazy s mocninami a odmocninami

1. Spočtěte:

a) $\dfrac{2^{-3} \cdot 2^{-4}}{2^{-5}}$;

b) $\dfrac{5^{-2} \cdot 5^{-3} \cdot 5^{-4} \cdot 5^{9}}{2^{-5}}$;

c) $\dfrac{\sqrt[2]{3}\ \sqrt[3]{3}\ \sqrt[4]{3}}{\sqrt[12]{3}}$;

d) $\dfrac{\sqrt[2]{5}\ \sqrt[3]{5^2}\ \sqrt[4]{5^3}}{\sqrt[12]{5^{11}}}$;

e) $\sqrt{50} - \sqrt{8} + \sqrt{18}$;

f) $3\sqrt{12} - 8\sqrt{27} + 5\sqrt{48}$;

g) $5\sqrt{20} - 3\sqrt{125} + 7\sqrt{45} + \sqrt{180}$;

h) $\left(2\sqrt{3} + \sqrt{5}\right)^2 - 2\sqrt{60} - 17$;

i) $\sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{3}}$;

j) $\dfrac{2}{3-\sqrt{7}}$;

k) $\dfrac{-10}{\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}$;

l) $\dfrac{3-2\sqrt{2}}{3\sqrt{2}-4}$;

m) $1 + \dfrac{1+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$;

n) $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$;

o) $\dfrac{\left(10^{\frac{1}{3}} \cdot 8^{-\frac{1}{2}}\right)^{-3}}{\left(25^{\frac{1}{4}} \cdot 4^{\frac{1}{8}}\right)^{-2}} : \dfrac{\sqrt{2\sqrt[3]{4}}}{\sqrt[3]{2\sqrt[4]{8}}}$;

p) $\sqrt{\dfrac{2+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} - \dfrac{2+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}} \cdot \sqrt{\sqrt{3}-1}$.

Výsledky.
1. a) $1/4$; **b)** 32; **c)** 3; **d)** 5; **e)** $6\sqrt{2}$; **f)** $2\sqrt{3}$; **g)** $22\sqrt{5}$; **h)** 0;
i) 1; **j)** $3+\sqrt{7}$; **k)** $\sqrt{2}+2\sqrt{3}$; **l)** $\sqrt{2}/2$; **m)** $\sqrt{3}$; **n)** 10; **o)** $8\sqrt[4]{8}$;
p) $\sqrt{1+4\sqrt{3}/3}$.

2. Pro $a > 0$ vyjádřete jednou mocninou či odmocninou:

a) $\dfrac{\sqrt[3]{a^2}\,\sqrt[4]{a^3}}{\sqrt[12]{a^{-1}}}$; **b)** $\dfrac{\sqrt{a^{-3}\sqrt{a}}}{\left(\sqrt[4]{a^3}\right)^{-2}}$;

c) $\dfrac{\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}}{\sqrt[8]{a^3}}$; **d)** $\left(\dfrac{\sqrt{a\sqrt[3]{a}}}{\sqrt[3]{a\sqrt{a}}}\right)^{-1}$;

e) $\dfrac{\sqrt{a\sqrt[3]{a}}}{\sqrt[3]{\left(a^{-2}\sqrt{a}\right)^2}}$; **f)** $\sqrt[5]{\left(\dfrac{a^{-1}\sqrt{a}}{\sqrt[3]{a}}\right)^{-3}}$;

g) $\dfrac{\sqrt{a}}{(a^{\sqrt{3}-1})^{\sqrt{3}+1}}\cdot a^{-\frac{3}{2}}$; **h)** $\dfrac{a^{1+\sqrt{2}}\cdot a^{1-\sqrt{2}}}{\sqrt[3]{a}}\cdot a^{\frac{4}{3}}$;

i) $\dfrac{a\cdot\sqrt{a}}{\sqrt[5]{a^4\cdot\sqrt[3]{a^2}}} : \dfrac{a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{-1}}{\sqrt[3]{a}}$.

Výsledky.
2. a) $\sqrt{a^3}$; **b)** $\sqrt[4]{a}$; **c)** $\sqrt{a}$; **d)** $1/\sqrt[6]{a}$; **e)** $a\sqrt[3]{a^2}$; **f)** $\sqrt{a}$; **g)** $1/a^3$; **h)** a^3;
i) $a\sqrt[5]{a^2}$.

3. Najděte podmínky existence výrazu a výraz zjednodušte:

a) $\dfrac{1-a^{-2}}{a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}}+\dfrac{1-a^{-2}}{a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}}$; **b)** $x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}+\dfrac{(1-x)(1-x^{-\frac{1}{2}})}{1+\sqrt{x}}$;

c) $\dfrac{\sqrt{x}+1}{1+x+\sqrt{x}} : \dfrac{1}{x^2-\sqrt{x}}$; **d)** $\dfrac{a-b}{a+b+2\sqrt{ab}} : \dfrac{a^{-\frac{1}{2}}-b^{-\frac{1}{2}}}{a^{-\frac{1}{2}}+b^{-\frac{1}{2}}}$;

e) $\left(\dfrac{3}{\sqrt{1+a}}+\sqrt{1-a}\right) : \left(\dfrac{3}{\sqrt{1-a^2}}+1\right)$;

f) $\left(\dfrac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{ab}\right) : (a-b)+\dfrac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$;

g) $\left(\dfrac{a^{\frac{1}{2}}+2}{a+2a^{\frac{1}{2}}+1}-\dfrac{a^{\frac{1}{2}}-2}{a-1}\right)\cdot\dfrac{a^{\frac{1}{2}}+1}{a^{\frac{1}{2}}}$;

h) $\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^2+\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^{-2}+2(1-2x^2)$;

i) $\dfrac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(a-b)}+\dfrac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\dfrac{\sqrt{ab}}{a-b}$;

j) $\dfrac{x^{\frac{1}{2}}+1}{x+x^{\frac{1}{2}}+1} : \dfrac{1}{x^{\frac{3}{2}}-1}$; **k)** $\dfrac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1-a}}-\dfrac{\sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a}}-\dfrac{4a}{\sqrt{1-a^2}}$.

Výsledky.
3. a) $2/\sqrt{a}$, $a>0$, $a\neq 1$; **b)** 2, $x>0$; **c)** $(x-1)\sqrt{x}$, $x>0$, $x\neq 1$; **d)** -1, $a\neq b$, $a,b>0$; **e)** $\sqrt{1-a}$, $a\in(-1,1)$; **f)** 1, $a\neq b$, $a,b\geq 0$; **g)** $2/(a-1)$, $a>0$, $a\neq 1$; **h)** 0, $x\in(-\infty,-1\rangle\cup\langle 1,+\infty)$; **i)** 1, $a\neq b$, $a,b\geq 0$; **j)** $x-1$, $x\geq 0$, $x\neq 1$; **k)** $-2a/\sqrt{1-a^2}$, $a\in(-1,1)$.

4. Najděte podmínky existence výrazu a výraz zjednodušte:

a) $\left(x^3+y^3\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(x+y\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(x^2-xy+y^2\right)^{-\frac{1}{2}}$;

b) $\left(x(1-x)^{-\frac{2}{3}}+\dfrac{x^2}{(1-x)^{\frac{5}{3}}}\right) : \left((1-x)^{\frac{1}{3}}(1-2x+x^2)^{-1}\right)$;

c) $\dfrac{1-a^{-\frac{1}{2}}}{1+a^{\frac{1}{2}}}-\dfrac{a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}}{a-1}$; **d)** $\dfrac{a-a^{-2}}{a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}}-\dfrac{2}{a^{\frac{3}{2}}}-\dfrac{1-a^{-2}}{a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}}$;

e) $\left(\sqrt{\dfrac{x\sqrt{x}}{y}}:\sqrt[3]{\dfrac{y\sqrt{x}}{x^2}}\right)^{-1}$; **f)** $\left[\left(a^3b\right)^{\frac{1}{3}}\right]^{\frac{1}{2}}:\left[\left(a^3b^{-2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{3}}$;

g) $\dfrac{\left(\sqrt{a^2b}+\sqrt{ab^2}\right)\cdot\left(\sqrt{a^2b}-\sqrt{ab^2}\right)}{a^2-2ab+b^2}$;

h) $\left(\dfrac{\sqrt[4]{a^3}-\sqrt[4]{b^3}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}\right)\cdot\left(\sqrt[4]{\dfrac{a}{b}}+1\right)$;

i) $2x+\sqrt{x^2-1}\cdot\left(1+\dfrac{x^2}{x^2-1}\right)-\dfrac{1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{x+\sqrt{x^2-1}}$;

j) $\dfrac{a+\sqrt{4ab}+b}{a-b}:\left(\sqrt{a^{\frac{1}{2}}-\sqrt[3]{b^{\frac{3}{2}}}}\right)^{-2}$;

k) $\dfrac{\left[(x-y)^{-\frac{3}{5}}\right]^{\frac{4}{3}}+\sqrt[10]{(x-y)^{-8}}}{\sqrt[5]{(x-y)^{-2}}}$.

Výsledky.
4. a) $x+y$, $x\geq -y$, $[x,y]\neq[0,0]$; **b)** x, $x\neq 1$; **c)** $2/(1-a)$, $a>0$, $a\neq 1$; **d)** $\sqrt{a}$, $a>0$, $a\neq 1$; **e)** $\sqrt[12]{y^{10}/x^{15}}$, $x,y>0$; **f)** $\sqrt{b}$, $a,b>0$; **g)** $ab/(a-b)$, $a\neq b$, $a,b\geq 0$; **h)** $-\sqrt[4]{a}$, $a\neq b$, $a\geq 0$, $b>0$; **i)** $2(x+\sqrt{x^2-1})$, $x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$; **j)** $\sqrt{a}+\sqrt{b}$, $a>b\geq 0$; **k)** $2/\sqrt[5]{(x-y)^2}$, $x\neq y$.

5. Najděte podmínky existence výrazu a výraz zjednodušte:

a) $\dfrac{m-n}{\sqrt{m}-\sqrt{n}}-\dfrac{m\sqrt{m}-n\sqrt{n}}{m-n}$; **b)** $\sqrt{a\sqrt[3]{b^{-1}}}:\sqrt[3]{b^2\sqrt{a}}+\sqrt[6]{b}:b$;

c) $\left(\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}+4\sqrt{x}-\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\right)$;

d) $\sqrt{x\sqrt[3]{x^2}}+4\sqrt[3]{x\sqrt{x}}-2x\sqrt[3]{\dfrac{1}{\sqrt{x}}}+3x\sqrt{x^{-\frac{1}{3}}}$;

e) $\dfrac{\dfrac{a^2+1}{a}}{\sqrt{\left(\dfrac{a^2-1}{2a}\right)^2+1}}$; **f)** $\dfrac{\sqrt{2a}-\dfrac{2a}{a+\sqrt{2a}}}{\dfrac{\sqrt{2a}-2}{a-2}}$.

6. Napište výraz, který se získá odstraněním odmocniny ze jmenovatele:

a) $\dfrac{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}}$; **b)** $\dfrac{\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}}$;

c) $\dfrac{2-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}+\dfrac{2-3\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}-2\cdot\dfrac{1-2\sqrt{x}}{1-x}$.

Výsledky.
5. a) $\sqrt{mn}/(\sqrt{m}+\sqrt{n})$, $m\neq n$, $m,n\geq 0$; **b)** $(1+\sqrt[3]{a})/\sqrt[6]{b^5}$, $a,b>0$; **c)** $4x$, $x>0$, $x\neq 1$; **d)** $2\sqrt{x}(\sqrt[3]{x}+2)$, $x>0$; **e)** 2 pro $a>0$, -2 pro $a<0$; **f)** a, $a>0$, $a\neq 2$. **6. a)** $-x-\sqrt{x^2-1}$, $x\geq 1$; **b)** 0 pro $x>0$ a $y=0$, $(x-\sqrt{x^2-y^2})/y$ pro $x\geq |y|>0$; **c)** 2, $x\geq 0$, $x\neq 1$.

1.3 Goniometrické výrazy

1. Určete podmínky existence výrazu a výraz upravte:

a) $\dfrac{\cos^2 x}{1-\sin x}$; **b)** $\dfrac{\sin^2 x}{1+\cos x}$;

c) $\dfrac{\sin x}{1+\cos x}+\dfrac{1+\cos x}{\sin x}$; **d)** $\dfrac{\sin x}{1-\cos x}-\dfrac{\sin x}{1+\cos x}$;

e) $\dfrac{1}{1+\sin x}+\dfrac{1}{1-\sin x}$; **f)** $\dfrac{\sin x-\sin^3 x}{\cos x-\cos^3 x}$;

g) $\dfrac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\sin x\cos x}$; **h)** $\dfrac{1-4\sin^2 x\cos^2 x}{\cos^2 x-\sin^2 x}$;

i) $\dfrac{\sin 2x}{1-\cos 2x}$; **j)** $\dfrac{\sin 2x}{1-\sin x}+\dfrac{\sin 2x}{1+\sin x}$;

k) $\sin^4 x+\cos^4 x+\frac{1}{2}\sin^2 2x$; **l)** $\cos^4 x-\sin^4 x-\cos 2x$;

m) $4\cos^4 x-2\cos 2x-\frac{1}{2}\cos 4x$; **n)** $\sin^6 x+\cos^6 x+3\sin^2 x\cos^2 x$.

Výsledky.
1. a) $1+\sin x$, $x\neq\pi/2+2k\pi$, $k\in\mathsf{Z}$; **b)** $1-\cos x$, $x\neq\pi+2k\pi$, $k\in\mathsf{Z}$; **c)** $2/\sin x$, $x\neq k\pi$, $k\in\mathsf{Z}$; **d)** $2\operatorname{cotg} x$, $x\neq k\pi$, $k\in\mathsf{Z}$; **e)** $2/\cos^2 x$, $x\neq\pi/2+k\pi$, $k\in\mathsf{Z}$; **f)** $\operatorname{cotg} x$, $x\neq k\pi/2$, $k\in\mathsf{Z}$; **g)** $2\operatorname{cotg} 2x$, $x\neq k\pi/2$, $k\in\mathsf{Z}$; **h)** $\cos 2x$, $x\neq\pi/4+k\pi/2$, $k\in\mathsf{Z}$; **i)** $\operatorname{cotg} x$, $x\neq k\pi$, $k\in\mathsf{Z}$; **j)** $4\operatorname{tg} x$, $x\neq\pi/2+k\pi$, $k\in\mathsf{Z}$; **k)** 1, $x\in\mathsf{R}$; **l)** 0, $x\in\mathsf{R}$; **m)** $3/2$, $x\in\mathsf{R}$; **n)** 1, $x\in\mathsf{R}$.

2. Určete podmínky existence výrazu a výraz upravte:

a) $\dfrac{\cos x\cdot\operatorname{tg} x}{\sin^2 x}-\operatorname{cotg} x\cdot\cos x$; **b)** $\operatorname{tg} x\cdot\dfrac{\sin 2x}{1-\cos 2x}$;

c) $\dfrac{2\operatorname{cotg} x}{1+\operatorname{cotg}^2 x}$; **d)** $\dfrac{2\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x}$;

e) $\left(\dfrac{2\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x}\right)^2+(\cos^2 x-\sin^2 x)^2$;

f) $\dfrac{1+\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{cotg}^2 x}$; **g)** $\dfrac{2\operatorname{cotg}\frac{x}{2}\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}-\cos^2\frac{x}{2}}$;

h) $(1+\sin x)\cdot\operatorname{tg}^2 x\cdot(1-\sin x)$; **i)** $\dfrac{\sin^2 x}{1-\sin^2 x}\cdot\operatorname{cotg}^2 x$;

j) $(\operatorname{cotg} x+\operatorname{tg} x)\cdot\sin 2x$; **k)** $\dfrac{\operatorname{cotg}^2 x+1}{\operatorname{cotg}^2 x}\cdot\dfrac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}$.

3. Úpravou levé strany zjistěte hodnotu reálného čísla b:

$$\frac{\sin 2x}{1+\cos 2x}+\frac{1-\cos 2x}{\sin 2x}=b\cdot\frac{1}{\operatorname{cotg} x}\ .$$

Výsledky.
2. a) $\sin x$, $x\neq k\pi/2$, $k\in\mathsf{Z}$; **b)** 1, $x\neq k\pi/2$, $k\in\mathsf{Z}$; **c)** $\sin 2x$, $x\neq k\pi$, $k\in\mathsf{Z}$; **d)** $\sin 2x$, $x\neq\pi/2+k\pi$, $k\in\mathsf{Z}$; **e)** 1, $x\neq\pi/2+k\pi$, $k\in\mathsf{Z}$; **f)** $\operatorname{tg}^2 x$, $x\neq k\pi/2$, $k\in\mathsf{Z}$; **g)** $-\operatorname{tg} x$, $x\neq\pi/2+k\pi$, $x\neq 2k\pi$, $k\in\mathsf{Z}$; **h)** $\sin^2 x$, $x\neq\pi/2+k\pi$, $k\in\mathsf{Z}$; **i)** 1, $x\neq k\pi/2$, $k\in\mathsf{Z}$; **j)** 2, $x\neq k\pi/2$, $k\in\mathsf{Z}$; **k)** $\operatorname{tg}^2 x$, $x\neq k\pi/2$, $k\in\mathsf{Z}$. **3.** 2, $x\neq k\pi/2$, $k\in\mathsf{Z}$.

4. Dokažte správnost vztahu a uveďte podmínky jeho platnosti:

a) $\sin 4x+\cos 4x\cdot\operatorname{cotg} 2x=\dfrac{1-\operatorname{tg}^2 x}{2\operatorname{tg} x}$;

b) $\dfrac{\cos 2x}{\operatorname{cotg}^2 x-\operatorname{tg}^2 x}=\dfrac{1}{4}\sin^2 2x$; **c)** $\dfrac{\operatorname{tg} 2x\cdot\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 2x-\operatorname{tg} x}=\sin 2x$;

d) $\dfrac{1-\operatorname{tg}^2 x}{\cos 2x}=\dfrac{1}{\cos^2 x}$; **e)** $\dfrac{1-\cos 2x}{\sin 2x}+\dfrac{\sin 2x}{1+\cos 2x}=2\operatorname{tg} x$;

f) $\left(\dfrac{\sin^2 x+1}{\sin x}\right)^2+\left(\dfrac{\cos^2 x+1}{\cos x}\right)^2=\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{cotg}^2 x+7$.

5. Vypočítejte $\cos\alpha$, jestliže:

a) $\sin\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$; **b)** $\cos\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

6. Vyjádřete jako lineární kombinaci funkcí $\cos x$ a $\sin x$ (tj. ve formě $\alpha\cos x + \beta\sin x$, kde α a β jsou vhodné konstanty) a najděte všechna x, pro která má toto vyjádření smysl:

a) $\dfrac{\cos x}{1-\operatorname{tg} x} + \dfrac{\sin x}{1-\operatorname{cotg} x}$; **b)** $\dfrac{\cos x}{1+\operatorname{tg} x} - \dfrac{\sin x}{1+\operatorname{cotg} x}$;

c) $\sin(\frac{1}{6}\pi - x) + \sin(\frac{1}{6}\pi + x)$; **d)** $\cos(\frac{1}{6}\pi - x) - \cos(\frac{1}{6}\pi + x)$.

7. Je dáno $\operatorname{tg} x = 3$. Určete hodnotu funkce $\cos 2x$, aniž počítáte hodnotu argumentu $x \in \mathsf{R}$.

8. Je dáno $\operatorname{cotg} x = 2$. Určete hodnotu funkce $\sin 2x$, aniž počítáte hodnotu argumentu $x \in \mathsf{R}$.

9. Vypočtěte hodnotu výrazu $\dfrac{3\sin x + \cos x}{\cos x - 3\sin x}$, jestliže $\operatorname{tg} x = -7$.

10. Pro úhel α platí $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$ a $|\operatorname{tg}\alpha| = \frac{1}{3}\sqrt{7}$. Vypočtěte hodnotu $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{cotg}\alpha$.

Výsledky.
4. a) $x \neq k\pi/2$, $k \in \mathsf{Z}$; **b)** $x \neq k\pi/4$, $k \in \mathsf{Z}$; **c)** $x \neq k\pi/4$, $k \in \mathsf{Z}$; **d)** $x \neq \pi/4 + k\pi/2$, $x \neq \pi/2 + k\pi$, $k \in \mathsf{Z}$; **e)** $x \neq k\pi/2$, $k \in \mathsf{Z}$; **f)** $x \neq k\pi/2$, $k \in \mathsf{Z}$. **5. a)** $\sqrt{3}/2$; **b)** $\sqrt{3}/2$. **6. a)** $\cos x + \sin x$, $x \neq \pi/4 + k\pi$, $x \neq k\pi/2$, $k \in \mathsf{Z}$; **b)** $\cos x - \sin x$, $x \neq -\pi/4 + k\pi$, $x \neq k\pi/2$, $k \in \mathsf{Z}$; **c)** $\cos x$, $x \in \mathsf{R}$; **d)** $\sin x$, $x \in \mathsf{R}$. **7.** $-4/5$. **8.** $4/5$. **9.** $-10/11$. **10.** $-\sqrt{7}/4$, $-3/4$, $\sqrt{7}/3$, $3\sqrt{7}/7$.

2.1 Lineární rovnice a nerovnice

1. V oboru reálných čísel řešte rovnici:

a) $(2x-1)^2-(x-1)^3=10x^2-(x+1)^3-1$;

b) $(x+1)^3-(x-1)^3=6(x^2+x+1)$;

c) $\dfrac{2x}{x-1}=1+\dfrac{2}{x-1}$; **d)** $\dfrac{\frac{1}{2}x-2}{x-1}+\dfrac{\frac{1}{2}x+2}{x+1}=1$;

e) $\dfrac{5x+1}{6}-\dfrac{7x-3}{8}=1-\dfrac{3x-1}{4}$;

f) $x+\dfrac{3-7x}{5}=\dfrac{x+3}{5}-\dfrac{2x-1}{3}$.

2. V R řešte rovnici s reálným parametrem a:

a) $\dfrac{x^2}{x^2-a^2}-\dfrac{x+a}{x-a}+\dfrac{a}{x+a}=0$;

b) $\dfrac{1-x}{1-a}-\dfrac{1+x}{1+a}+\dfrac{1-x}{1+2a+a^2}=0$.

3. Pro která reálná čísla $a\neq 1$ má rovnice $1+\dfrac{a^2-1}{x}=a$ záporný kořen?

4. Určete, pro která reálná čísla a má soustava rovnic

$$\begin{aligned} 3x+7y &= a \ , \\ 2x+5y &= 20 \end{aligned}$$

řešení, jehož složky jsou kladná čísla.

Výsledky.

1. a) 1; **b)** $-2/3$; **c)** nemá řešení; **d)** nemá řešení; **e)** 1; **f)** 5.

2. a) $a=0$: rovnice splněna pro každé $x\neq 0$; $a\neq 0$: jediné řešení

$x = -2a$; **b)** $a = -3$: rovnice nemá řešení; $a \neq -3$, $a \neq \pm 1$: jediné řešení $x = (1 + a + 2a^2)/(3 + a)$. **3.** $a < -1$. **4.** $a \in (28, 30)$.

5. Najděte všechna záporná celá čísla y, která splňují nerovnici:

a) $4(y + 2) + 3(y + 1) - 7y > 0$;

b) $6y + 1 > 2(y - 5) - 1$; **c)** $\dfrac{y}{2} + 4 > \dfrac{10 - y}{2} + 1$.

6. Na uvedené množině řešte nerovnici:

a) $\dfrac{2x - 1}{5} - \dfrac{3 - 2x}{4} < 3 - \dfrac{x - 1}{2}$, na množině přirozených čísel;

b) $\dfrac{4x - 3}{5} < \dfrac{3x - 4}{2} - \dfrac{2x - 5}{3}$, na intervalu $(-10, 10)$;

c) $\dfrac{7x - 1}{3} + 6 > 5x - \dfrac{5 + 3x}{2}$, na množině všech prvočísel.

7. Určete všechna reálná čísla x vyhovující nerovnici:

a) $\dfrac{7x - 5}{3} < 4 - \dfrac{x + 3}{2}$; **b)** $\dfrac{x - 3}{2} - \dfrac{x - 2}{3} > \dfrac{x}{2} - \dfrac{x - 5}{3}$;

c) $x - \dfrac{5x - 3}{8} < \dfrac{3x + 5}{8}$; **d)** $\dfrac{3 - 2x}{5} + 8 > \dfrac{5x + 2}{2} - x$.

Výsledky.
5. a) všechna záporná celá čísla; **b)** -1, -2; **c)** nemá řešení. **6. a)** 1, 2, 3; **b)** $(-8, 10)$; **c)** 2, 3, 5. **7. a)** $(-\infty, 25/17)$; **b)** nemá řešení; **c)** $(-\infty, +\infty)$; **d)** $(-\infty, 4)$.

8. Určete všechna reálná čísla x vyhovující nerovnici:

a) $\dfrac{3-2x}{2x-5} > 0$; **b)** $\dfrac{3x-7}{3-2x} > 0$;

c) $\dfrac{x+1}{x+2} > 1$; **d)** $\dfrac{x}{2x-1} < 3$;

e) $\dfrac{1-3x}{x+4} < 2$; **f)** $\dfrac{x+2}{1-x} \leq -2$;

g) $3 + x > 1 + \dfrac{4}{2-x}$; **h)** $\dfrac{1-2x}{1+2x} \geq 0$;

i) $\dfrac{1}{x} > \dfrac{1}{x+1}$; **j)** $\dfrac{x-3}{x+3} \geq -1$;

k) $\dfrac{x-\sqrt{3}}{2x+\sqrt{2}} < 0$; **l)** $\dfrac{1}{x-4} < \dfrac{4}{x(x-4)}$.

Výsledky.
8. a) $(3/2, 5/2)$; **b)** $(3/2, 7/3)$; **c)** $(-\infty, -2)$; **d)** $(-\infty, 1/2) \cup (3/5, +\infty)$;
e) $(-\infty, -4) \cup (-7/5, +\infty)$; **f)** $(1, 4\rangle$; **g)** $(2, +\infty)$; **h)** $(-1/2, 1/2\rangle$;
i) $(-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$; **j)** $(-\infty, -3) \cup \langle 0, +\infty)$; **k)** $(-\sqrt{2}/2, \sqrt{3})$;
l) $(-\infty, 0)$.

2.2 Kvadratické rovnice a nerovnice

1. Určete, pro které hodnoty reálného parametru p má kvadratická rovnice $x^2 + 3x - 2p^2 + p + 3 = 0$ jeden kořen rovný nule; najděte i druhý kořen.

2. Najděte všechny hodnoty reálného parametru m, pro které má kvadratická rovnice $x^2 + mx + x + 1 = 0$ reálné kořeny.

3. Najděte všechny hodnoty reálného parametru m, pro které má kvadratická rovnice $x^2 - 2(m+4)x + m^2 + 6m = 0$ reálné kořeny.

4. Určete, pro které hodnoty reálného parametru m má kvadratická rovnice $x^2 + 2(m+4)x + m^2 + 6m = 0$ dvojnásobný kořen.

5. Určete, pro které hodnoty reálného parametru p nemá kvadratická rovnice $2x^2 + 3px + 2 = 0$ žádné reálné řešení.

6. Určete, pro které hodnoty reálného parametru m má kvadratická rovnice $3mx^2 + 4mx + 1 = 0$ dvě různá reálná řešení.

7. Určete, pro které hodnoty reálného parametru n má kvadratická rovnice $9x^2 - 6nx + 9n = 0$ jediný kořen.

8. Jakou podmínku musí splňovat reálný parametr p, aby kvadratická rovnice $x^2 - 2x + 3p = 0$ měla alespoň jeden reálný kořen?

9. Určete, pro jaké hodnoty reálného parametru p bude mít kvadratická rovnice $px^2 + 2px + 4 = 0$ imaginární kořeny.

10. Určete, pro které hodnoty reálného parametru m má kvadratická rovnice $x^2 - 4x - m = 0$: a) kořeny reálné různé; b) dvojnásobný reálný kořen; c) kořen $x = 2 - 5\mathrm{i}$.

11. Pro která reálná p bude mít rovnice $9x^2 - 18px - 8p + 16 = 0$ jeden kořen dvakrát větší než druhý?

12. Určete reálný parametr p rovnice $x^2 + px + 12 = 0$ tak, aby hodnota rozdílu jejích kořenů byla rovna jedné.

13. Určete reálné parametry a, b rovnice $x^2 + ax + b = 0$ tak, aby jejími kořeny byly převrácené hodnoty kořenů kvadratické rovnice $3x^2 - 8x + 4 = 0$.

Výsledky.
1. -1, $3/2$; -3. **2.** $(-\infty, -3\rangle \cup \langle 1, +\infty)$. **3.** $\langle -8, +\infty)$. **4.** -8.
5. $(-4/3, 4/3)$. **6.** $(-\infty, 0) \cup (3/4, +\infty)$. **7.** 0, 9. **8.** $p \le 1/3$. **9.** $(0, 4)$.
10. a) $m > -4$; b) $m = -4$; c) $m = -29$. **11.** 1, -2. **12.** ± 7.
13. $a = -2$, $b = 3/4$.

14. V oboru reálných čísel řešte rovnici:

a) $\dfrac{3x}{x+6} - \dfrac{4}{x-1} = 4$; **b)** $\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{9}{4x}$;

c) $\dfrac{x+3}{x-3}+\dfrac{x-1}{x-5}=4$; **d)** $\dfrac{2}{1-x}-\dfrac{7}{x+1}=\dfrac{3}{x}$;

e) $\dfrac{x-2}{x}-\dfrac{4}{x^2-2x}-\dfrac{x}{2-x}=0$;

f) $1+\dfrac{2x}{x+4}+\dfrac{27}{2x^2+7x-4}=\dfrac{6}{2x-1}$;

g) $\dfrac{2x+1}{x-1}-\dfrac{3x+3}{2x-3}=\dfrac{x-4}{2x^2-5x+3}$.

15. V R řešte rovnici s reálným parametrem a:

a) $x^2+4x+a=0$; **b)** $\dfrac{x}{x+a}+\dfrac{2x}{x-a}=\dfrac{5a^2}{4(x^2-a^2)}$.

16. V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic:

a) $\begin{aligned} x^2+y^2&=40 \ , \\ x-3y&=0 \ ; \end{aligned}$ **b)** $\begin{aligned} 2x^2-3y^2&=24 \ , \\ 2x-3y&=0 \ ; \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} x^2+y^2&=25 \ , \\ x^2-y&=5 \ ; \end{aligned}$ **d)** $\begin{aligned} x^2+y^2&=13 \ , \\ x^2-y&=7 \ ; \end{aligned}$

e) $\begin{aligned} x+y^2&=7 \ , \\ xy^2&=12 \ ; \end{aligned}$ **f)** $\begin{aligned} x^2+y^2&=25 \ , \\ xy&=12 \ . \end{aligned}$

Výsledky.
14. a) 0, -27; **b)** ±3; **c)** 4, 9; **d)** $3/4$, $-1/3$; **e)** nemá řešení; **f)** $-1/3$; **g)** 4. **15. a)** $a>4$: rovnice nemá řešení; $a=4$: jeden kořen $x_{1,2}=-2$; $a<4$: dva kořeny $x_{1,2}=-2\pm\sqrt{4-a}$; **b)** $a=0$: rovnice nemá řešení; $a\neq0$: dva kořeny $x_1=-5a/6$, $x_2=a/2$. **16. a)** $[6,2]$, $[-6,-2]$; **b)** $[6,4]$, $[-6,-4]$; **c)** $[0,-5]$, $[\pm3,4]$; **d)** $[\pm3,2]$, $[\pm2,-3]$; **e)** $[3,\pm2]$, $[4,\pm\sqrt{3}]$;

f) $[4,3]$, $[-4,-3]$, $[3,4]$, $[-3,-4]$.

17. V oboru reálných čísel řešte nerovnici:

a) $x^2 - 2x - 8 > 0$; **b)** $x^2 - 4x + 8 < 0$;

c) $x^2 - 3x - 4 > 0$; **d)** $x^2 - 4x - 5 < 0$;

e) $x^2 - 2x + 1 > 0$; **f)** $x^2 + 4x + 4 \leq 0$;

g) $x^2 + 5x - 14 > 0$; **h)** $2x^2 - 2x - 4 \geq 0$;

i) $2x^2 + 3x - 5 \leq 0$; **j)** $3x^2 + 3x + 1 < 0$;

k) $\dfrac{1}{x+1} < \dfrac{1}{3x-2}$; **l)** $\dfrac{3}{x+2} + \dfrac{2}{x-3} \geq 0$;

m) $\dfrac{x-1}{x} - \dfrac{x+1}{x-1} < 2$; **n)** $2 - \dfrac{x-3}{x-2} > \dfrac{x-5}{x-1}$;

o) $4 + \dfrac{9}{x+1} \leq \dfrac{7}{3-x}$; **p)** $5 + \dfrac{4}{x+1} \leq \dfrac{6}{4-x}$.

Výsledky.
17. a) $(-\infty,-2) \cup (4,\infty)$; **b)** nemá řešení; **c)** $(-\infty,-1) \cup (4,\infty)$;
d) $(-1,5)$; **e)** $(-\infty,1) \cup (1,\infty)$; **f)** -2; **g)** $(-\infty,-7) \cup (2,\infty)$;
h) $(-\infty,-1\rangle \cup \langle 2,+\infty)$; **i)** $\langle -5/2, 1\rangle$; **j)** nemá řešení;
k) $(-\infty,-1) \cup (2/3,3/2)$; **l)** $(-2,1\rangle \cup (3,+\infty)$;
m) $(-\infty,-1) \cup (0,1/2) \cup (1,+\infty)$; **n)** $(1,9/5) \cup (2,+\infty)$;
o) $\langle -4,-1) \cup \langle 2,3)$; **p)** $\langle -2,-1) \cup \langle 3,4)$.

18. V oboru reálných čísel řešte nerovnici:

a) $x^2 - 3x - 10 < 0$; **b)** $2(x+2)^2 \leq 3x + 11$;

c) $\dfrac{x^2+2x-3}{x-2} > 0$; **d)** $\dfrac{x^2-x-6}{x+1} > 0$;

e) $\dfrac{x^2-5x+4}{x^2+2x} > 0$; **f)** $\dfrac{x^2-5x+4}{x^2+2x} < 0$;

g) $\dfrac{x^2-8x+15}{x^2-5x+4} \geq 0$; **h)** $\dfrac{x^2-8x+15}{x^2-5x+4} \leq 0$;

i) $\dfrac{2x-3}{x^2+2x} > 1$; **j)** $\dfrac{x^2+5x+4}{x^2-6x+5} \leq 0$;

k) $\dfrac{x^2-4x-5}{x^2-9} \geq 1$; **l)** $\dfrac{x-1}{x} < \dfrac{x-2}{x-1}$;

m) $\dfrac{2x-14}{x-2} + \dfrac{20-x}{x-3} > 0$; **n)** $\dfrac{3x-2}{x-1} - \dfrac{10+2x}{x+4} > 0$;

o) $\dfrac{2x+3}{x+2} + \dfrac{9-x}{x-4} < 0$; **p)** $\dfrac{3x+4}{x+1} - \dfrac{9+2x}{x+3} < 0$.

Výsledky.
18. a) $(-2,5)$; **b)** $\langle -3,1/2\rangle$; **c)** $(-3,1)\cup(2,+\infty)$;
d) $(-2,-1)\cup(3,+\infty)$; **e)** $(-\infty,-2)\cup(0,1)\cup(4,+\infty)$;
f) $(-2,0)\cup(1,4)$; **g)** $(-\infty,1)\cup\langle 3,4)\cup\langle 5,+\infty)$; **h)** $(1,3\rangle\cup(4,5\rangle$;
i) $(-2,0)$; **j)** $\langle -4,-1\rangle\cup(1,5)$; **k)** $(-\infty,-3)\cup\langle 1,3)$; **l)** $(0,1)$;
m) $(-\infty,2)\cup(3,+\infty)$; **n)** $(-\infty,-4)\cup(1,+\infty)$; **o)** $(-2,4)$; **p)** $(-3,-1)$.

19. Určete definiční obor funkce reálné proměnné:

a) $f(x)=\sqrt{x^2-5x-50}$; **b)** $f(x)=\sqrt{4x-4x^2-1}$;

c) $f(x)=\sqrt{5x^2-8x-4}$; **d)** $f(x)=\log(5x^2-8x-4)$;

e) $f(x)=\sqrt{\dfrac{18+9x-2x^2}{4+3x^2}}$; **f)** $f(x)=\sqrt{\dfrac{3x^2+20x-7}{-5x^2-2}}$;

g) $f(x) = \log \dfrac{-2x^2 - 11}{3x^2 + 13x - 10}$; **h)** $f(x) = \log \dfrac{7 + 3x^2}{12 + 5x - 2x^2}$.

Výsledky.
19. a) $(-\infty, -5\rangle \cup \langle 10, +\infty)$; **b)** $\{1/2\}$; **c)** $(-\infty, -2/5\rangle \cup \langle 2, +\infty)$;
d) $(-\infty, -2/5) \cup (2, +\infty)$; **e)** $\langle -3/2, 6\rangle$; **f)** $\langle -7, 1/3\rangle$; **g)** $(-5, 2/3)$;
h) $(-3/2, 4)$.

2.3 Polynomiální rovnice a nerovnice

1. V kubické rovnici $6x^3 - 7x^2 - 16x + p = 0$ určete hodnotu reálného parametru p tak, aby jeden z jejích kořenů x_1 byl roven 2. Poté nalezněte i její zbývající kořeny.

2. V kubické rovnici $6x^3 - px^2 + x + 6 = 0$ určete hodnotu reálného parametru p tak, aby jeden z jejích kořenů x_1 byl roven 3. Poté nalezněte i její zbývající kořeny.

3. Určete reálné koeficienty a, b, c rovnice $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ tak, aby jejími kořeny byla čísla $3 - 2\mathrm{i}$, $3 + 2\mathrm{i}$, 2.

4. Určete reálné koeficienty a, b, c, d v algebraické rovnici čtvrtého stupně $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, jsou-li dány její kořeny:

a) $x_1 = 1 - \mathrm{i}$, $x_2 = 3 + \mathrm{i}$; **b)** $x_1 = 1 - \mathrm{i}$, $x_2 = 2$, $x_3 = -2$.

5. Určete $A, B \in \mathsf{R}$ tak, aby platilo:

a) $\dfrac{2x}{x^2 + 5x + 6} = \dfrac{A}{x + 2} + \dfrac{B}{x + 3} \quad (x \neq -2, x \neq -3)$;

b) $\dfrac{5x - 1}{x^2 - x - 2} = \dfrac{A}{x - 2} + \dfrac{B}{x + 1} \quad (x \neq 2, x \neq -1)$;

c) $\dfrac{3}{x^2 + 7x + 6} = \dfrac{A}{x + 1} + \dfrac{B}{x + 6} \quad (x \neq -1, x \neq -6)$.

6. Určete definiční obor funkce:

a) $f(x) = \sqrt{x^5 - 4x^3}$; **b)** $f(x) = \sqrt{x^3 - 9x}$.

7. V oboru reálných čísel řešte nerovnici:

a) $x^4 + x^2 - 6 < 0$; **b)** $x^4 + 4x^2 - 5 < 0$;

c) $x^4 - 5x^2 \leq 0$; **d)** $x^5 + 7x^3 \leq 0$.

8. V oboru komplexních čísel řešte rovnici:

a) $x^4 - 1 = 0$; **b)** $(x-5)^4 - 7(x-5)^2 = 44$.

Výsledky.
1. $p = 12$, $x_2 = 2/3$, $x_3 = -3/2$. **2.** $p = 19$, $x_2 = 2/3$, $x_3 = -1/2$. **3.** $a = -8$, $b = 25$, $c = -26$. **4. a)** $a = -8$, $b = 24$, $c = -32$, $d = 20$; **b)** $a = -2$, $b = -2$, $c = 8$, $d = -8$. **5. a)** $A = -4$, $B = 6$; **b)** $A = 3$, $B = 2$; **c)** $A = 3/5$, $B = -3/5$. **6. a)** $\langle -2, 0\rangle \cup \langle 2, +\infty)$; **b)** $\langle -3, 0\rangle \cup \langle 3, +\infty)$. **7. a)** $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$; **b)** $(-1, 1)$; **c)** $\langle -\sqrt{5}, \sqrt{5}\rangle$; **d)** $(-\infty, 0\rangle$. **8. a)** ± 1, $\pm \mathrm{i}$; **b)** $5 \pm \sqrt{11}$, $5 \pm 2\mathrm{i}$.

2.4 Iracionální rovnice a nerovnice

1. V kvadratické rovnici $x^2 + px + 28 = 0$ určete hodnotu reálného parametru p tak, aby součet druhých mocnin kořenů této rovnice byl roven 65.

2. V kvadratické rovnici $2x^2 - (p+1)x + p + 3 = 0$ určete hodnotu reálného parametru p tak, aby rozdíl kořenů této rovnice byl roven 1.

3. V oboru reálných čísel řešte rovnici:

a) $x - 4 = \sqrt{2x}$; **b)** $x + 1 = \sqrt{5x + 1}$;

c) $3 \cdot \sqrt{x+5} = x-5$; **d)** $3 \cdot \sqrt{x+5} = 5-x$;

e) $x+9+\sqrt{x^2+9} = 0$; **f)** $\sqrt{30-x-x^2}+5 = x$;

g) $\sqrt{x+27}-\sqrt{x-5} = 2$; **h)** $\sqrt{x^2-x-20}-\sqrt{4-3x} = 0$;

i) $\sqrt{5+x}+\sqrt{x-2} = 7$; **j)** $\sqrt{9+x}-\sqrt{x-7} = 2$;

k) $\sqrt{x+5}-\sqrt{5-x} = 2$; **l)** $\sqrt{x+2}-\sqrt{x-6} = 2$;

m) $\sqrt{x-13}+\sqrt{x+12} = 1$; **n)** $\sqrt{x+5}+\sqrt{2x+8} = 1$;

o) $\sqrt{x^2-1}+\sqrt{6x+7} = -4$.

Výsledky.
1. ± 11. **2.** 9, -3. **3. a)** 8; **b)** 0, 3; **c)** 20; **d)** -1; **e)** nemá řešení; **f)** 5; **g)** 54; **h)** -6; **i)** 11; **j)** 16; **k)** 4; **l)** 7; **m)** nemá řešení; **n)** -4; **o)** nemá řešení.

4. V oboru reálných čísel řešte rovnici:

a) $\sqrt{x-7}-\sqrt{5-x} = 3$; **b)** $x-1 = \sqrt{5x+1}$;

c) $\sqrt{5+x}-\sqrt{5-x} = \sqrt{10}$; **d)** $\sqrt{2x}+1 = \sqrt{13+2x}$;

e) $(2\sqrt{x}-5)(\sqrt{x}-3) = x-3$; **f)** $(\sqrt{x}-5)(\sqrt{x}-7) = 3$;

g) $(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-1) = x+1$; **h)** $\sqrt{2x+9}-\sqrt{2x-7} = 2$;

i) $\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2} = \sqrt{2x+3}$; **j)** $\sqrt{x+4}+\sqrt{x-1} = \dfrac{15}{\sqrt{x+4}}$;

k) $x+\sqrt{10+x^2} = \dfrac{50}{\sqrt{10+x^2}}$; **l)** $\sqrt{x^2+6}-\sqrt{x^2-6} = x \cdot \sqrt{2}$;

m) $\sqrt{x+8}-\sqrt{5x+20}+2 \,=\, 0$; **n)** $\sqrt{5x+4}-\sqrt{2x-1} \,=\, \sqrt{3x+1}$;

o) $\sqrt{\dfrac{5x-4}{x+8}}+\sqrt{\dfrac{x+8}{5x-4}} \,=\, 2$; **p)** $\sqrt{\dfrac{3x-10}{x}}+\sqrt{\dfrac{x}{3x-10}} \,=\, 2$.

Výsledky.
4. a) nemá řešení; **b)** 7; **c)** 5; **d)** 18; **e)** 4, 81; **f)** 16, 64; **g)** 9; **h)** 8;
i) 5/2; **j)** 5; **k)** $4\sqrt{10}/3$; **l)** $\sqrt{6}$; **m)** 1; **n)** 1; **o)** 3; **p)** 5.

5. V oboru reálných čísel řešte nerovnici:

a) $\sqrt{x+2} \,<\, 1$; **b)** $\sqrt{x-2}+x \,>\, 4$;

c) $2x-5\sqrt{x}-3 \,\geq\, 0$; **d)** $3x-2\sqrt{x}-1 \,\leq\, 0$;

e) $\sqrt{x-8}-\sqrt{x+2} \,<\, 0$; **f)** $\sqrt{x+2} \,>\, \sqrt{2x-8}$;

g) $\sqrt{x^2-6} \,\geq\, 5\sqrt{10}$; **h)** $\sqrt{x^2+4} \,\leq\, x+2$;

i) $\sqrt{x^2+x-12} \,<\, 6-x$; **j)** $\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} \,>\, 2$.

Výsledky.
5. a) $\langle -2,-1)$; **b)** $(3,+\infty)$; **c)** $\langle 9,+\infty)$; **d)** $\langle 0,1\rangle$; **e)** $\langle 8,+\infty)$;
f) $\langle 4,10)$; **g)** $(-\infty,-16\rangle \cup \langle 16,+\infty)$; **h)** $\langle 0,+\infty)$;
i) $(-\infty,-4\rangle \cup \langle 3,48/13)$; **j)** $(1,9)$.

2.5 Rovnice a nerovnice s absolutní hodnotou

1. V oboru reálných čísel řešte rovnici:

a) $|3x+1|+|2-x| \,=\, 3$; **b)** $|1-2x|+|x+3| \,=\, 4$;

c) $|x+1|+|x-1| = 4$;

d) $|x+2|+|x-3| = 7$;

e) $|x|+|x+1| = 1$;

f) $|2x+1|-|2x|+1 = 2x$;

g) $|3x-2|+4 = |2x+3|$;

h) $x\cdot|x| = 4\cdot|x|-4$;

i) $|2x-1|+|x+5| = |2x+3|$;

j) $|5-x|-2|x+2| = 2+|1-x|$;

k) $|2x+1|+|2x-1| = 3$;

l) $3|x-1|+2|x-2| = |x+10|$;

m) $4|x+\sqrt{2}|-2|x-\sqrt{2}| = x$;

n) $\big||x|-1\big| = 2$;

o) $|x+2|+3x-2|1-x|-2 = |x|$;

p) $\dfrac{|x|+3}{|x|-3} = 3$;

q) $x^2+6|x|-7 = 0$;

r) $|x^2-7x+10| = |x-2|$;

s) $|x^2-3x-4| = |x+1|$;

t) $|x^2-x| = |x|$;

u) $|x^2-2x+1| = |x-1|$;

v) $|x^2+x-2|+6x-3 = x^2+|3-x|$.

Výsledky.
1. a) $-1/2$, 0; **b)** 0, $2/3$; **c)** ± 2; **d)** -3, 4; **e)** $\langle -1, 0\rangle$; **f)** 1; **g)** $3/5, 1$;
h) 2, $2-2\sqrt{2}$; **i)** nemá řešení; **j)** -3, -1; **k)** $\pm 3/4$; **l)** $-1/2$, $17/4$;
m) $-2\sqrt{2}$, $-2\sqrt{2}/5$; **n)** ± 3; **o)** $2/5$; **p)** ± 6; **q)** ± 1; **r)** 2, 4, 6;
s) $-1, 3, 5$; **t)** 0, 2; **u)** 0, 1, 2; **v)** 1.

2. V oboru reálných čísel řešte nerovnici:

a) $|5+x| > 1$;

b) $|2-2x| < 4$;

c) $|4-x| \le 2$;

d) $|3x-2|-5 < |x+1|$;

e) $|1-2x|+3|x-2| > 4$; **f)** $2|3-x|+|2x+1| > 8$;

g) $|x-5|-2|1-x| < 2$; **h)** $|2-x|-3|x+5| < 5$;

i) $|x|+|x-1| > 2$; **j)** $|x|+|x-5| < 7$;

k) $|2x+1|-|3-x| > x$; **l)** $|7-x| > |1-x|+3x$;

m) $3x-|2x-1| \leq 5-x$; **n)** $|x-4|+2x \leq |2x-1|$;

o) $\dfrac{1}{|2x-3|} \geq 5$; **p)** $\left|\dfrac{2x}{1+x^2}\right| \leq 1$;

q) $3|x-1|+|3x-1| \leq x-1$; **r)** $|x^2-2x| \leq x^2$.

Výsledky.
2. a) $(-\infty,-6)\cup(-4,+\infty)$; **b)** $(-1,3)$; **c)** $\langle 2,6\rangle$; **d)** $(-1,4)$;
e) $(-\infty,1)\cup(11/5,+\infty)$; **f)** $(-\infty,-3/4)\cup(13/4,+\infty)$;
g) $(-\infty,-1)\cup(5/3,+\infty)$; **h)** $(-\infty,-6)\cup(-9/2,+\infty)$;
i) $(-\infty,-1/2)\cup(3/2,+\infty)$; **j)** $(-1,6)$; **k)** $(-\infty,-2)\cup(1,+\infty)$;
l) $(-\infty,8/5)$; **m)** $(-\infty,2\rangle$; **n)** $(-\infty,-1\rangle$; **o)** $\langle 7/5,3/2)\cup(3/2,8/5\rangle$;
p) $(-\infty,+\infty)$; **q)** nemá řešení; **r)** $\{0\}\cup\langle 1,+\infty)$.

3. V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic:

a) $\begin{aligned} x+3|y|-1&=0 \quad , \\ x+\ \ y+3&=0 \quad ; \end{aligned}$ **b)** $\begin{aligned} x+2y-6&=0 \quad , \\ |x-3|-y&=0 \quad ; \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} x-|y+1|&=1 \quad , \\ x+\ \ y&=3 \quad ; \end{aligned}$ **d)** $\begin{aligned} |x|+|y|&=1 \quad , \\ 2|x|+\ y&=2 \quad . \end{aligned}$

4. V oboru reálných čísel řešte nerovnici:

a) $|x+3| > |x-2|$; **b)** $|x-1| \leq |2x-3|$;

c) $|x-2|+4 < |2x+5|$;

d) $|x-3|+|x-1| < |x+5|$;

e) $|x+2|+|x-3| > x+5$;

f) $|2x-5|-|4x+7| \geq 0$;

g) $\dfrac{|3-5x|}{x-2} > 6$;

h) $\dfrac{1}{|2x-3|}+8 \geq \dfrac{5}{|3-2x|}$;

i) $2x-|3x+6| \leq \dfrac{8+2x}{3}$;

j) $\dfrac{2x-3}{6}-\dfrac{x+5}{3} \geq \dfrac{|4-x|}{2}$;

k) $\dfrac{|x+2|-x}{x} < 2$;

l) $\dfrac{|x-1|}{x+2} < 1$;

m) $\dfrac{x-1}{3}-2\,|1-4x| > \dfrac{1}{4}\,x-\dfrac{7-52x}{6}$.

Výsledky.
3. a) $[-5,2]$, $[-2,-1]$; **b)** $[4,1]$, $[0,3]$; **c)** $[5/2,1/2]$; **d)** $[\pm 1,0]$.
4. a) $(-1/2,+\infty)$; **b)** $(-\infty,4/3\rangle \cup \langle 2,+\infty)$; **c)** $(-\infty,-11)\cup(1/3,+\infty)$;
d) $(-1/3,9)$; **e)** $(-\infty,0)\cup(6,+\infty)$; **f)** $\langle -6,-1/3\rangle$; **g)** $(2,9)$;
h) $(-\infty,5/4\rangle \cup \langle 7/4,+\infty)$; **i)** $(-\infty,+\infty)$; **j)** nemá řešení;
k) $(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$; **l)** $(-\infty,-2)\cup(-1/2,+\infty)$; **m)** $(-\infty,-2)$.

2.6 Exponenciální rovnice a nerovnice

1. V oboru reálných čísel řešte rovnici:

a) $2^x+4^x = 6$;

b) $3^x+9^x = 12$;

c) $3^{x^2+6x+\frac{7}{2}} = \sqrt{3}$;

d) $2^{x^2-6x-\frac{5}{2}} = 16\cdot\sqrt{2}$;

e) $2^{2x}\cdot 3^x = 144$;

f) $4^{2x}\cdot 2^{x-1} = 8^x$;

g) $3^{2+x} + 3^{4-x} = 90$; **h)** $3^x + 3^{x-2} = 270$;

i) $2^{x-1} + 2^{x-2} + 2^{x-3} = 448$; **j)** $2 \cdot 3^{x+2} - 3^{x-1} - 3^{x+1} = 44$;

k) $4 \cdot 3^{x+1} - 72 = 3^{x+2} + 3^{x-1}$; **l)** $9^{x-1} + 7 = 4 \cdot (3^{x-1} + 1)$;

m) $4^{x/2} - 2^{-x} = 3 \cdot (1 + 2^{-x})$; **n)** $2^x \cdot 2^{3x-3} + 2^{1-x} \cdot 8^{-x} = 1$;

o) $2 \cdot 4^x - 5 \cdot 2^x + 2 \cdot 4^{x-1} = 0$; **p)** $2^{3x} \cdot 4^{3x-3} - 8^{2x+1} = 0$;

q) $25^{2x} - 3 \cdot 25^x = 10$; **r)** $5 \cdot 9^x - \dfrac{8}{3} \cdot 12^x = 3^x \cdot 4^{x+1}$;

s) $3 \cdot 3^x + 4 \cdot 3^{x+1} + 5 \cdot 3^{x+2} = 405 \cdot 2^{x-1}$.

Výsledky.
1. a) 1; **b)** 1; **c)** $-3 \pm \sqrt{6}$; **d)** $-1, 7$; **e)** 2; **f)** 1/2; **g)** 0, 2; **h)** 5; **i)** 9;
j) 1; **k)** 3; **l)** 1, 2; **m)** 2; **n)** 1/2; **o)** 1; **p)** 3; **q)** 1/2; **r)** -1; **s)** 3.

2. V oboru reálných čísel řešte rovnici:

a) $3^{x+1} - 2^x = 2^{x+3} - 3^x$; **b)** $4^{x+1} - 8 \cdot 4^{x-1} = 32$;

c) $\dfrac{2^x \cdot 3^{x+2}}{6^{7-x} \cdot 8^{x-4}} = \dfrac{1}{3} \cdot 9^{x-2}$; **d)** $4^{\sqrt{x+1}} = 64 \cdot 2^{\sqrt{x+1}}$;

e) $5^x - 5^{3-x} = 20$; **f)** $9^x - 2^{x+\frac{1}{2}} = 2^{x+\frac{7}{2}} - 3^{2x-1}$;

g) $3^{2x-1} + 3^{2x-2} - 3^{2x-4} = 315$; **h)** $5^{x-1} + 2 \cdot 5^{x-2} = 35$;

i) $2^{2x+1} + 2^{2x} - 4^{x-1} = 11$; **j)** $9^{2x+1} - 7 \cdot 9^{x+1} = 162$;

k) $\sqrt[x+2]{27} = \sqrt[x+1]{9}$; **l)** $4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$;

m) $3^{x+2} + 3^{x+1} + 2 \cdot 3^x = 126$; **n)** $9^x + 2 \cdot 3^x - 3 = 0$;

o) $11^{3x-2} + 13^{3x-2} = 13^{3x-1} - 11^{3x-1}$;

p) $6 \cdot 2^{x} + 3 \cdot 2^{x+1} = 12 \cdot 3^{x+1} - 3^{x+2}$;

q) $3 \cdot (9^{2x} + 1) = 9^{x+2} + 9^{x-1}$; **r)** $3^{x} + 3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3} = \dfrac{40}{3}$;

s) $5 \cdot 2^{x+2} - 6 \cdot 3^{x+2} = 3^{x+3} + 2 \cdot 2^{x+1}$.

Výsledky.
2. a) 2; **b)** 2; **c)** 5; **d)** 35; **e)** 2; **f)** 3/2; **g)** 3; **h)** 3; **i)** 1; **j)** 1; **k)** 1;
l) 3/2; **m)** 2; **n)** 0; **o)** 2/3; **p)** −2; **q)** ±3/2; **r)** −1; **s)** −4.

3. V oboru reálných čísel řešte rovnici:

a) $\left(\dfrac{4}{9}\right)^{x} \cdot \left(\dfrac{27}{8}\right)^{x-1} = \dfrac{\log 4}{\log 8}$; **b)** $\left(\dfrac{4}{25}\right)^{x+3} \cdot \dfrac{125}{8} = \dfrac{\log 8}{\log 4} + 1$;

c) $\dfrac{3^{x+2}}{3^{2x-4}} = \dfrac{\log 64}{\log 4}$; **d)** $\dfrac{5^{x-1}}{5^{2-3x}} = \dfrac{\log 32}{\log 2}$;

e) $5^{\log x} + 5^{-1+\log x} = 3^{1+\log x} + 3^{-1+\log x}$;

f) $4^{\sin x} = 2^{\cos^{-1} x}$; **g)** $4 \cdot \sqrt{2^{5-7x}} = \sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{4^{3-5x}}$;

h) $81^{\sin x} - 12 \cdot 9^{\sin x} + 27 = 0$; **i)** $16^{\cos x} - 6 \cdot 4^{\cos x} + 8 = 0$;

j) $4^{\sqrt{x-2}} + 16 = 10 \cdot 2^{\sqrt{x-2}}$; **k)** $64^{\frac{1}{x}} - 3 \cdot 2^{1+\frac{3}{x}} + 8 = 0$;

l) $3^{2x-\frac{1}{x}} = \left(\dfrac{1}{9}\right)^{-3} \cdot \sqrt[3]{3^{x-16}}$; **m)** $\left(10x\right)^{\frac{1}{x}} = x^{\frac{1}{10x}}$;

n) $\sqrt[x-1]{9^{x}} \cdot \sqrt[x]{3^{x-3}} = 27$; **o)** $125^{\frac{1}{x}} \cdot 5^{\frac{3x-7}{x-1}} = 25$;

p) $2 \cdot 4^{\ln x} - 17 \cdot 2^{\ln x} + 8 = 0$; **q)** $\sqrt[2x+7]{4^{13-x}} = 1024$.

4. V oboru reálných čísel řešte nerovnici:

a) $3^3 \cdot 27^{2x-3} \le 81^{3x-5}$;

b) $\left(\frac{1}{4}\right)^{2-x} \ge 256 \cdot 2^{-x-3}$;

c) $4^x - 6 \cdot 2^x + 8 \ge 0$;

d) $9^x - 12 \cdot 3^x + 27 < 0$.

Výsledky.
3. a) 2; **b)** -2; **c)** 5; **d)** 1; **e)** 100; **f)** $\pi/4 + k\pi,\ k \in \mathsf{Z}$; **g)** 12;
h) $\pi/6 + 2k\pi,\ 5\pi/6 + 2k\pi,\ \pi/2 + 2k\pi,\ k \in \mathsf{Z}$; **i)** $2k\pi,\ \pm\pi/3 + 2k\pi,\ k \in \mathsf{Z}$;
j) 3, 11; **k)** 3, 3/2; **l)** 1, $-3/5$; **m)** $\sqrt[9]{10^{-10}}$; **n)** 3; **o)** 3, -1; **p)** e^3, $1/\mathrm{e}$;
q) -2. **4. a)** $\langle 7/3, +\infty)$; **b)** $\langle 3, +\infty)$; **c)** $(-\infty, 1\rangle \cup \langle 2, +\infty)$; **d)** $(1, 2)$.

2.7 Logaritmické rovnice a nerovnice

1. Při kterém základě z je $\log_z 216$ o tři větší než $\log_z 64$?

2. Určete hodnotu čísla a:

a) $\log_{\frac{1}{3}} a = -\dfrac{1}{2}$;

b) $\log_{\sqrt{2}} a = 4$;

c) $\log_2 2\sqrt{2} = a$;

d) $\log_5 \dfrac{\sqrt{5}}{5} = a$;

e) $\log_4 a = -\dfrac{1}{2}$;

f) $\log_a 4 = \dfrac{1}{2}$;

g) $\log_a \sqrt{8} = \dfrac{3}{4}$;

h) $\log_2 \sqrt[4]{8} = a$;

i) $\log_3 \dfrac{\sqrt{3}}{27} = a$;

j) $\log_a \dfrac{1}{10} = -\dfrac{1}{2}$.

3. V R řešte rovnici:

a) $\log(x-3)+\log(x+1)-\log(x-2)=\log 4$;

b) $\log(x+1)+\log(x-1)-\log(x-2)=\log 8$;

c) $\log(x+2)+\log(x-3)=\log(x+9)$;

d) $2\log(2x-3)-\log(x+3)=\log 3+\log(x-3)$;

e) $\log\sqrt{x+4}-\log\sqrt{x-4}=\log 12-\log 4$;

f) $\log_4(x+3)-\log_4(x-1)=2-\log_4 8$;

g) $\dfrac{\log 2x}{\log(4x-15)}=2$;

h) $\log_2 2\sqrt[3]{x^2}-\log_2 x^2=\dfrac{11}{3}$;

i) $\dfrac{\log(2x+10)}{\log(x+1)}=2$;

j) $\dfrac{1}{5-\log_2 x}+\dfrac{2}{1+\log_2 x}=1$;

k) $\log_4[\log_3(\log_2 x)]=\dfrac{1}{2}$;

l) $\log_4[\log_3(2+\log_2 x)]=\dfrac{1}{2}$;

m) $\log_2[\log_3(4+\log_2 x)]=1$;

n) $\log_2\{\log_4[\log_3(2x-1)]\}=-1$;

o) $\log_x 2-\log_{2x} 2=\dfrac{1}{2}$;

p) $\log_x 2+\log_2 x=-2$;

q) $\log_3\left(\log_2 x-\dfrac{4}{\log_2 x}\right)=1$;

r) $\log_x 2\cdot\log_{2x} 2\ =\ \log_{4x} 2$;

s) $\ln 2x+\ln x^2-\ln\sqrt[3]{x}=1+\ln 2-\ln x^{-3}$;

t) $\log_{16} x+\log_4 x+\log_2 x=7$.

Výsledky.
1. 3/2. **2. a)** $\sqrt{3}$; **b)** 4; **c)** 3/2; **d)** $-1/2$; **e)** 1/2; **f)** 16; **g)** 4; **h)** 3/4;
i) $-5/2$; **j)** 100. **3. a)** 5; **b)** 3, 5; **c)** 5; **d)** 6; **e)** 5; **f)** 5; **g)** 9/2;

h) 1/4; **i)** 3; **j)** 4, 8; **k)** 512; **l)** 128; **m)** 32; **n)** 5; **o)** 1/4, 2; **p)** 1/2;
q) 1/2, 16; **r)** $2^{\pm\sqrt{2}}$; **s)** $1/\mathrm{e}^3$; **t)** 16.

4. Řešte v R:

a) $\log x^3 + \frac{1}{2}\log x^2 + 7\log x^4 + 64 = 0$;

b) $\log x^3 - \log x^4 + \log x^5 = 8$; **c)** $1 + \log x^3 = \dfrac{10}{\log x}$;

d) $\log^2 x = \log(1\,000x^2)$; **e)** $x^{\log x} + 10 \cdot x^{-\log x} = 11$;

f) $x^{1+\log x} = 100$; **g)** $\log x - \dfrac{3}{\log x} = 2$;

h) $\log\sqrt{3x-5} + \log\sqrt{7x-3} = 1 + \log\sqrt{0,11}$;

i) $x^{3+4\log x} - 10x^6 = 0$; **j)** $x^{3+2\log x} = 1\,000\,x^{1+\log x}$;

k) $\log\left(\dfrac{1}{2} + x\right) = \log\dfrac{1}{2} - \log x$; **l)** $\dfrac{3+\log x}{2-\log x} = 4$;

m) $(2-\log x)^2 + \log^2 x = 10$; **n)** $\log x^2 + \log\sqrt{x} - \log\dfrac{1}{x} = 10$;

o) $\log x + \dfrac{1}{2}\log\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right) = \dfrac{1}{2}$; **p)** $\sqrt{x^{\log\sqrt{x}}} = 10$;

q) $\log(x+13) - \log(x-3) = 1 - \log 2$;

r) $\log\sqrt{1+x} + 3\log\sqrt{1-x} = 2 + \log\sqrt{1-x^2}$;

s) $\log x^2 + \log x^3 + \log x^4 + \log x^5 = 6$;

t) $2\log\sqrt{x} - 3\log x^2 + \dfrac{3}{5}\log\sqrt[3]{x^5} - 5\log x^4 = 48$;

u) $\log(2x+9) - 2\log x + \log(x-4) = 2 - \log 50$.

Výsledky.

4. a) $1/100$; **b)** 100; **c)** $10\sqrt[3]{100}$, $1/100$; **d)** $1\,000$, $1/10$; **e)** 1, 10, $1/10$; **f)** 10, $1/100$; **g)** $1\,000$, $1/10$; **h)** 2; **i)** 10, $1/\sqrt[4]{10}$; **j)** 10, $1/1\,000$; **k)** $1/2$; **l)** 10; **m)** $1\,000$, $1/10$; **n)** $100\sqrt[7]{10^6}$; **o)** 3; **p)** 100, $1/100$; **q)** 7; **r)** nemá řešení; **s)** $\sqrt[7]{1\,000}$; **t)** $1/100$; **u)** 36.

5. V oboru reálných čísel řešte rovnici:

a) $\log_5 |x - 100| = 3$; **b)** $\log_3 |2x - 27| = 4$;

c) $|-3 + \log_2 2x\,| = 2$; **d)** $\left|\,1 + \log_2 \dfrac{x}{2}\,\right| = 3$;

e) $|\,2(-1 + \log_3 x)\,| = 4$; **f)** $\left|\,\dfrac{-2 + \log_2 x}{3}\,\right| = 1$;

g) $\log_4(x+12) \cdot \log_x 2 = 1$; **h)** $\sqrt{\tfrac{1}{2}\log_x 3x} \cdot \log_3 x = -1$;

i) $\log_2(3^{x-1} + 7) = 2 + \log_2(3^{x-1} + 1)$;

j) $\log_9\,(2\cos x) + \log_3 2 + \log_3 \cos x = \dfrac{3}{4}$;

k) $\log_8 \sin x + \log_4 \sin x - \log_2 \sin x = \dfrac{1}{12}$.

6. V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic:

a)
$$\begin{aligned} \log x + \log y &= 5 \quad , \\ 2 \cdot \frac{\log x}{\log y} - 3 \cdot \frac{\log y}{\log x} &= 1 \quad ; \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} \log(x+y) - \log(x-y) &= 3\log 2 \ , \\ \log(x^2+y^2) - 1 &= \log 13 \ . \end{aligned}$$

7. V oboru reálných čísel řešte nerovnici:

a) $\dfrac{\log(2x+10)}{2} \geq \log(x+1)$;

b) $\log(x-1) < \dfrac{\log x^5 - \log x}{4}$;

c) $\log_2 \dfrac{3x+1}{x+1} \leq -1$;

d) $\log_3 \dfrac{x+3}{x-1} > 2$;

e) $\dfrac{2-\log x}{1+\log x} \geq 0$;

f) $\dfrac{1}{\log x} \geq \log x$;

g) $\dfrac{\ln|x|}{4-x^2} \geq 0$;

h) $\dfrac{\log|x|}{x^2-9} \geq 0$.

Výsledky.
5. a) 225, -25; **b)** 54, -27; **c)** 1, 16; **d)** $1/8$, 8; **e)** $1/3$, 27; **f)** $1/2$, 32; **g)** 4; **h)** $1/9$; **i)** 1; **j)** $\pm\pi/6 + 2k\pi$, $k \in \mathsf{Z}$; **k)** $\pi/4 + 2k\pi$, $3\pi/4 + 2k\pi$, $k \in \mathsf{Z}$. **6. a)** $[1\,000, 100]$; **b)** $[9, 7]$. **7. a)** $(-1, 3\rangle$; **b)** $(1, +\infty)$; **c)** $(-1/3, -1/5\rangle$; **d)** $(1, 3/2)$; **e)** $(1/10, 100\rangle$; **f)** $(0, 1/10\rangle \cup (1, 10\rangle$; **g)** $(-2, -1\rangle \cup \langle 1, 2)$; **h)** $(-\infty, -3) \cup \langle -1, 0) \cup (0, 1\rangle \cup (3, +\infty)$.

2.8 Goniometrické rovnice a nerovnice

1. V oboru reálných čísel řešte rovnici:

a) $(1 + \operatorname{tg} x)(1 + \cos 3x) = 0$;

b) $2\sin x = \sin 2x$;

c) $\operatorname{tg} x = \sin 2x$;

d) $2\sin x - 3\operatorname{cotg} x = 0$;

e) $2\sin^2 x = \operatorname{tg} x$;

f) $\cos 2x = \cos^2 2x$;

g) $\sin 2x - \cos x = 0$;

h) $\cos x + \sin 2x = 0$;

i) $\dfrac{\sin^2 x}{\operatorname{tg} x} + \cos^2 x \cdot \operatorname{tg} x = 1$;

j) $2\operatorname{tg} x \cos x + 1 = 2\cos x + \operatorname{tg} x$;

k) $2\sin^2 x + \sin^2 2x = 2$;

l) $\sin x + \sin 2x = \operatorname{tg} x$;

m) $\operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$;

n) $2\sin x \operatorname{tg} x + 4\cos x = 5$;

o) $\operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x = \dfrac{4}{3}\sin 2x$;

p) $1 + \sin x - \cos x - \operatorname{tg} x = 0$;

q) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sin^2 x} + 4\operatorname{cotg} x = 0$.

Výsledky.
1. a) $-\pi/4 + k\pi$, $\pi/3 + 2k\pi/3$, $k \in \mathsf{Z}$; **b)** $k\pi$, $k \in \mathsf{Z}$; **c)** $k\pi$, $\pi/4 + k\pi/2$, $k \in \mathsf{Z}$; **d)** $\pm\pi/3 + 2k\pi$, $k \in \mathsf{Z}$; **e)** $k\pi$, $\pi/4 + k\pi$, $k \in \mathsf{Z}$; **f)** $k\pi$, $\pi/4 + k\pi/2$, $k \in \mathsf{Z}$; **g)** $\pi/2 + k\pi$, $\pi/6 + 2k\pi$, $5\pi/6 + 2k\pi$, $k \in \mathsf{Z}$; **h)** $\pi/2 + k\pi$, $7\pi/6 + 2k\pi$, $11\pi/6 + 2k\pi$, $k \in \mathsf{Z}$; **i)** $\pi/4 + k\pi$, $k \in \mathsf{Z}$; **j)** $\pi/4 + k\pi$, $\pm\pi/3 + 2k\pi$, $k \in \mathsf{Z}$; **k)** $\pi/2 + k\pi$, $\pi/4 + k\pi/2$, $k \in \mathsf{Z}$; **l)** $k\pi$, $\pm\pi/3 + 2k\pi$, $k \in \mathsf{Z}$; **m)** $\pi/3 + k\pi$, $-\pi/6 + k\pi$, $k \in \mathsf{Z}$; **n)** $\pm\pi/3 + 2k\pi$, $k \in \mathsf{Z}$; **o)** $\pm\pi/3 + k\pi$, $k \in \mathsf{Z}$; **p)** $2k\pi$, $\pi/4 + k\pi$, $k \in \mathsf{Z}$; **q)** $2\pi/3 + k\pi$, $5\pi/6 + k\pi$, $k \in \mathsf{Z}$.

2. V oboru reálných čísel řešte rovnici:

a) $4\sin^2 x - 4\cos x = 1$;

b) $\sin^2 x - \cos^2 x + \sin x = 0$;

c) $\sin^4 x - \cos^4 x = \dfrac{1}{2}$;

d) $2\sin^2 x + 7\cos x - 5 = 0$;

e) $2\cos^2 x + 1 = \sin^2 x$;

f) $\cos^2 x - \sin^2 x = 1$;

g) $\sin^2 x - \cos^2 x = 3\sin x - 2$; **h)** $3\cos^2 x + 1 = \sin x$;

i) $\cos^3 x - \cos x = 0$; **j)** $\sin^2 x - 2\cos x + 2 = 0$;

k) $2\sin^2 x - 5\cos x - 5 = 0$; **l)** $2\sin^2 x - 5\cos x + 1 = 0$;

m) $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$; **n)** $\sin^2 x = \frac{3}{2}\left[\cos(2\pi) + \cos x\right]$;

o) $3\sin^2 x + \cos^2 x - 1 - \sqrt{3}\sin x = 0$;

p) $3\sin^2 x - 4\sqrt{3}\sin x\cos x + 3\cos^2 x = 0$.

Výsledky.
2. a) $\pm\pi/3 + 2k\pi,\ k \in \mathsf{Z}$; **b)** $\pi/6 + 2k\pi,\ 5\pi/6 + 2k\pi,\ 3\pi/2 + 2k\pi,\ k \in \mathsf{Z}$; **c)** $\pm\pi/3 + k\pi,\ k \in \mathsf{Z}$; **d)** $\pm\pi/3 + 2k\pi,\ k \in \mathsf{Z}$; **e)** $\pi/2 + k\pi,\ k \in \mathsf{Z}$; **f)** $k\pi$, $k \in \mathsf{Z}$; **g)** $\pi/2 + 2k\pi,\ \pi/6 + 2k\pi,\ 5\pi/6 + 2k\pi,\ k \in \mathsf{Z}$; **h)** $\pi/2 + 2k\pi,\ k \in \mathsf{Z}$; **i)** $k\pi/2,\ k \in \mathsf{Z}$; **j)** $2k\pi,\ k \in \mathsf{Z}$; **k)** $\pi + 2k\pi,\ k \in \mathsf{Z}$; **l)** $\pm\pi/3 + 2k\pi,\ k \in \mathsf{Z}$; **m)** $2k\pi,\ \pm\pi/3 + 2k\pi,\ k \in \mathsf{Z}$; **n)** $\pi + 2k\pi,\ 2\pi/3 + 2k\pi,\ 4\pi/3 + 2k\pi,\ k \in \mathsf{Z}$; **o)** $k\pi,\ \pi/3 + 2k\pi,\ 2\pi/3 + 2k\pi,\ k \in \mathsf{Z}$; **p)** $\pi/6 + k\pi,\ \pi/3 + k\pi,\ k \in \mathsf{Z}$.

3. V oboru reálných čísel řešte rovnici:

a) $\sin x + \cos x = -1$; **b)** $2(\cos x - 1)\sin 2x = 3\sin x$;

c) $\cos^2 x + 2\cos x \sin x + \sin^2 x = \frac{1}{2}$;

d) $8\cos 2x - 4\sin^2 x \cdot \mathrm{cotg}^2\, x + 5 = 0$;

e) $\frac{1 - \sin^2 x}{2} + \frac{\cos x}{4} - \frac{1}{4} = 0$; **f)** $2\cos x + 5 = \frac{3}{\cos x}$;

g) $2\sin^2 x = 3\cos x$; **h)** $1 + \sin x = 2\cos^2 x$;

i) $\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3}$; **j)** $\cos^2 x = 1 + \sin x$;

k) $\cos 2x + 2 = 3\cos x$; **l)** $\cos 2x = \sin x$;

m) $\sin^2 2x + 3\cos^2 2x + \cos 2x = 1$;

n) $\sin^2\frac{x}{2} - 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} - \cos^2\frac{x}{2} = 0$.

4. V oboru reálných čísel řešte nerovnici:

a) $\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \geq 0$; **b)** $\sin^2 x \leq \frac{1}{4}$;

c) $\cos^2 x - 3\cos x \geq 4$; **d)** $3\,\mathrm{tg}\,x \leq \mathrm{cotg}\,x$.

Výsledky.
3. a) $\pi + 2k\pi$, $3\pi/2 + 2k\pi$, $k \in \mathsf{Z}$; **b)** $k\pi$, $2\pi/3 + 2k\pi$, $4\pi/3 + 2k\pi$, $k \in \mathsf{Z}$; **c)** $7\pi/12 + k\pi$, $11\pi/12 + k\pi$, $k \in \mathsf{Z}$; **d)** $\pm\pi/3 + k\pi$, $k \in \mathsf{Z}$; **e)** $\pi + 2k\pi$, $\pm\pi/3 + 2k\pi$, $k \in \mathsf{Z}$; **f)** $\pm\pi/3 + 2k\pi$, $k \in \mathsf{Z}$; **g)** $\pm\pi/3 + 2k\pi$, $k \in \mathsf{Z}$; **h)** $3\pi/2 + 2k\pi$, $\pi/6 + 2k\pi$, $5\pi/6 + 2k\pi$, $k \in \mathsf{Z}$; **i)** $\pi/4 + k\pi$, $7\pi/12 + k\pi$, $k \in \mathsf{Z}$; **j)** $k\pi$, $3\pi/2 + 2k\pi$, $k \in \mathsf{Z}$; **k)** $2k\pi$, $\pm\pi/3 + 2k\pi$, $k \in \mathsf{Z}$; **l)** $\pi/6 + 2k\pi$, $5\pi/6 + 2k\pi$, $3\pi/2 + 2k\pi$, $k \in \mathsf{Z}$; **m)** $\pi/4 + k\pi/2$, $\pm\pi/3 + k\pi$, $k \in \mathsf{Z}$; **n)** $3\pi/4 + k\pi$, $k \in \mathsf{Z}$.
4. a) $\langle -\pi/8 + k\pi, 3\pi/8 + k\pi\rangle$, $k \in \mathsf{Z}$; **b)** $\langle -\pi/6 + k\pi, \pi/6 + k\pi\rangle$, $k \in \mathsf{Z}$; **c)** $\pi + 2k\pi$, $k \in \mathsf{Z}$; **d)** $(k\pi, \pi/6 + k\pi\rangle \cup (\pi/2 + k\pi, 5\pi/6 + k\pi\rangle$, $k \in \mathsf{Z}$.

5. V oboru reálných čísel řešte rovnici:

a) $4\sin^2\frac{x}{2} = -\sqrt{8}\sin\frac{x}{2}$; **b)** $\sqrt{12}\cos\frac{x}{3} = -4\cos^2\frac{x}{3}$;

c) $-\sqrt{8}\cos 2x = \sqrt{2}\,\mathrm{cotg}\,2x$; **d)** $6\sin 3x = -\sqrt{18}\,\mathrm{tg}\,3x$;

e) $\sin x - \sqrt{3}\cos x = 0$; **f)** $2\sin x = \sqrt{3}\,\mathrm{tg}\, x$;

g) $\mathrm{tg}^2\, x = -\,\mathrm{tg}\, x$; **h)** $\mathrm{cotg}^2\, x = \sqrt{3}\,\mathrm{cotg}\, x$;

i) $\mathrm{tg}\,\dfrac{x}{2} = 1 - \cos x$; **j)** $\mathrm{tg}\, x + \mathrm{cotg}\, x = 2$;

k) $\sqrt{3}\,\mathrm{tg}^2\, x - 4\,\mathrm{tg}\, x + \sqrt{3} = 0$; **l)** $3\,\mathrm{tg}^2\, x - \sqrt{3}\,\mathrm{tg}\, x = 0$;

m) $\mathrm{tg}^2\big(3x - \dfrac{\pi}{2}\big) = 1$; **n)** $\dfrac{\mathrm{cotg}\, x + 1}{\mathrm{cotg}\, x - 1} = 2 + \sqrt{3}$;

o) $\mathrm{cotg}\, x\, \cos x - \mathrm{cotg}\, x - \cos x + 1 = 0$;

p) $\mathrm{tg}^3\, x + \mathrm{tg}^2\, x - 3\,\mathrm{tg}\, x = 3$; **q)** $\mathrm{tg}^2\, x + 4\sin^2 x - 3 = 0$;

r) $\mathrm{cotg}^2\, x + (\sqrt{3} - 1)\,\mathrm{cotg}\, x = \sqrt{3}$.

Výsledky.
5. a) $2k\pi$, $5\pi/2 + 4k\pi$, $7\pi/2 + 4k\pi$, $k \in \mathsf{Z}$; **b)** $3\pi/2 + 3k\pi$, $5\pi/2 + 6k\pi$, $7\pi/2 + 6k\pi$, $k \in \mathsf{Z}$; **c)** $\pi/4 + k\pi/2$, $7\pi/12 + k\pi$, $11\pi/12 + k\pi$, $k \in \mathsf{Z}$; **d)** $k\pi/3$, $\pi/4 + 2k\pi/3$, $5\pi/12 + 2k\pi/3$, $k \in \mathsf{Z}$; **e)** $\pi/3 + k\pi$, $k \in \mathsf{Z}$; **f)** $k\pi$, $\pm\pi/6 + 2k\pi$, $k \in \mathsf{Z}$; **g)** $k\pi$, $-\pi/4 + k\pi$, $k \in \mathsf{Z}$; **h)** $\pi/2 + k\pi$, $\pi/6 + k\pi$, $k \in \mathsf{Z}$; **i)** $2k\pi$, $\pi/2 + 2k\pi$, $k \in \mathsf{Z}$; **j)** $\pi/4 + k\pi$, $k \in \mathsf{Z}$; **k)** $\pi/3 + k\pi$, $\pi/6 + k\pi$, $k \in \mathsf{Z}$; **l)** $k\pi$, $\pi/6 + k\pi$, $k \in \mathsf{Z}$; **m)** $\pi/4 + k\pi/3$, $\pi/12 + k\pi/3$, $k \in \mathsf{Z}$; **n)** $\pi/6 + k\pi$, $k \in \mathsf{Z}$; **o)** $\pi/4 + k\pi$, $k \in \mathsf{Z}$; **p)** $-\pi/4 + k\pi$, $\pm\pi/3 + k\pi$, $k \in \mathsf{Z}$; **q)** $\pi/4 + k\pi/2$, $k \in \mathsf{Z}$; **r)** $\pi/4 + k\pi$, $5\pi/6 + k\pi$, $k \in \mathsf{Z}$.

3.1 Komplexní čísla – algebraický tvar

1. Určete reálnou a imaginární část komplexního čísla:

a) $(1 + \mathrm{i})^2 - (1 - \mathrm{i})^2$; **b)** $(1 + \mathrm{i})(1 - \mathrm{i})(1 + 3\mathrm{i})$;

c) $\dfrac{4-\mathrm{i}}{2+3\mathrm{i}}$;

d) $\dfrac{2\mathrm{i}-1}{3+2\mathrm{i}}$;

e) $\dfrac{5+2\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}$;

f) $\dfrac{4\mathrm{i}+1}{2-3\mathrm{i}}$;

g) $\dfrac{1+\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}}-\dfrac{\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$;

h) $\dfrac{2+\mathrm{i}}{3-\mathrm{i}}+(\mathrm{i}-2)(4-\mathrm{i})$;

i) $\left(-1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^3+|3+4\mathrm{i}|$;

j) $\left(1-\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^3-\left(1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^3$;

k) $\left(-1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^3-\dfrac{-4+6\mathrm{i}}{2-3\mathrm{i}}$;

l) $\left(\dfrac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\right)^2-\left(\dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\right)^2$;

m) $\left(\dfrac{1+2\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}}\right)^2-\left(\dfrac{1-2\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}\right)^2$;

n) $\dfrac{1}{\frac{1}{2+\mathrm{i}}+\mathrm{i}}+\dfrac{1}{\frac{1}{1-2\mathrm{i}}+1}$;

o) $\dfrac{1}{\frac{1}{1+\mathrm{i}}+\mathrm{i}}-\dfrac{1}{\frac{1}{1-\mathrm{i}}-\mathrm{i}}$;

p) $\dfrac{1}{\mathrm{i}}+\dfrac{1}{1+\mathrm{i}}+\dfrac{1}{1-\mathrm{i}}$;

q) $\left[\mathrm{i}(\mathrm{i}+1)(\mathrm{i}-2)(\mathrm{i}+3)\right]^2$;

r) $\left[(1+\mathrm{i})(5+\mathrm{i})-(1+\mathrm{i})(1+3\mathrm{i})\right]^2$;

s) $\left[\dfrac{1}{(1+\mathrm{i})^2}+\dfrac{1}{(1-\mathrm{i})^2}\right]^2$.

Výsledky.
1. a) 0, 4; **b)** 2, 6; **c)** 5/13, −14/13; **d)** 1/13, 8/13; **e)** 8/5, 9/5;
f) −10/13, 11/13; **g)** −7/10, 1/10; **h)** −13/2, 13/2; **i)** 13, 0; **j)** 0, 0;
k) 10, 0; **l)** 0, 0; **m)** 0, −48/25; **n)** 5/4, −5/4; **o)** 0, −2; **p)** 1, −1;
q) −28, −96; **r)** 32, 24; **s)** 0, 0.

2. Určete reálnou a imaginární část a absolutní hodnotu komplexního čísla:

a) $\dfrac{1+2\mathrm{i}}{1+3\mathrm{i}}$;

b) $\dfrac{3+2\mathrm{i}}{3-2\mathrm{i}}$;

c) $\dfrac{(1+\mathrm{i})^3}{2(1-\mathrm{i})}$; **d)** $\left(\dfrac{2}{1+\mathrm{i}}\right)^4$;

e) $\dfrac{2\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} - (1-\mathrm{i})^3 - 7$; **f)** $\dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} + (3-2\mathrm{i})^2 - \mathrm{i}$;

g) $\left(\sqrt{2}+\mathrm{i}\right)^3 + \mathrm{i}\left(2+\mathrm{i}\cdot 3\sqrt{2}\right)$; **h)** $\left(\sqrt{3}-\mathrm{i}\right)^4 + 2\mathrm{i}\left(4\sqrt{3}+3\right)$;

i) $\dfrac{2-2\mathrm{i}}{1+3\mathrm{i}}\cdot(4-\mathrm{i}) + \dfrac{2-\mathrm{i}}{5}$; **j)** $\dfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{1-\mathrm{i}\sqrt{3}}$;

k) $\dfrac{1-3\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}} + \dfrac{1+3\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}$; **l)** $\dfrac{2-4\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\cdot(3-2\mathrm{i}) + (1+2\mathrm{i})\cdot\mathrm{i}^7$.

Výsledky.
2. a) $7/10$, $-1/10$, $\sqrt{2}/2$; **b)** $5/13$, $12/13$, 1; **c)** -1, 0, 1; **d)** -4, 0, 4;
e) -4, 3, 5; **f)** 5, -12, 13; **g)** $-4\sqrt{2}$, 7, 9; **h)** -8, 6, 10; **i)** -2, -3, $\sqrt{13}$;
j) $-1/2$, $\sqrt{3}/2$, 1; **k)** $-2/5$, 0, $2/5$; **l)** -7, -8, $\sqrt{113}$.

3. Určete hodnotu výrazu:

a) $\dfrac{1}{1+\mathrm{i}} + \dfrac{1}{1-\mathrm{i}}$; **b)** $\dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} + \dfrac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$;

c) $\left|\dfrac{-2-3\mathrm{i}}{3-2\mathrm{i}}\right| - \left|\dfrac{1-3\mathrm{i}}{5+2\mathrm{i}}\right|$; **d)** $\left|1+2\mathrm{i} - \dfrac{2-5\mathrm{i}}{3-\mathrm{i}}\right|$;

e) $(1+\mathrm{i})^8$; **f)** $(1+\mathrm{i})^{20}$;

g) $\left|(1-\mathrm{i})^6\right|$; **h)** $\left|(1-\mathrm{i})^{20}\right|$.

4. Určete reálnou a imaginární část komplexního čísla $z = \dfrac{1-\mathrm{i}\cdot t}{1+\mathrm{i}\cdot t}$; dále stanovte podmínky pro reálný parametr t tak, aby číslo z bylo: a) reálné; b) ryze imaginární.

5. Užijte vlastnosti absolutní hodnoty a vypočtěte: $\left|\dfrac{(1-3\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{2+\mathrm{i}}\right|$.

6. Jsou dána komplexní čísla $a = 3 + 2\mathrm{i}$, $b = 2 - \mathrm{i}$, $c = 1 + 2\mathrm{i}$, $d = -1 + 4\mathrm{i}$. Spočítejte:

a) $ab + cd$; **b)** $abc - d$;

c) $ab - cd$; **d)** $abcd$.

7. V oboru komplexních čísel řešte rovnici a určete absolutní hodnotu nalezených kořenů:

a) $x^2 - 2x + 2 = 0$; **b)** $x^2 - 4x + 5 = 0$;

c) $x^2 + 8x + 20 = 0$; **d)** $4x^2 + 1 = 0$.

8. Vypočítejte komplexní číslo, které má následující vlastnost: jestliže k jeho dvojnásobku přičteme číslo $\dfrac{2\mathrm{i}-3}{1+\mathrm{i}}$, dostaneme stejný výsledek, jako když hledané komplexní číslo číslem $\dfrac{2\mathrm{i}-3}{1+\mathrm{i}}$ vynásobíme.

Výsledky.
3. a) 1; **b)** 0; **c)** $1 - \sqrt{10/29}$; **d)** $\sqrt{109/10}$; **e)** 16; **f)** $-1\,024$; **g)** 8; **h)** $1\,024$. **4.** $(1-t^2)/(1+t^2)$, $-2t/(1+t^2)$; a) $t = 0$; b) $t = \pm 1$. **5.** 2. **6. a)** $-1 + 3\mathrm{i}$; **b)** $7 + 13\mathrm{i}$; **c)** $17 - \mathrm{i}$; **d)** $-74 + 7\mathrm{i}$. **7. a)** $1 \pm \mathrm{i}$, $\sqrt{2}$; **b)** $2 \pm \mathrm{i}$, $\sqrt{5}$; **c)** $-4 \pm 2\mathrm{i}$, $2\sqrt{5}$; **d)** $\pm\mathrm{i}/2$, $1/2$. **8.** $3/5 - 2\mathrm{i}/5$.

3.2 Komplexní čísla – goniometrický tvar

1. Vyjádřete v goniometrickém tvaru komplexní číslo:

a) $-5\mathrm{i}$; **b)** -3 ;

c) $1 - \mathrm{i}$; **d)** $4\mathrm{i}$;

e) $\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}$; **f)** $\dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$;

g) $-1+\sqrt{3}\,\mathrm{i}$; **h)** $-3+3\mathrm{i}$;

i) $\left(\dfrac{1+\mathrm{i}}{\mathrm{i}}\right)^2$; **j)** $\dfrac{3-\mathrm{i}}{1+3\mathrm{i}}$.

2. Najděte absolutní hodnotu a argument komplexního čísla:

a) $2+2\mathrm{i}$; **b)** $-13\mathrm{i}$;

c) $-1-\mathrm{i}$; **d)** $2-2\mathrm{i}$;

e) $3-3\mathrm{i}$; **f)** -10 ;

g) $-\sqrt{3}+\mathrm{i}$; **h)** $-\sqrt{3}-\mathrm{i}$.

Výsledky.
1. a) $5\cdot[\cos(3\pi/2)+\mathrm{i}\sin(3\pi/2)]$; **b)** $3\cdot[\cos\pi+\mathrm{i}\sin\pi]$;
c) $\sqrt{2}\cdot[\cos(7\pi/4)+\mathrm{i}\sin(7\pi/4)]$; **d)** $4\cdot[\cos(\pi/2)+\mathrm{i}\sin(\pi/2)]$;
e) $\cos(7\pi/4)+\mathrm{i}\sin(7\pi/4)$; **f)** $\cos(\pi/2)+\mathrm{i}\sin(\pi/2)$;
g) $2\cdot[\cos(2\pi/3)+\mathrm{i}\sin(2\pi/3)]$; **h)** $3\sqrt{2}\cdot[\cos(3\pi/4)+\mathrm{i}\sin(3\pi/4)]$;
i) $2\cdot[\cos(3\pi/2)+\mathrm{i}\sin(3\pi/2)]$; **j)** $\cos(3\pi/2)+\mathrm{i}\sin(3\pi/2)$. **2. a)** $2\sqrt{2}$, $\pi/4+2k\pi$, $k\in\mathsf{Z}$; **b)** 13, $3\pi/2+2k\pi$, $k\in\mathsf{Z}$; **c)** $\sqrt{2}$, $5\pi/4+2k\pi$, $k\in\mathsf{Z}$; **d)** $2\sqrt{2}$, $7\pi/4+2k\pi$, $k\in\mathsf{Z}$; **e)** $3\sqrt{2}$, $7\pi/4+2k\pi$, $k\in\mathsf{Z}$; **f)** 10, $\pi+2k\pi$, $k\in\mathsf{Z}$; **g)** 2, $5\pi/6+2k\pi$, $k\in\mathsf{Z}$; **h)** 2, $7\pi/6+2k\pi$, $k\in\mathsf{Z}$.

3. Komplexní číslo $z=1-\mathrm{i}$ napište v goniometrickém tvaru. S využitím Moivreovy věty určete z^4 a tuto mocninu vyjádřete v algebraickém tvaru.

4. Komplexní číslo $z=-2+2\mathrm{i}$ napište v goniometrickém tvaru. S využitím Moivreovy věty určete z^3 a tuto mocninu vyjádřete v algebraickém tvaru.

5. Použitím Moivreova vzorce nalezněte algebraický tvar komplexního čísla:

a) $(1+\mathrm{i})^7$; **b)** $(1-\mathrm{i})^{10}$;

c) $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)^6$; d) $\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)^8$;

e) $(2-2\mathrm{i})^6$; f) $(3+3\mathrm{i})^5$;

g) $(1-\sqrt{3}\mathrm{i})^6$; h) $(\sqrt{3}-\mathrm{i})^5$.

6. V komplexním oboru vyřešte rovnici:

a) $z^3+1=0$; b) $z^3-1=0$;

c) $z^3+8=0$; d) $z^3-8=0$.

7. Vypočtěte $u\cdot v$, $\frac{u}{v}$ pro $u=2(\cos\frac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6})$, $v=\cos\frac{2\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}$.

8. Určete $a\in\mathsf{R}$ tak, aby komplexní číslo $z=\dfrac{a+\mathrm{i}}{\mathrm{i}}$ byla komplexní jednotka.

Výsledky.
3. $\sqrt{2}\cdot[\cos(7\pi/4)+\mathrm{i}\sin(7\pi/4)]$, -4. **4.** $2\sqrt{2}\cdot[\cos(3\pi/4)+\mathrm{i}\sin(3\pi/4)]$, $16+16\mathrm{i}$. **5. a)** $8-8\mathrm{i}$; **b)** $-32\mathrm{i}$; **c)** -1; **d)** $-1/2+\sqrt{3}\mathrm{i}/2$; **e)** $512\mathrm{i}$; **f)** $-972-972\mathrm{i}$; **g)** 64; **h)** $-16\sqrt{3}-16\mathrm{i}$. **6. a)** -1, $1/2\pm\sqrt{3}\mathrm{i}/2$; **b)** 1, $-1/2\pm\sqrt{3}\mathrm{i}/2$; **c)** -2, $1\pm\sqrt{3}\mathrm{i}$; **d)** 2, $-1\pm\sqrt{3}\mathrm{i}$. **7.** $-\sqrt{3}+\mathrm{i}$, $-2\mathrm{i}$. **8.** 0.

3.3 Komplexní čísla – rovnice a soustavy rovnic

1. V oboru komplexních čísel řešte rovnici:

a) $z-|z|-4\mathrm{i}=-2$; b) $|z|-z=1+2\mathrm{i}$;

c) $(1-\mathrm{i})z=\mathrm{i}(z+1)$; d) $(1+\mathrm{i})z+(2-\mathrm{i})\bar{z}=\mathrm{i}$;

e) $(1-2\mathrm{i})z = 2\bar{z} - \mathrm{i}(2+\mathrm{i})$; **f)** $\mathrm{i}(z+\bar{z}-1) = (1-\mathrm{i})(z-\bar{z}+1)$;

g) $z + \bar{z}(2+\mathrm{i}) = z \cdot \bar{z}$; **h)** $\dfrac{z-\mathrm{i}}{z-1} = \dfrac{z}{1+z}$.

2. V oboru komplexních čísel řešte soustavu rovnic:

a) $\begin{aligned} u + v &= 3 , \\ 5u - \mathrm{i}v &= 11 - 6\mathrm{i} ; \end{aligned}$ **b)** $\begin{aligned} 2u + 5v &= 11 , \\ u - 2\mathrm{i}v &= -1 + 3\mathrm{i} ; \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} 3u + v &= 13 , \\ 2u + \mathrm{i}v &= 3 + 2\mathrm{i} ; \end{aligned}$ **d)** $\begin{aligned} 2u + 3v &= 19 , \\ u - \mathrm{i}v &= -2\mathrm{i} ; \end{aligned}$

e) $\begin{aligned} 3u - (2+\mathrm{i})v &= 16 + 4\mathrm{i} , \\ u + (1-\mathrm{i})v &= 4 - 2\mathrm{i} ; \end{aligned}$ **f)** $\begin{aligned} 2u + (3+\mathrm{i})v &= -13 + 9\mathrm{i} , \\ -u - (2-\mathrm{i})v &= 2 - 6\mathrm{i} . \end{aligned}$

3. Najděte komplexní čísla z_1 a z_2 (zapište je v algebraickém tvaru) a spočítejte jejich vzdálenost v Gaussově rovině:

a) $\begin{aligned} \mathrm{i}\, z_1 + (1+\mathrm{i})\, z_2 &= 2 , \\ 2\, z_1 - \mathrm{i}\, z_2 &= -3 ; \end{aligned}$ **b)** $\begin{aligned} \mathrm{i}\, z_1 + (2+\mathrm{i})\, z_2 &= -2 + 3\mathrm{i} , \\ 2\, z_1 + \mathrm{i}\, z_2 &= 3 - 3\mathrm{i} ; \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} \mathrm{i}\, z_1 + (1+\mathrm{i})\, z_2 &= -2 , \\ 2\, z_1 - \mathrm{i}\, z_2 &= 3 ; \end{aligned}$ **d)** $\begin{aligned} \mathrm{i}\, z_1 + (2+\mathrm{i})\, z_2 &= -5 + 4\mathrm{i} , \\ 2\, z_1 + \mathrm{i}\, z_2 &= \mathrm{i} . \end{aligned}$

Výsledky.
1. a) $3+4\mathrm{i}$; **b)** $3/2-2\mathrm{i}$; **c)** $-2/5+\mathrm{i}/5$; **d)** $-2/3-\mathrm{i}$; **e)** $7+4\mathrm{i}$; **f)** $-1/2-\mathrm{i}/2$; **g)** $2+2\mathrm{i}$, 0; **h)** $-1/5+2\mathrm{i}/5$. **2. a)** $[2-\mathrm{i}, 1+\mathrm{i}]$; **b)** $[3+5\mathrm{i}, 1-2\mathrm{i}]$; **c)** $[3-\mathrm{i}, 4+3\mathrm{i}]$; **d)** $[2+3\mathrm{i}, 5-2\mathrm{i}]$; **e)** $[6, -2\mathrm{i}]$; **f)** $[-5, 3\mathrm{i}]$. **3. a)** $z_1 = -1+\mathrm{i}$, $z_2 = 2-\mathrm{i}$, $\sqrt{13}$; **b)** $z_1 = 2-\mathrm{i}$, $z_2 = -1+\mathrm{i}$, $\sqrt{13}$; **c)** $z_1 = 1-\mathrm{i}$, $z_2 = -2+\mathrm{i}$, $\sqrt{13}$; **d)** $z_1 = 1+\mathrm{i}$, $z_2 = -1+2\mathrm{i}$, $\sqrt{5}$.

4.1 Posloupnosti a řady

1. Posloupnost $\{a_n\}$ je dána rekurentním vzorcem $a_{n+1} = -2a_n + a_{n-1}$. Spočtěte prvních sedm členů této posloupnosti, jestliže platí $a_6 = 12$, $a_3 = 4$.

2. Posloupnost $\{a_n\}$ je dána rekurentním vzorcem $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n - a_{n-1})$. Spočtěte prvních sedm členů této posloupnosti, jestliže platí $a_5 = 2, a_2 = 8$.

3. Posloupnost $\{a_n\}$ je dána rekurentním vzorcem $a_{n+1} = 2 - a_n$, přičemž $a_1 = 0$. Sledujte jednotlivé členy této posloupnosti a určete její n-tý člen jako funkci indexu n.

4. Je dána posloupnost $1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, \ldots$. Určete její tisící člen.

5. Čísla a_1, a_2, a_3, a_4 jsou po sobě jdoucími členy geometrické posloupnosti. Jejich dekadické logaritmy jsou čtyřmi po sobě jdoucími členy aritmetické posloupnosti s diferencí 1 a součtem 22. Určete čísla a_1, a_2, a_3, a_4.

6. Tři po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti mají součet 21. Zmenší-li se prostřední člen o 1 a zvětší-li se poslední člen o 6, vzniknou tři po sobě jdoucí členy geometrické posloupnosti. Určete hledané členy aritmetické posloupnosti.

7. Tři čísla, která tvoří aritmetickou posloupnost, mají součet 30. Odečteme-li od prvního 5, od druhého 4 a třetí ponecháme, dostaneme geometrickou posloupnost. Určete hledané členy aritmetické posloupnosti.

8. Aritmetická a geometrická posloupnost začínají číslem 6 a jejich druhé členy jsou stejná čísla. Poměr třetího členu aritmetické posloupnosti ku třetímu členu geometrické posloupnosti je 3 : 4. Určete diferenci d aritmetické posloupnosti a kvocient q geometrické posloupnosti.

Výsledky.
1. $28, 12, 4, 4, -4, 12, -28$. **2.** $40, 8, -16, -12, 2, 7, 5/2$. **3.** $a_n = 1 + (-1)^n$. **4.** 45. **5.** 10^4, 10^5, 10^6, 10^7. **6.** 18, 7, -4 nebo 2, 7, 12. **7.** 17, 10, 3 nebo 8, 10, 12. **8.** $d = 6$, $q = 2$ nebo $d = -2$, $q = 2/3$.

4.2 Aritmetické posloupnosti a řady

1. Pro která reálná x jsou $\ln 2$, $\ln(x+1)$, $\ln(x+3)$ tři po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti?

2. Určete první člen a diferenci aritmetické posloupnosti, pro kterou platí vztahy $a_1 + a_7 = 22$, $a_3 \cdot a_4 = 88$.

3. Napište prvých pět členů aritmetické posloupnosti, pro kterou platí vztahy $a_1 + a_5 = 16$, $a_3 + a_4 = 19$.

4. Určete diferenci d, první člen a_1 a padesátý člen a_{50}, je-li v aritmetické posloupnosti $a_{10} = 25$, $a_{20} = -15$.

5. Určete první člen a diferenci aritmetické posloupnosti, pro kterou platí vztahy $a_1 + a_2 + a_4 = 11$, $a_3 + a_5 = 14$.

6. Najděte první člen a diferenci aritmetické posloupnosti, pro kterou jsou splněny tyto dva vztahy: $a_1 + a_5 = 30$, $a_3 + a_4 = 36$.

7. V aritmetické posloupnosti platí $a_2 + a_4 = 24$ a $a_3 : a_7 = 3 : 8$. Určete první člen a diferenci posloupnosti. Vypočítejte patnáctý člen posloupnosti.

8. V aritmetické posloupnosti platí $a_3 + a_7 = 46$ a $a_2 : a_6 = 2 : 7$. Určete první člen a diferenci posloupnosti. Kolik členů posloupnosti musíte sečíst, aby jejich součet byl 1 575?

9. Čtvrtým členem aritmetické posloupnosti je číslo 16, osmým číslo 24. Kolik členů posloupnosti je třeba sečíst, aby jejich součet byl 90?

10. V aritmetické posloupnosti je $a_1 = 6$, $s_{10} = 195$. Určete diferenci a desátý člen posloupnosti.

11. Určete součet prvních deseti členů aritmetické posloupnosti, jestliže $a_3 = -4$, $a_7 = 2{,}4$.

12. Určete první člen a diferenci aritmetické posloupnosti, pro kterou platí $3a_4 + 2a_9 = 10$ a součet jejích deseti prvních členů je 30.

13. V aritmetické posloupnosti je $a_1 = 450$, $d = -24$, $a_n = 210$. Určete n a součet prvních n členů posloupnosti.

14. Vynásobíme-li čísla 7 a 13 stejným číslem, dostaneme po řadě třetí a pátý člen aritmetické posloupnosti, jejíž první člen $a_1 = 3$. Určete součet prvních patnácti členů této posloupnosti.

15. Vynásobíme-li čísla 3 a 10 stejným číslem, dostaneme po řadě druhý a šestý člen aritmetické posloupnosti, jejíž první člen $a_1 = 5$. Určete součet prvních dvaceti členů této posloupnosti.

16. Pro sedmý člen aritmetické posloupnosti platí $a_7 = 0$. Vypočtěte součet prvních třinácti členů této posloupnosti, jestliže $a_{11} = 13$.

17. Určete první člen a diferenci aritmetické posloupnosti, pro kterou je součet jak prvních pěti členů, tak i součet prvních šesti členů roven 60.

18. Aritmetická posloupnost má diferenci $d = 3$. Určete podmínku pro třetí člen této posloupnosti a_3 tak, aby součet prvních devíti členů s_9 splňoval nerovnici $s_9 < 90$.

19. Aritmetická posloupnost má diferenci $d = 6$. Určete podmínku pro čtvrtý člen této posloupnosti a_4 tak, aby součet prvních deseti členů s_{10} splňoval nerovnici $s_{10} > 80$.

20. Součet prvých devíti členů rostoucí aritmetické posloupnosti je 108. Určete první člen a diferenci této posloupnosti, víte-li, že je tvořena přirozenými čísly a její první člen je větší než 5.

Výsledky.
1. $\sqrt{5}$. **2.** 2, 3. **3.** $2, 5, 8, 11, 14$. **4.** -4, 61, -135. **5.** 1, 2. **6.** 3, 6.
7. 2, 5, 72. **8.** 3, 5, 25. **9.** 6. **10.** 3, 33. **11.** 0. **12.** 12, -2. **13.** 11, 3 630.
14. 990. **15.** 1 430. **16.** 0. **17.** 20, -4. **18.** $a_3 < 4$. **19.** $a_4 > -1$.
20. 8, 1.

21. Určete součet všech sudých přirozených čísel dělitelných třemi, která jsou menší nebo rovna 600.

22. Určete čtyři po sobě následující lichá přirozená čísla, jejichž součet je roven 472.

23. Určete součet prvních n lichých přirozených čísel.

24. Určete všechna $n \in \mathsf{N}$, pro něž platí $\dfrac{1}{n} + \dfrac{2}{n} + \dfrac{3}{n} + \cdots + \dfrac{n-1}{n} \geq 100$.

25. Součet prvých n členů aritmetické posloupnosti je $n + n^2$. Určete její diferenci a vztah pro n-tý člen.

26. Součet prvých n členů aritmetické posloupnosti je $4n^2 - 3n$. Určete její diferenci a vztah pro n-tý člen.

27. Mezi čísla 1 a 25 vložte tolik čísel, aby s danými čísly tvořila prvky aritmetické posloupnosti, jejichž součet je 117. Určete vložená čísla.

28. Mezi čísla 15 a 27 vložte pět čísel tak, aby vznikla aritmetická posloupnost. Napište tato čísla.

29. Mezi čísla 61 a 125 vložte vhodný počet dalších čísel tak, aby celek tvořil aritmetickou posloupnost, jejíž součet je 465. Vypište tato vložená čísla.

30. Kolik čísel je třeba vložit mezi čísla 8 a 20, aby s danými tvořila aritmetickou posloupnost o součtu 196? Jaká je diference takto vytvořené posloupnosti?

31. Kolik čísel je třeba vložit mezi čísla 5,5 a 9, aby s danými tvořila aritmetickou posloupnost o součtu 108,75? Jaká je diference takto vytvořené posloupnosti?

32. Na střeše tvaru lichoběžníka jsou srovnány tašky do řad tak, že při hřebenu je 85 tašek a v každé následující řadě je o jednu tašku více než v řadě předcházející. Kolika taškami je pokryta střecha, má-li řada při okapu 100 tašek?

33. Klády se skládají do vrstev tak, že klády každé horní vrstvy zapadají do mezery dolní vrstvy. Do kolika vrstev se složí 102 klády, jsou-li v nejhořejší vrstvě tři klády? Kolik klád leží ve vrstvě nejspodnější?

34. Rozměry kvádru tvoří tři po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti. Určete je, víte-li, že jejich součet je 45 cm a objem kvádru je 3 240 cm^3.

35. Rozměry kvádru tvoří tři po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti. Jak jsou velké, je-li jejich součet roven 24 cm a objem kvádru je 312 cm^3?

36. Délky stran pravoúhlého trojúhelníka tvoří aritmetickou posloupnost. Větší odvěsna měří 24 cm. Vypočtěte velikost menší odvěsny a přepony.

37. Teploty Země přibývá do hloubky o 1 °C na 33 m. Jaká je teplota na dně dolu hlubokého 1 015 m, je-li v hloubce 25 m teplota 9 °C?

Výsledky.

21. 30 300. **22.** 115, 117, 119, 121. **23.** n^2. **24.** $n \geq 201$. **25.** 2, $a_n = 2n$.
26. 8, $a_n = 8n - 7$. **27.** 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22. **28.** 17, 19, 21, 23, 25.
29. 77, 93, 109. **30.** 12, 12/13. **31.** 13, 0,25. **32.** 1 480. **33.** 12, 14.
34. 12 cm, 15 cm, 18 cm. **35.** 3 cm, 8 cm, 13 cm. **36.** 18 cm, 30 cm.
37. 39 °C.

4.3 Geometrické posloupnosti a řady

1. Určete první člen a kvocient geometrické posloupnosti, jestliže její členy splňují tyto vztahy:

a) $a_1 + a_3 = 5\,,\ a_4 + a_6 = 40\ ;$

b) $a_1 - a_2 + a_3 = 15\,,\ a_4 - a_5 + a_6 = 120\ ;$

c) $a_1 - a_2 + a_3 = 18\,,\ a_4 - a_5 + a_6 = 144\ .$

2. Určete prvých šest členů geometrické posloupnosti, pro kterou platí vztahy $a_1 + a_2 + a_3 = 35$, $a_4 + a_5 + a_6 = 280$.

3. Určete prvých osm členů geometrické posloupnosti, pro kterou platí vztahy $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 45$, $a_5 + a_6 + a_7 + a_8 = 720$.

4. Geometrická posloupnost má první člen $a_1 = 2^{-4}$ a kvocient $q = 2$. Určete, pro jaké n platí $a_n + a_{n+3} = 2\,304$.

5. V geometrické posloupnosti je $a_1 = 81$, $a_2 = 54$. Určete součet všech těch členů posloupnosti, jež jsou celá čísla.

6. Vypočtěte součet prvních deseti členů geometrické posloupnosti, ve které platí $a_5 - a_7 = -144$, $a_6 + a_7 = 96$.

7. V geometrické posloupnosti je $a_2 - a_1 = 15$, $a_3 - a_2 = 60$. Určete její kvocient a součet s_5 jejích pěti prvních členů.

8. V geometrické posloupnosti je kvocient $q = 2$, n-tý člen $a_n = \frac{16}{3}$ a součet prvých n členů $s_n = \frac{21}{2}$. Určete počet členů n.

9. Vypočítejte první a pátý člen geometrické posloupnosti, jestliže součet prvních pěti členů je 242 a kvocient $q = 3$.

10. Součet prvního a čtvrtého členu geometrické posloupnosti je 195, součet druhého a třetího je 60. Sečtěte prvních pět členů.

11. V geometrické posloupnosti je součet s_n jejích prvních n členů roven 3 069. Určete toto číslo n, víte-li, že pro její členy platí: $a_1 + a_5 = 51$, $a_2 + a_6 = 102$.

12. Určete kvocient nekonstantní geometrické posloupnosti, pro kterou platí, že součet prvých deseti členů je 33krát větší než součet prvých pěti členů.

13. Součet prvních čtyř členů geometrické posloupnosti je 80. Určete je, jestliže čtvrtý člen je 27krát větší než člen první.

14. V sedmičlenné geometrické posloupnosti je součet prvních tří členů roven 26 a posledních tří 2 106. Určete první člen posloupnosti a její kvocient.

15. Přičtete-li k číslům 1, 7 a 19 stejné číslo, dostanete po řadě první tři členy geometrické posloupnosti. Určete tyto členy.

16. Přičtete-li k číslům 2, 10 a 34 stejné číslo, dostanete po řadě první tři členy geometrické posloupnosti. Určete tyto členy.

17. Přičteme-li k číslům 2, 7, 17 totéž číslo, vzniknou prvé tři členy geometrické posloupnosti. Určete tyto členy.

18. Přičteme-li k číslům x, y, z stejné číslo, dostaneme první tři členy geometrické posloupnosti. Určete v této posloupnosti první člen, kvocient a součet s_4, je-li:

a) $x = 2, y = 16, z = 58$; **b)** $x = -6, y = 15, z = 99$.

19. Přičteme-li k číslům -4, -2, 4 stejné číslo, dostaneme první tři členy geometrické posloupnosti. Určete součet prvních pěti členů posloupnosti.

20. Odečteme-li od čísel 33, 45, 63 totéž číslo, vzniknou členy a_2, a_3, a_4 geometrické posloupnosti. Určete její kvocient.

21. Stanovte takové číslo, aby zvětšeno postupně o 7, 15, 27 dalo tři po sobě jdoucí členy geometrické posloupnosti.

Výsledky.

1. a) 1, 2; **b)** 5, 2; **c)** 6, 2. **2.** 5, 10, 20, 40, 80, 160. **3.** 3, 6, 12, 24, 48, 96, 192, 384. **4.** 13. **5.** 211. **6.** $-1\,023$. **7.** 4, 1 705. **8.** 6. **9.** 2, 162. **10.** Dvě řešení: 1 023, 1 023/4. **11.** 10. **12.** 2. **13.** 2, 6, 18, 54. **14.** 2, 3. **15.** 6, 12, 24. **16.** 4, 12, 36. **17.** 5, 10, 20. **18. a)** 7, 3, 280; **b)** 7, 4, 595. **19.** 121. **20.** 3/2. **21.** 9.

22. Najděte dvě čísla taková, že jejich vložením mezi čísla 4 a 108 vznikne čtyřčlenná geometrická posloupnost.

23. Geometrická posloupnost vznikne tak, že se mezi čísla 5 a 640 vloží jistý počet čísel se součtem 630. Jaký je kvocient takto vzniklé posloupnosti a kolik čísel bylo vloženo?

24. Mezi kořeny rovnice $x^2 - 9x + 8 = 0$ vložte dvě čísla tak, aby vznikly čtyři po sobě jdoucí členy rostoucí geometrické posloupnosti. Vypište je.

25. Mezi kořeny rovnice $2x^2 + 9x + 4 = 0$ vložte dvě čísla tak, aby vznikly čtyři po sobě jdoucí členy klesající geometrické posloupnosti. Vypište je.

26. Rozhodněte, zda následující řada je konvergentní geometrickou řadou, a v kladném případě najděte její součet:

a) $-1 + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} - \cdots\,;$ **b)** $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} + \frac{1}{2-\sqrt{2}} + \frac{1}{2} + \cdots\,.$

27. Určete n-tý člen a součet geometrické řady:

a) $1 - \frac{2}{3} + \frac{4}{9} - \frac{8}{27} + \frac{16}{81} - \cdots;$ **b)** $1 - \frac{3}{4} + \frac{9}{16} - \frac{27}{64} + \frac{81}{256} - \cdots.$

28. Určete, pro která $x \in \mathsf{R}$ existuje součet nekonečné geometrické řady $1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} + \cdots$. Spočtěte jej.

29. V množině R řešte rovnici:

a) $\frac{\sqrt{2}}{2} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots\,;$ **b)** $\frac{5}{3} = x + 3x^2 + x^3 + 3x^4 + \cdots\,;$

c) $\frac{8}{x+10} = 1 - \frac{3}{x} + \frac{9}{x^2} - \frac{27}{x^3} + \cdots\,.$

30. Délky hran kvádru, které vycházejí z jednoho vrcholu, tvoří geometrickou posloupnost, přičemž jejich součet je 21 cm. Určete tyto délky, jestliže objem kvádru je 216 cm^3.

31. Povrch kvádru je 78 cm^2, součet jeho rozměrů je 13 cm. Určete jeho objem, jestliže jeho rozměry tvoří tři za sebou jdoucí členy geometrické posloupnosti.

32. Bakterie se množí půlením tak, že k dělení dojde v příznivých podmínkách vždy za půl hodiny. Kolik bakterií vznikne v příznivých podmínkách za 12 hodin z jedné bakterie?

33. Mějme 1 250 litrů 80procentního lihu. Odčerpáme z něho určité množství a totéž množství doplníme vodou opět na 1 250 l. Toto čerpání a doplnění provedeme celkem třikrát a ve směsi zbude 125 l čistého lihu. Po kolika litrech bylo čerpáno?

34. V nádobě je 25 l vody teplé $100\,^\circ$C. Odebere se 1 litr a nalije se místo něj 1 litr vody teplé $0\,^\circ$C. Pak se odebere z nádoby 1 litr směsi a dolije se opět jedním litrem vody teplé $0\,^\circ$C. Jak teplá voda je v nádobě, opakuje-li se tento postup desetkrát?

35. Počet obyvatel města vzrostl za 10 let z 25 000 na 33 600. Jaký byl průměrný roční přírůstek v procentech?

36. Jak velký vklad vzroste za 15 let na 1 346 Kč při 2% roční úrokové míře a složeném úrokování?

Výsledky.
22. 12, 36. **23.** 2, 6. **24.** $1, 2, 4, 8$. **25.** $-1/2, -1, -2, -4$.
26. a) $-2+\sqrt{2}$; **b)** $4+3\sqrt{2}$. **27. a)** $(-2/3)^{n-1}$, $3/5$; **b)** $(-3/4)^{n-1}$, $4/7$.
28. $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, $x/(x+1)$. **29. a)** $\sqrt{2}-1$; **b)** $1/2$, $-5/7$;
c) -6, 4. **30.** 3 cm, 6 cm, 12 cm. **31.** 27 cm^3. **32.** $2^{24} = 16\,777\,216$.
33. 625 l. **34.** $\doteq 66{,}5\,^\circ$C. **35.** $\doteq 3\%$. **36.** 1 000 Kč.

5.1 Kombinační čísla, binomická věta

1. Určete všechna přirozená čísla vyhovující rovnici:

a) $\binom{n-1}{n-3} - n = 8$; **b)** $\binom{n}{n-1} + \binom{n-1}{n-3} = 4$;

c) $\binom{n}{2} + \binom{n-1}{2} = 4$; **d)** $6\binom{n}{1} - \binom{n}{2} = 5\binom{n-1}{1}$;

e) $\binom{n-3}{n-5}\binom{n-3}{2} = 1$; **f)** $\binom{n-2}{n-3} = 8 - \binom{n}{n-1}$;

g) $\binom{n}{2} - \binom{n+1}{3} = 0$; **h)** $\binom{n}{n-2} + \binom{n}{n-1} = \frac{6+n^2}{2}$;

i) $\binom{n+2}{n}\binom{n}{0} - \binom{n-1}{n-3}\binom{n}{n} = \frac{n^2}{2} - \binom{8}{1}\binom{n+1}{n+1}$;

j) $\binom{6}{5}\binom{n+1}{n-1} - \binom{6}{2}\binom{n+2}{n+1} = 3!$;

k) $\frac{n!}{(n-3)!} - 4\binom{n}{2} = 0$; **l)** $\frac{(n+3)!}{(n+1)!} - 6n = 18$;

m) $\frac{(n-1)!}{(n-2)!} + \binom{n-2}{2} = 4$; **n)** $\frac{(n+6)!}{(n+4)!} + n^2 - 16n = 28$;

o) $\frac{(n+7)!}{(n+5)!} - \frac{(n-3)!}{(n-5)!} - \frac{(n+1)!}{(n-1)!} = 18n$.

2. Upravte tyto výrazy:

a) $\frac{(n+1)!}{n!} - \frac{n!}{(n-1)!}$; **b)** $\frac{(n+2)!}{n!} - 2\frac{(n+1)!}{(n-1)!} + \frac{n!}{(n-2)!}$.

Výsledky.
1. a) 7; **b)** 3; **c)** 3; **d)** 5; **e)** 5; **f)** 5; **g)** 2; **h)** 6; **i)** 8; **j)** 6; **k)** 4; **l)** 4; **m)** 4; **n)** 2; **o)** 6. **2. a)** 1; **b)** 2.

3. Pomocí binomické věty vypočtěte:

a) $\left(1 + \frac{15}{10^3}\right)^4$; **b)** $\left(1 + \frac{11}{10^3}\right)^5$;

c) $\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)^4$; **d)** $\left(\sqrt{3} - \mathrm{i}\sqrt{3}\right)^6$;

e) $\left(-1 - 2\mathrm{i}\right)^5$; **f)** $\left(-1 + \mathrm{i}\sqrt{3}\right)^6$.

4. Napište absolutní člen (tj. člen neobsahující x) mnohočlenu, který vznikne binomickým rozvojem výrazu:

a) $\left(x^3 + \dfrac{1}{x}\right)^{12}$; b) $\left(x^2 - \dfrac{2}{x}\right)^{6}$;

c) $\left(2x^2 - \dfrac{3}{x}\right)^{6}$; d) $\left(2x^2 - \dfrac{1}{x}\right)^{9}$.

5. Členy binomického rozvoje $(1 - 2x^2)^5$ uspořádejte tak, že mocniny proměnné x vzrůstají. Napište třetí člen tohoto výrazu.

6. Členy binomického rozvoje $(1 - x^2)^{12}$ uspořádejte tak, že mocniny proměnné x vzrůstají. Napište desátý člen tohoto výrazu.

7. Výraz $(\sqrt{x} - \mathrm{i}\sqrt[3]{2})^{10}$ je po umocnění uspořádán tak, že exponenty proměnné x postupně klesají. Pro jaké x má sedmý člen tohoto výrazu hodnotu $-8{,}4$?

8. Výraz $(\sqrt[3]{x} - \mathrm{i}\sqrt[4]{3})^{10}$ je po umocnění uspořádán tak, že exponenty proměnné x postupně klesají. Pro jaké kladné číslo x má pátý člen tohoto výrazu hodnotu 5 670?

9. Výraz $\left(\dfrac{\sqrt{x}}{x} + \sqrt[3]{x}\right)^{20}$ je po umocnění uspořádán tak, že exponenty proměnné x postupně vzrůstají. Určete desátý člen v tomto výrazu.

10. Napište člen binomického rozvoje $(2x^2 - 1/x)^{10}$, který obsahuje x^8.

11. Napište člen binomického rozvoje $(\frac{1}{2}x^2 - 2/y^2)^8$, který obsahuje x^8.

12. Spočtěte člen binomického rozvoje $(a + \frac{1}{3}b\sqrt{a}\,)^{27}$, který obsahuje a^{25}.

13. Spočtěte člen binomického rozvoje $(a\sqrt{b} + \frac{1}{2}b)^{16}$, který obsahuje b^{11}.

14. Spočtěte člen binomického rozvoje $(\sqrt{x} - 2\sqrt[4]{y^5})^7$, který obsahuje x^2.

15. Vypočtěte koeficient u x^{14} binomického rozvoje $(\frac{1}{2}x + 8)^{18}$.

16. Vypočtěte koeficient u x^6 binomického rozvoje $(9x + \frac{1}{3})^{19}$.

17. S využitím binomické věty spočtěte $(1 + \mathrm{i})^8 - (2\mathrm{i})^4$.

18. S využitím binomické věty spočtěte $(\sqrt{3} - \mathrm{i}\sqrt{3})^6$.

19. Pro které x se pátý člen rozvoje výrazu $(4x^{-\frac{1}{2}} - 2^{-1})^{10}$ podle binomické věty rovná číslu 105?

20. Pro které x se sedmý člen rozvoje výrazu $(\sqrt[3]{4-2x}+\sqrt[6]{3-2x})^9$ podle binomické věty rovná číslu 168?

21. Vypočtěte třetí reálný člen binomického rozvoje výrazu $(2+\mathrm{i}\sqrt{3})^9$.

22. Vypočtěte poslední reálný člen binomického rozvoje výrazu $(2-\mathrm{i}\sqrt{3})^9$.

Výsledky.
3. a) 1,061 363 550 625; **b)** 1,056 223 383 366 051; **c)** $49+20\sqrt{6}$; **d)** $216\mathrm{i}$; **e)** $-41+38\mathrm{i}$; **f)** 64. **4. a)** 220; **b)** 240; **c)** 4 860; **d)** 672. **5.** $40x^4$. **6.** $-220x^{18}$. **7.** $1/10$. **8.** 3. **9.** $\binom{20}{9}x^{-5/2}$. **10.** $13\,440x^8$. **11.** $70x^8/y^8$. **12.** $650b^4a^{25}/3$. **13.** $1\,001a^{10}b^{11}/8$. **14.** $-280x^2\sqrt[4]{y^{15}}$. **15.** 765. **16.** 9 044. **17.** 0. **18.** $216\mathrm{i}$. **19.** 8. **20.** 1. **21.** 36 288. **22.** 1 458.

5.2 Permutace, kombinace, variace

1. Zvětší-li se počet prvků o dva, zvětší se počet permutací dvanáctkrát. Kolik prvků bylo původně?

2. Zmenší-li se počet prvků o dva, zmenší se počet permutací z těchto prvků vytvořených dvacetkrát. Určete původní počet prvků.

3. Kolik prvků dává 55 kombinací druhé třídy?

4. Z kolika prvků lze vytvořit 136 kombinací druhé třídy?

5. Pro která n je počet kombinací třetí třídy z n prvků pětkrát menší než počet kombinací čtvrté třídy z $(n+2)$ prvků?

6. Určete počet prvků, které je třeba vzít, aby počet variací druhé třídy z těchto prvků vytvořených byl roven:

a) 420 ; **b)** 600 .

7. Pro která n je počet variací páté třídy z $(n+2)$ prvků 18krát větší než počet variací čtvrté třídy z n prvků?

8. Kolik přirozených čísel větších než 300 lze vytvořit z cifer 1, 2, 3, 4, jestliže se žádná cifra neopakuje?

9. Z číslic 0, 1, 3, 4, 7 se sestavují pěticiferná přirozená čísla tak, že se každá číslice použije pouze jednou. Kolik takových čísel je možné sestavit a kolik z nich je sudých?

10. Z číslic 1, 2, 3, 4, 5, 6 se sestavují pěticiferná přirozená čísla tak, že se každá číslice použije pouze jednou. Kolik takových čísel začínajících číslicí 4 je možné sestavit? Kolik takových čísel začíná číslicí 4 nebo 5?

11. Kolik rovin je určeno 12 body, jestliže: a) žádné 4 z těchto bodů neleží v jedné rovině; b) existuje rovina, ve které leží právě 5 bodů a která je jedinou rovinou obsahující více než 3 body.

12. Kolik přímek je určeno 20 body, jestliže: a) žádné 3 z těchto bodů neleží v jedné přímce; b) existuje přímka, na které leží právě 8 bodů a je to jediná přímka obsahující více než dva body.

13. Je dáno 11 bodů v rovině, z nichž žádné tři neleží v přímce a žádné čtyři na kružnici. Kolik kružnic je těmito body určeno a kolik jich prochází každým z daných bodů?

14. Kolik stran má konvexní n-úhelník, u něhož je počet úhlopříček 3,5krát větší než počet stran?

15. V osudí je 5 bílých koulí a 7 černých koulí. Kolikerým způsobem je možno vytáhnout dvě bílé a tři černé?

16. Kdosi má 5 kabátů, 7 vest a šestery kalhoty. Kolika způsoby se může obléci?

17. Ve škole se učí 10 různým předmětům a každému se učí nejvýše 1 hodinu denně. Kolikerým způsobem je možno sestavit rozvrh hodin na jeden den, je-li toho dne pět různých předmětů?

18. Pět přátel se loučí. Kolik stisků ruky si navzájem vymění? Kolik stisků ruky se vymění, jestliže jen tři se loučí (navzájem a s ostatními).

19. V lavici sedí 5 chlapců, z nichž dva bratři chtějí sedět vedle sebe. Kolika způsoby můžeme chlapce do lavice posadit?

20. Kolik čtyřčlenných delegací je možné vytvořit z 20 mužů a 5 žen, mají-li v delegaci být vždy dva muži a dvě ženy?

21. Ve třídě je 10 chlapců a 12 děvčat. Kolika způsoby je možno zvolit šestičlenný třídní výbor, mají-li v něm být tři chlapci a tři děvčata?

22. Ze šesti děvčat a čtyř chlapců se má vybrat sedmičlenná skupina, ve které budou právě dva chlapci. Kolika způsoby to lze udělat?

23. Kolik různých šestičlenných družstev je možno sestavit ze sedmi chlapců a čtyř děvčat, jestliže v družstvu mají být právě dvě nebo právě čtyři děvčata?

24. Ze šesti děvčat a čtyř chlapců se má vybrat šestičlenná skupina, ve které budou alespoň čtyři děvčata. Kolika způsoby to lze udělat?

Výsledky.
1. 2. **2.** 5. **3.** 11. **4.** 17. **5.** Dvě řešení: 14, 3. **6. a)** 21; **b)** 25. **7.** 8, 7.
8. 12. **9.** 96; 42. **10.** 120; 240. **11.** a) 220; b) 211. **12.** a) 190; b) 163.
13. 165, 45. **14.** 10. **15.** 350. **16.** 210. **17.** 30 240. **18.** 10, 9. **19.** 48.
20. 1 900. **21.** 26 400. **22.** 36. **23.** 231. **24.** 115.

6.1 Planimetrie

1. V pravoúhlém trojúhelníku je součet stran 132 cm, součet jejich čtverců 6 050 cm^2. Jak dlouhé jsou strany trojúhelníka?

2. Vypočtěte obsah pravoúhlého trojúhelníka, v němž přepona má délku 5 m a jeden z úhlů má velikost 30°.

3. Délka odvěsny pravoúhlého trojúhelníka je 84 cm a jeho obvod je roven 182 cm. Vypočítejte délku druhé odvěsny a délku přepony.

4. Pravoúhlý trojúhelník, jehož odvěsny mají velikosti v poměru 5 : 12, má přeponu 26 m. Jak velké jsou odvěsny?

5. Rozhodněte, zda trojúhelník určený stranami o velikostech $4n$, $4n^2 - 1$ a $4n^2 + 1$ je pravoúhlý.

6. Rovnostranný trojúhelník ABC má stranu délky a. Vypočítejte obsah mezikruží omezeného kružnicí trojúhelníku ABC opsanou a vepsanou.

7. Vypočtěte velikost strany a obsah rovnostranného trojúhelníka, je-li dán poloměr r opsané kružnice.

8. Vypočtěte velikost strany a obsah rovnostranného trojúhelníka opsaného kruhu o poloměru r.

9. Určete úhel ležící proti základně rovnoramenného trojúhelníka, jehož obsah je 4,5 cm^2 a rameno má velikost 3 cm.

10. Rovnoramenný trojúhelník má rameno velikosti $b = 5$ cm, součet velikosti základny a velikosti výšky na základnu je $a + v = 10$ cm. Vypočtěte obvod a obsah trojúhelníka.

11. Vypočtěte výšku na základnu a obsah rovnoramenného trojúhelníka, jehož základna má délku 10 cm a rameno je o 3 cm delší než základna.

12. Určete velikosti vnitřních úhlů rovnoramenného trojúhelníka, jehož obsah je roven 8 cm^2 a jehož rameno má délku 4 cm.

13. V trojúhelníku ABC známe $\sphericalangle ABC = 75°$, $\sphericalangle BCA = 45°$ a stranu $BC = 150$ m. Vypočítejte vzdálenost AB, kterou nelze přímo změřit.

14. Spočítejte délku strany a trojúhelníka, jehož plocha je 12 cm^2 a strany $b = 6$ cm, $c = 8$ cm.

15. V trojúhelníku je dána velikost úhlu $\gamma = 120°$, přičemž platí $a = 2b$. Určete poměr velikostí stran $c : a$.

16. Určete obsah trojúhelníka ABC, v němž pro délky stran platí $a = 4$ cm, $b = 2$ cm, $c = 2\sqrt{3}$ cm.

17. Vypočtěte obvod a obsah trojúhelníka, jehož dvě strany o délkách 1 dm a 3 dm svírají úhel 60°.

18. Čísla vyjadřující délky stran jistého trojúhelníka v centimetrech tvoří tři členy aritmetické posloupnosti s diferencí jedna. Jeden úhel tohoto trojúhelníka měří 120°. Určete délky všech stran trojúhelníka.

19. V trojúhelníku je $a = 13$ m, $b = 14$ m, $c = 15$ m. Vypočtěte výšku v_b.

20. Vypočtěte velikosti stran a, b trojúhelníka ABC, jestliže strana a je o 4 m delší než strana b a výška $v_a = 6$ m a výška $v_b = 9$ m.

21. Vypočtěte velikost největšího vnitřního úhlu trojúhelníka, jehož strany mají délky 13 cm, 8 cm a 7 cm.

22. Velikosti stran a, b, c trojúhelníka jsou dány hodnotami $2k + 1$, $k^2 - 1$, $k^2 + k + 1$, kde $k > 1$ je pevné číslo. Najděte velikost úhlu proti straně c.

23. V trojúhelníku o ploše 12 cm^2 jsou délky jeho dvou stran rovny 6 cm a 8 cm. Spočtěte velikost úhlu, který svírají.

24. O trojúhelníku ABC víme, že $a = 5$ cm, $b = 5\sqrt{3}$ cm a $\alpha = 30°$. Určete stranu c a úhly β, γ.

25. Úhly v trojúhelníku ABC splňují $\alpha : \beta : \gamma = 1 : 2 : 3$ a strana a má délku 10 cm. Určete velikosti stran b, c.

26. Veličiny α, β, γ jsou úhly libovolného trojúhelníka. Zjednodušte:

a) $\sin\alpha\cos\alpha + \sin\beta\cos\beta - \sin\gamma\cos(\alpha-\beta)\,;$

b) $\sin^2\alpha - \sin^2\beta - \sin\gamma\sin(\alpha-\beta)\,.$

27. V jakém zorném úhlu se jeví předmět 7 m dlouhý pozorovateli, který je od jednoho jeho konce vzdálen 5 m a od druhého 8 m?

28. Z věže vysoké $10\sqrt{3}$ m a vzdálené od řeky 10 m se jevila šířka řeky v zorném úhlu 15°. Určete šířku řeky v tomto místě.

Výsledky.
1. 33 cm, 44 cm, 55 cm. **2.** $25\sqrt{3}/8$ m. **3.** 13 cm, 85 cm. **4.** 10 m, 24 m. **5.** Ano. **6.** $\pi a^2/4$. **7.** $\sqrt{3}r$, $3\sqrt{3}r^2/4$. **8.** $2\sqrt{3}r$, $3\sqrt{3}r^2$. **9.** 90°. **10.** 16 cm, 12 cm^2. **11.** 12 cm, 60 cm^2. **12.** 45°, 45°, 90°. **13.** $50\sqrt{6}$ m. **14.** $a \doteq 4{,}1$ cm nebo $a \doteq 13{,}5$ cm. **15.** $\sqrt{7} : 2$. **16.** $2\sqrt{3}$ cm^2. **17.** $4+\sqrt{7}$ dm, $3\sqrt{3}/4$ dm^2. **18.** 1,5 cm, 2,5 cm, 3,5 cm. **19.** 12 m. **20.** 12 m, 8 m. **21.** 120°. **22.** 120°. **23.** 30°, 150°. **24.** 10 cm, 60°, 90° nebo 5 cm, 120°, 30°. **25.** $10\sqrt{3}$ cm, 20 cm. **26. a)** 0; **b)** 0. **27.** 60°. **28.** $10(\sqrt{3}-1)$ m.

29. Je dán čtverec s délkou strany a. Vypočtěte poloměr r kružnice, která prochází vrcholy B a C zadaného čtverce a středem S strany AD.

30. Vypočtěte délku strany čtverce, který má stejný obsah jako rovnoramenný trojúhelník se základnou $a = 8$ cm a ramenem $b = 5$ cm.

31. Je dán čtverec $ABCD$, jehož strana má délku $2a$. Vepište mu kružnici k a vypočítejte poloměr r_1 kružnice k_1, která se dotýká stran AB, AD daného čtverce a kružnice k.

32. Je dán čtverec $ABCD$, jehož strana má délku a. Okolo vrcholů A, B jsou opsány čtvrtkružnice k_1, k_2 o poloměru $\frac{1}{2}a$ dovnitř čtverce. Vypočítejte poloměr r kružnice k, která se dotýká přímky CD a obou čtvrtkružnic.

33. Obdélník má obvod 28 cm a úhlopříčku 10 cm dlouhou. Určete rozměry obdélníka.

34. Obdélník $ABCD$ má rozměry $AB = a$, $AD = b = \frac{1}{2}a$. V jakém poměru rozděluje délku úhlopříčky BD bod M, který je patou kolmice vedené bodem A k úsečce BD?

35. Vypočtěte obsah obdélníka o délce 84 cm, je-li jeho úhlopříčka o 72 cm delší než jeho šířka.

36. Je dán obdélník $ABCD$, $|AB| = 8$ cm, $|BC| = 6$ cm, P je pata kolmice vedené vrcholem A na úhlopříčku BD. Vypočtěte obsah trojúhelníka CDP.

37. Obdélník $ABCD$ má rozměry 12 dm a 5 dm. Vypočtěte vzdálenost jeho vrcholu A od úhlopříčky BD.

38. Strany obdélníka mají rozměry $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$. Spočítejte podíl délky úhlopříčky tohoto obdélníka a délky úhlopříčky čtverce se stranou velikosti $\dfrac{a+b}{2}$.

39. Vyjádřete obsah obdélníka, znáte-li poloměr r kružnice opsané a víte-li, že úhel úhlopříček je $60°$.

40. Je dán kosočtverec, jehož strana měří 5 cm a jeden vnitřní úhel $120°$. Vypočtěte obsah kosočtverce P a délku jeho delší úhlopříčky u.

41. Je dán kosočtverec, jehož strana měří 7 cm a jeden vnitřní úhel $60°$. Vypočtěte obsah kosočtverce P a délku jeho delší úhlopříčky u.

42. Je dán kosodélník se stranami 3 m a 6 m a jedním vnitřním úhlem $60°$. Vypočtěte obsah kosodélníka P a délku jeho kratší úhlopříčky u.

43. Je dán kosodélník se stranami 4 m a 5 m a jedním vnitřním úhlem $120°$. Vypočtěte obsah kosodélníka P a délku jeho delší úhlopříčky u.

44. Spočtěte obsah pravoúhlého lichoběžníka o základnách $a = 33$ cm, $c = 9$ cm, je-li jeho kosé rameno o 18 cm delší než rameno k základnám kolmé.

45. Určete obsah rovnoramenného lichoběžníka, jehož základny mají délky $a = 22$ cm, $c = 12$ cm, je-li jeho výška o 1 cm menší než délka ramena.

46. Základny rovnoramenného lichoběžníka mají délky v poměru $5 : 3$, ramena mají délku $b = 10$ cm a výška lichoběžníka je $v = 8$ cm. Určete obsah lichoběžníka.

47. Základny a výška lichoběžníka jsou v poměru $a : c : v = 6 : 4 : 3$, jeho obsah je 135 cm^2. Vypočtěte délky jeho základen a výšky.

48. Lichoběžník $ABCD$ má obsah 72 dm^2, základny jsou $AB = 1{,}4$ dm,

$CD = 0{,}6$ dm. Určete obsah trojúhelníka ACD.

49. Výška a základny lichoběžníka jsou v poměru $2 : 3 : 5$ a jeho obsah se rovná $512\ \mathrm{dm}^2$. Určete velikosti základen a výšky.

50. V lichoběžníku $ABCD$ je $AB \| CD$, $AD = BC = 13$ cm, $AB = 16$ cm, $CD = 6$ cm. Vypočítejte obsah lichoběžníka.

51. Kolik stran má konvexní mnohoúhelník, v němž je úhlopříček o 42 více než stran?

52. Kolik stran má pravidelný mnohoúhelník, v němž vnitřní úhly mají velikost $175°$?

Výsledky.
29. $5a/8$. **30.** $2\sqrt{3}$ cm. **31.** $a(3 - 2\sqrt{2})$. **32.** $a/3$. **33.** 6 cm, 8 cm. **34.** $1 : 4$. **35.** $1\,092\ \mathrm{cm}^2$. **36.** $8{,}64\ \mathrm{cm}^2$. **37.** $60/13$ dm. **38.** $\sqrt{2/(a+b)}$. **39.** $\sqrt{3}r^2$. **40.** $P = 25\sqrt{3}/2\ \mathrm{cm}^2$, $u = 5\sqrt{3}$ cm. **41.** $P = 49\sqrt{3}/2\ \mathrm{cm}^2$, $u = 7\sqrt{3}$ cm. **42.** $P = 9\sqrt{3}\ \mathrm{m}^2$, $u = 3\sqrt{3}$ m. **43.** $P = 10\sqrt{3}\ \mathrm{m}^2$, $u = \sqrt{61}$ m. **44.** $147\ \mathrm{cm}^2$. **45.** $204\ \mathrm{cm}^2$. **46.** $192\ \mathrm{cm}^2$. **47.** $a = 18$ cm, $c = 12$ cm, $v = 9$ cm. **48.** $21{,}6\ \mathrm{dm}^2$. **49.** 24 dm, 40 dm, 16 dm. **50.** $132\ \mathrm{cm}^2$. **51.** 12. **52.** 72.

53. Bod P má od kružnice o poloměru $r = 5$ cm vzdálenost $v = 8$ cm. Nechť T_1 a T_2 jsou dotykové body tečen vedených z bodu P k uvedené kružnici. Spočtěte vzdálenost bodu P od přímky vedené body T_1 a T_2.

54. Jsou dány dvě kružnice o poloměrech $r_1 = 16$ cm a $r_2 = 6$ cm. Vzdálenost jejich středů je 30 cm. Určete vzdálenost průsečíku vnějších tečen těchto kružnic od středu kružnice s menším poloměrem.

55. Je dána úsečka AB o velikosti a, jejíž střed je S. Nad průměry AB, AS, BS jsou sestrojeny půlkružnice tak, že leží v téže polorovině s hranicí AB. Vypočítejte poloměr r kružnice k, která se dotýká všech tří polokružnic.

56. Čtyři stejné válcové plechovky s průměrem podstavy 15 cm stojí tak, že se navzájem dotýkají (středy podstav jsou vrcholy čtverce). Jaká je minimální délka drátu, který tyto plechovky obepíná?

57. Kružnici o poloměru r je vepsán pravidelný šestiúhelník. Určete vzdálenost jeho strany od středu kružnice a vypočtěte jeho obsah.

58. Kružnici o poloměru r je opsán pravidelný šestiúhelník. Vypočtěte délku strany šestiúhelníka a jeho obsah.

59. Vypočtěte obsah kruhu, který je opsán pravidelnému šestiúhelníku o obsahu 60 cm^2.

60. Kruh s poloměrem 28 cm rozdělte soustřednou kružnicí tak, aby obsahy vzniklých částí byly stejné. Vypočtěte velikost poloměru takové kružnice.

61. Jsou dány dvě soustředné kružnice k_1, k_2, jejichž poloměry jsou r_1, r_2, přičemž $r_1 > r_2$. Vypočítejte poloměr r kružnice k, která je soustředná s kružnicemi k_1, k_2, tak, aby obsah mezikruží určeného kružnicemi k_1, k se rovnal obsahu mezikruží určeného kružnicemi k, k_2.

62. Pes je přivázán řetězem dlouhým 10 m ke kroužku, který lze posunovat podél vodorovné tyče dlouhé 15 m. Určete obsah plochy, po které se pes může pohybovat.

63. Dvě rovnoběžné tětivy kružnice o poloměru $r = 6$ cm mají velikost 6 cm a 10 cm. Určete vzdálenost obou tětiv.

64. Tětiva má od středu kružnice vzdálenost 8 cm a její délka je o 2 cm větší než poloměr kružnice. Určete poloměr kružnice.

65. Obvod kruhové výseče, jejíž poloměr je $r = 12$ cm, je 40 cm. Vypočtěte její obsah.

66. Vypočtěte obsah kruhové výseče, je-li její oblouk 5π m a poloměr je roven 6 m.

Výsledky.
53. 144/13 cm. **54.** 18 cm. **55.** $a/6$. **56.** $15(\pi + 4)$ cm. **57.** $\sqrt{3}r/2$, $3\sqrt{3}r^2/2$. **58.** $2\sqrt{3}r/3$, $2\sqrt{3}r^2$. **59.** $40\sqrt{3}\pi/3$ cm^2. **60.** $14\sqrt{2}$ cm. **61.** $\sqrt{(r_1^2 + r_2^2)/2}$. **62.** $100(\pi + 3)$ m^2. **63.** $\sqrt{27} + \sqrt{11}$ cm nebo $\sqrt{27} - \sqrt{11}$ cm. **64.** 10 cm. **65.** 96 cm^2. **66.** 15π m.

7.1 Stereometrie

1. Ze tří krychlí o hranách $a_1 = 3$ cm, $a_2 = 4$ cm, $a_3 = 5$ cm se slitím vyrobí jedna krychle. Vypočtěte délku její hrany a, objem V a povrch S této krychle.

2. Kvádr má výšku 8 cm a podstavu tvaru čtverce o ploše $P = 8\ \text{cm}^2$. Určete úhel, který svírá tělesová úhlopříčka kvádru s jeho podstavou.

3. Určete úhel, který svírá tělesová úhlopříčka kvádru délky 8 cm s podstavou tvaru čtverce o ploše $8\ \text{cm}^2$.

4. Kvádr má povrch $S = 166\ \text{cm}^2$, objem $V = 140\ \text{cm}^3$ a hranu $a = 4$ cm. Určete jeho zbývající rozměry.

5. Stěny kvádru, které mají společný jeden vrchol, mají obsahy $9\ \text{cm}^2$, $12\ \text{cm}^2$, $48\ \text{cm}^2$. Vypočítejte jeho objem.

6. Kvádr má hrany a, b, c. Určete jeho objem, víte-li, že $c = 4$ cm a tělesová úhlopříčka má délku rovnou součtu jeho hran $a + b$.

7. Vypočítejte velikost hran kvádru, který má obsah základny $Z = 28\ \text{cm}^2$, povrch $S = 254\ \text{cm}^2$ a objem $V = 252\ \text{cm}^3$.

8. Kvádr má hranu $a = 12$ cm, tělesovou úhlopříčku $u = 13$ cm a objem je roven $V = 144\ \text{cm}^3$. Určete zbývající rozměry kvádru.

9. Součet obsahů tří stěn kvádru procházejících jedním vrcholem je $279\ \text{cm}^2$. Rozměry kvádru jsou v poměru 2 : 3 : 5. Určete objem kvádru.

10. Rozměry kvádru jsou v poměru 2 : 3 : 6. Jeho tělesová úhlopříčka má délku 14 cm. Určete jeho objem a povrch.

11. Velikost tělesové úhlopříčky kvádru je 26 cm, velikosti hran jsou v poměru 3 : 4 : 12. Vypočtěte rozměry kvádru a, b, c.

12. Pro rozměry kvádru a, b, c platí $a : b : c = 3 : 4 : 12$. Velikost tělesové úhlopříčky je rovna 26 cm. Určete povrch kvádru.

13. V pravidelném čtyřbokém hranolu je tělesová úhlopříčka $u = 12$ cm a úhlopříčka podstavy $u_1 = 6$ cm. Vypočítejte jeho objem.

14. Pravidelný čtyřboký hranol má podstavnou hranu $a = 5$ a výšku $v = 10$. Určete tělesovou úhlopříčku.

15. Podstavou vodojemu 2 m hlubokého je pravidelný šestiúhelník, jehož strana má délku 2 m. Jaký je jeho objem?

16. Pravidelný šestiboký hranol má tělesové úhlopříčky dvou délek. Spočítejte tyto délky v případě, že hranol má podstavnou hranu délky $a = 5$ cm a délka pobočné hrany je $b = 7$ cm.

17. Určete objem hranolu, který má výšku 15 cm a jehož podstavou je rovnoběžník se stranami dlouhými 4 cm a 6 cm a s vnitřním úhlem $60°$.

18. Pravidelný čtyřstěn má výšku $v = 4$ cm. Vypočtěte délku hrany a, povrch S a objem V tohoto čtyřstěnu.

19. Pravidelný čtyřstěn má délku hrany $a = 6$ cm. Vypočtěte výšku v, povrch S a objem V tohoto čtyřstěnu.

20. Je dána výška $v = 3$ cm jehlanu, jehož podstavou je čtverec a plášť tvoří rovnostranné trojúhelníky. Vypočtěte délku hrany a, povrch S a objem V jehlanu.

21. Je dán jehlan, jehož podstavou je čtverec a plášť tvoří rovnostranné trojúhelníky. Vypočtěte výšku v, povrch S a objem V jehlanu, jestliže délka jeho hrany je $a = 6$ cm.

22. Určete úhel, který svírá stěna pravidelného čtyřbokého jehlanu s podstavou. Tělesová výška $v = 10$ cm, plocha podstavy $P = 25$ cm^2.

23. Pobočná hrana pravidelného čtyřbokého jehlanu má délku $h = 5$ cm a odchylku $\alpha = 30°$ od roviny jeho podstavy. Vypočítejte objem jehlanu.

24. Určete úhel, který svírá stěna pravidelného čtyřbokého jehlanu s podstavou. Tělesová výška $v = 5$ cm, hrana podstavy $a = 10$ cm.

25. Určete délku tělesové výšky pravidelného čtyřbokého jehlanu. Délka podstavné hrany je 4 cm; úhel, který svírá boční hrana s podstavou, je $60°$.

26. Pravidelný čtyřboký jehlan má výšku 12 cm a objem 1 296 cm^3. Určete jeho povrch.

27. Do krychle $ABCDA'B'C'D'$ je vepsán jehlan $VABCD$ tak, že podstavy obou těles jsou totožné a vrchol V jehlanu leží ve středu protější stěny krychle $A'B'C'D'$. Určete, v jakém poměru jsou povrchy krychle a jehlanu.

28. Vypočtěte povrch pravidelného komolého kolmého jehlanu, jsou-li velikosti stran čtvercových podstav 9 cm a 7 cm a má-li výška pobočné stěny velikost 12 cm.

29. O kolik procent se zvětší objem válce, jestliže se poloměr jeho podstavy zvětší o 10% a zároveň se zvětší o 20% i jeho výška?

30. Na zemi leží dvě břevna válcového tvaru. Prvé je dvakrát delší než druhé, ale jeho průměr je dvakrát menší. Které břevno má větší objem a které má větší povrch?

31. Plášť rotačního válce se má k obsahu podstavy jako 5 : 3. Určete jeho objem, má-li úhlopříčka osového řezu délku 39 cm.

32. Osový řez nádoby tvaru rotačního válce je obdélník s úhlopříčkou velikosti 39 cm. Poměr obsahu pláště a obsahu podstavy je 5 : 3. Kolik litrů vody se do nádoby vejde?

33. Z osmi koulí o poloměru 2 cm se vytvoří slitím jedna velká koule. Určete její poloměr r, objem V a povrch S.

34. Rozdíl mezi objemem koule a objemem krychle do ní vepsané je 1 cm^3. Určete objem koule.

35. Kolik procent povrchu Země by zaujímal povrch Měsíce, je-li poloměr Země 6 371 km a poloměr Měsíce 1 741 km?

36. Pravoúhlý trojúhelník s přeponou o délce 25 cm má obsah 150 cm^2. Vypočtěte objem tělesa, které vznikne rotací tohoto trojúhelníku kolem přepony.

37. Osovým řezem rotačního kužele je pravoúhlý trojúhelník, jehož plocha je rovna 9 cm^2. Vypočtěte objem kužele.

38. Plášť rotačního kužele má obsah 15π cm^2 a po rozvinutí do roviny tvoří čtvrtkruh. Určete objem kužele.

39. Obsah podstavy rotačního kužele se má k plášti jako 3 : 5. Jeho tělesová výška $v = 4$ cm. Vypočtěte objem kužele.

Výsledky.

1. $a = 6$ cm, $V = 216$ cm^3, $S = 216$ cm^2. **2.** $\doteq 63{,}4°$. **3.** $60°$. **4.** 5 cm, 7 cm. **5.** 72 cm^3. **6.** 32 cm^3. **7.** 4 cm, 7 cm, 9 cm. **8.** 3 cm, 4 cm. **9.** 810 cm^3. **10.** 288 cm^3, 288 cm^2. **11.** 6 cm, 8 cm, 24 cm. **12.** 768 cm^2. **13.** $108\sqrt{3}$ cm^3. **14.** $5\sqrt{6}$. **15.** $12\sqrt{3}$ m^3. **16.** $\sqrt{149}$ cm, $\sqrt{124}$ cm. **17.** $180\sqrt{3}$ cm^3. **18.** $a = 2\sqrt{6}$ cm, $S = 24\sqrt{3}$ cm^2, $V = 8\sqrt{3}$ cm^3. **19.** $v = 2\sqrt{6}$ cm, $S = 36\sqrt{3}$ cm^2, $V = 18\sqrt{2}$ cm^3. **20.** $a = 3\sqrt{2}$ cm, $S = 18(1+\sqrt{3})$ cm^2, $V = 18$ cm^3. **21.** $v = 3\sqrt{2}$ cm, $S = 36(1+\sqrt{3})$ cm^2, $V = 36\sqrt{2}$ cm^3. **22.** $\doteq 76°$. **23.** $125/4$ cm^3. **24.** $45°$. **25.** $2\sqrt{6}$ cm. **26.** 864 cm^2. **27.** $6 : (1+\sqrt{5})$. **28.** 514 cm^2. **29.** 45,2%. **30.** $V_1 < V_2$, $S_1 < S_2$. **31.** $4\,860\pi$ cm^3. **32.** $4{,}86\pi$ litrů. **33.** $r = 4$ cm, $V = 256\pi/3$ cm^3, $S = 64\pi$ cm^2. **34.** $\pi\sqrt{3}/(\pi\sqrt{3}-2)$ cm^3. **35.** Asi 7,5%. **36.** $1\,200\pi$ cm^3. **37.** 9π cm^3. **38.** $75\pi/8$ cm^3. **39.** 12π cm^3.

40. Je dána krychle o hraně a. Vypočtěte, kolikrát je objem koule této krychli opsané větší než objem koule této krychli vepsané.

41. Krychli o hraně a je opsán válec a koule. V jakém poměru je objem válce a koule?

42. Tělesová úhlopříčka a hrana krychle vycházející ze stejného vrcholu určují rovinu. Pro daný vrchol krychle jsou takto určeny tři roviny. Určete odchylku dvou takových rovin.

43. Kvádr má hrany a, b, c. Vypočtěte vzdálenost hrany a od mimoběžné tělesové úhlopříčky.

44. Jaké jsou rozměry kvádru a jeho objem, jestliže trojice stěn scházejících se v jednom z vrcholů má obsahy S_1, S_2 a S_3.

45. Pravidelný šestiboký hranol má tělesové úhlopříčky dvou délek u_1, u_2, pro které platí $u_1 > u_2$. Určete délku podstavné hrany a výšku.

46. Do koule poloměru r je vepsán pravidelný n-boký hranol, jehož výška je k-násobkem délky hrany podstavy hranolu. Pro $n = 3, 4$ a 6 spočítejte délku podstavné hrany a plášť hranolu.

47. Najděte poloměr kulové plochy, na které leží vrcholy pravidelného čtyřstěnu s hranou a. Potom spočítejte kosinus úhlu svíraného spojnicemi středu kulové plochy a dvou vrcholů čtyřstěnu.

48. Najděte povrch a objem pravidelného čtyřstěnu s hranou a.

49. Najděte poloměr koule vepsané pravidelnému čtyřstěnu s hranou a.

50. Najděte vzdálenost dvou mimoběžných hran pravidelného čtyřstěnu s hranou délky a.

51. Pravidelný šestiboký jehlan má boční hranu dvakrát delší než podstavnou hranu. Vyjádřete povrch a objem jehlanu pomocí poloměru r kružnice opsané podstavě.

52. Vypočtěte povrch a objem pravidelného šestibokého jehlanu, jehož tělesová výška i hrana podstavy mají délku a.

53. Určete výšku jehlanu odděleného od krychle s hranou a rovinou procházející koncovými body tří hran vycházejících z téhož vrcholu krychle.

54. Určete výšku jehlanu odděleného od kvádru, který má výšku b a čtvercovou základnu se stranou a, rovinou procházející koncovými body tří hran vycházejících z téhož vrcholu.

55. Základna pravidelného trojbokého jehlanu má tvar rovnostranného trojúhelníka se stranou a. Hrany vycházející z vrcholu jehlanu spolu svírají pravé úhly. Spočítejte výšku jehlanu.

56. Spočítejte druhou mocninu výšky v pravidelného n-bokého jehlanu s pobočnou hranou délky b a stranou základny délky a, když:

a) $n = 3$; **b)** $n = 4$;

c) $n = 6$; **d)** $n = 8$.

57. Dva rotační válce mají shodné podstavy o poloměru r. Plášť jednoho z nich se rovná povrchu druhého. Určete rozdíl jejich tělesových výšek.

58. Určete poměr objemů rovnostranného válce (osový řez je čtverec) a koule, jestliže poloměr podstavy válce je roven poloměru koule.

59. Poloměry podstav dvou rotačních válců jsou v poměru $2 : 3$, výšky v poměru $3 : 5$. V jakém poměru jsou jejich objemy?

60. Rotační válec s poloměrem základny r a výškou v je proťat rovinou rovnoběžnou s osou válce. Obsah tohoto řezu je k-násobkem ($k < 1$) obsahu osového řezu. Určete vzdálenost řezu od osy válce.

61. Rotačnímu válci s poloměrem podstavy r a výškou v je opsána koule. Označme S_K obsah kulové plochy a S_V obsah pláště válce. Za jakých předpokladů na r a v je výraz $S_K - 2S_V$ kladný, roven nule, záporný?

62. Do rotačního kužele je vepsán rotační válec, jehož výška se rovná polovině výšky kužele. Určete poměr objemů obou těles.

63. Do rotačního kužele, jehož povrchové přímky svírají s osou kužele úhel α, je vepsán válec, u něhož poloměr podstavy je k-násobkem ($k < 1$) poloměru podstavy kužele. Určete poměr obsahů pláště válce a pláště kužele.

64. Do rotačního kužele je vepsán válec. Poloměr podstavy válce je k-násobkem ($k < 1$) poloměru podstavy kužele. Najděte poměr výšky válce a výšky kužele a poměr objemu válce a objemu kužele.

65. Rotační kužel, jehož výška je rovna poloměru základny r, je proťat rovinou, která prochází vrcholem kužele. Vzdálenost roviny od středu základny kužele je rovna k-násobku poloměru základny ($k < 1/\sqrt{2}$). Spočítejte obsah průniku kužele a roviny.

66. Vypočítejte povrch a objem tělesa, které vznikne rotací rovnostranného trojúhelníka s délkou strany a kolem jedné ze stran.

67. Jak velký je středový úhel výseče, na kterou se rozvine plášť rotačního kužele, jehož osový řez je rovnostranný trojúhelník?

68. Určete povrch a objem kužele, jehož plášť po rozvinutí do roviny tvoří výseč kruhu poloměru R, jejíž obsah je roven k-násobku ($k < 1$) obsahu celého kruhu.

69. Dvě soustředné koule poloměrů r a R ($r < R$) jsou proťaty rovinou ρ, jejíž vzdálenost od společného středu koulí je d ($d < r$). Vyjádřete obsah mezikruží, které kulové plochy vytnou v rovině ρ.

70. Je dána koule o poloměru r a bod uvnitř koule, jehož vzdálenost od středu koule je d. Tímto bodem procházejí tři navzájem kolmé roviny, na kterých koule vytne tři kruhy. Najděte součet obsahů těchto kruhů.

71. Přímka p protíná kouli o poloměru r v úsečce délky l. Přímka p je průnikem dvou kolmých rovin. Koule vytíná na těchto rovinách dva kruhy. Najděte součet obsahů těchto dvou kruhů.

72. Vypočtěte hranu, povrch a objem krychle vepsané do polokoule poloměru r.

73. Určete rozměry kvádru vepsaného kouli poloměru r, jestliže: a) poměr délek hran kvádru je $1 : \sqrt{2} : 3$; b) obsahy stěn jsou v poměru $1 : 2 : 3$.

74. Vypočtěte poloměr koule opsané a poloměr koule vepsané rotačnímu kuželu s výškou v a poloměrem základny r.

75. Polokoule a kužel stojí na společné podstavě poloměru r. Výška kužele je k-násobkem ($k > 1$) poloměru podstavy. Najděte poloměr kružnice, ve které plášť kužele protíná hranici polokoule.

76. Vypočítejte poloměr kružnice, ve které se kulové plochy s poloměrem r dotýká kuželová plocha s vrcholem V vzdáleným d ($d > r$) od středu kulové plochy, a plochu vrchlíku, viditelného z bodu V.

77. Deska stolu umístěná ve výšce v nad podlahou je osvětlována bodovým zdrojem. Jak vysoko nad stolem musí být světlo umístěno, aby obsah stínu na podlaze byl k-krát ($k > 1$) větší, než je obsah desky stolu?

78. V rovině ρ leží trojúhelník ABC, jehož úhel u vrcholu C je pravý. Bod P leží ve vzdálenosti d od roviny ρ na kolmici k rovině ρ vztyčené v bodě C. Vyjádřete délku přepony AB pomocí d, $a = |PA|$, $b = |PB|$.

79. Vypočítejte vzdálenost bodu P od roviny ρ, jestliže dvě jeho spojnice s body v rovině ρ mají délku a, b a pro délky p_a, p_b kolmých průmětů těchto spojnic na rovinu ρ platí $p_a : p_b = k$, $k \neq 1$.

Výsledky.
40. $3\sqrt{3}$ krát. **41.** $1 : \sqrt{3}$. **42.** $60°$. **43.** $bc/\sqrt{b^2+c^2}$. **44.** $\sqrt{S_1S_2/S_3}$, $\sqrt{S_1S_3/S_2}$, $\sqrt{S_2S_3/S_1}$, $\sqrt{S_1S_2S_3}$. **45.** $\sqrt{u_1^2-u_2^2}$, $\sqrt{4u_2^2-3u_1^2}$.
46. $n=3$: $2\sqrt{3}r/\sqrt{4+3k^2}$, $36kr^2/(4+3k^2)$; $n=4$: $2r/\sqrt{2+k^2}$, $16kr^2/(2+k^2)$; $n=6$: $2r/\sqrt{4+k^2}$, $24kr^2/(4+k^2)$. **47.** $\sqrt{6}a/4$, $-1/3$.
48. $\sqrt{3}a^2$, $\sqrt{2}a^3/12$. **49.** $\sqrt{6}a/12$. **50.** $\sqrt{2}a/2$. **51.** $3\sqrt{3}(1+\sqrt{5})r^2/2$, $3r^3/2$. **52.** $3a^2(\sqrt{7}+\sqrt{3})/2$, $\sqrt{3}a^3/2$. **53.** $\sqrt{3}a/3$. **54.** $ab/\sqrt{a^2+2b^2}$.
55. $\sqrt{6}a/6$. **56. a)** $b^2-a^2/3$; **b)** $b^2-a^2/2$; **c)** b^2-a^2; **d)** $b^2-(2+\sqrt{2})a^2/2$. **57.** r. **58.** $3:2$. **59.** $4:15$. **60.** $r\sqrt{1-k^2}$.
61. $S_K-2S_V=0$ pro $v=2r$, v ostatních případech je kladný. **62.** $8:3$.
63. $2k(1-k)\cos\alpha$. **64.** $1-k$, $3k^2(1-k)$. **65.** $r^2\sqrt{1-2k^2}/(1-k^2)$.
66. $\pi\sqrt{3}a^2$, $\pi a^3/4$. **67.** $180°$. **68.** $\pi k(1+k)R^2$, $\pi k^2\sqrt{1-k^2}R^3/3$.
69. $\pi(R^2-r^2)$. **70.** $\pi(3r^2-d^2)$. **71.** $\pi(4r^2+l^2)/4$. **72.** $\sqrt{6}r/3$, $4r^2$, $2\sqrt{6}r^3/9$. **73.** a) $\sqrt{3}r/3$, $\sqrt{6}r/3$, $\sqrt{3}r$; b) $4r/7$, $6r/7$, $12r/7$.
74. $(v^2+r^2)/(2v)$, $r(\sqrt{r^2+v^2}-r)/v$. **75.** $r(k^2-1)/(k^2+1)$.
76. $r\sqrt{d^2-r^2}/d$, $2\pi r^2(d-r)/d$. **77.** $v/(\sqrt{k}-1)$. **78.** $\sqrt{a^2+b^2-2d^2}$.
79. $\sqrt{(k^2b^2-a^2)/(k^2-1)}$.

8.1 Analytická geometrie v rovině – lineární útvary

1. V rovnici přímky $ax-8y+7=0$ určete reálný parametr a tak, aby tato přímka procházela průsečíkem přímek $3x-5y+4=0$, $2x+2y-1=0$.

2. Jaká je rovnice přímky, která má směrnici $k=2$ a prochází průsečíkem přímek $x-5y+1=0$, $2x+3y+4=0$?

3. Určete číslo a tak, aby bod $A=[3,a]$ ležel na přímce, která má směrnici $k=4$ a prochází bodem $B=[1,4]$.

4. Napište rovnici přímky, která prochází body $A=[-4,-5]$, $B=[2,7]$. Určete průsečíky přímky se souřadnými osami. Vypočtěte obsah trojúhelníka tvořeného těmito průsečíky a počátkem soustavy souřadnic.

5. Určete průsečík P přímky p s přímkou $q : 3x+6y+11=0$, jestliže přímka p prochází bodem $A=[1,3]$ a středem S úsečky BC, pro jejíž krajní body platí $B = [-2, 4]$, $C = [-2, -3]$.

6. Jsou dány přímky $a : x - 5y + 1 = 0$, $b : 2x + 3y + 4 = 0$. Jejich průsečík označíme P a hledáme směrnicový tvar rovnice přímky, která prochází bodem P a má směrnici $k = 2$.

7. Napište směrnicový tvar rovnice přímky, na které leží bod $A = [-4, 3]$ a jejíž vzdálenost od počátku je rovna $d = 5$.

8. Rovnicemi $p : 5x-y+10 = 0$, $q : 8x+4y+9 = 0$ jsou zadány dvě přímky. Napište obecnou rovnici přímky, která prochází průsečíkem přímek p, q a je přitom rovnoběžná s přímkou $r : x + 3y + 2 = 0$.

9. Určete obecnou rovnici přímky rovnoběžné s přímkou $4x - 2y = 1$ a procházející průsečíkem přímek $2x - 3y + 9 = 0$, $-x + 2y - 7 = 0$.

10. Rovnicemi $p : x = 8 + 5t$, $y = 6 - 10t$, $t \in \mathsf{R}$, $q : y = -2x + 3$ jsou dány dvě přímky p a q. Určete vzájemnou polohu těchto přímek.

11. Je dán bod T a rovnice přímky p. Napište obecnou rovnici přímky, která je kolmá na přímku p a přitom prochází bodem T:

a) $p : y = -11x + 9$, $T = [0, -6]$; **b)** $p : y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}$, $T = \left[\frac{1}{4}, -\frac{1}{20}\right]$.

12. Napište obecnou rovnici přímky, která je osou úsečky AB, pro jejíž krajní body platí $A = [1, 2]$, $B = [-3, 0]$.

13. Napište obecnou rovnici přímky, která prochází bodem $[-3, 0]$ a je kolmá na přímku $y = 2x - 5$.

14. Napište obecnou rovnici přímky, která prochází bodem $B = [-3, 6]$ a která je kolmá na přímku q určenou body $K = [-2, 1], L = [3, 2]$. Nalezněte dále průsečík P obou kolmic.

15. Napište obecnou rovnici přímky, která prochází bodem $B = [4, -3]$ a která je kolmá na přímku q určenou body $K = [3, 4], L = [2, 1]$. Nalezněte dále průsečík P obou kolmic.

16. Napište rovnici přímky (v obecném tvaru), na níž leží bod $[5, 6]$ a která je kolmá na přímku procházející body $[-2, 4]$, $[6, -1]$.

17. Napište rovnici přímky (v obecném tvaru), která je kolmá na přímku $2x-y-1 = 0$ a prochází průsečíkem přímek $x-2y-2 = 0$, $-2x+y-5 = 0$.

18. Napište obecný tvar rovnice přímky, která prochází průsečíkem přímek $x + 2y - 5 = 0$, $3x - 2y + 1 = 0$ a je kolmá na přímku $2x + 3y + 7 = 0$.

19. Průsečíkem přímek $p: 5x - y + 10 = 0\,,\ q: 8x + 4y + 9 = 0$ prochází přímka kolmo ke přímce $r: x + 3y = 0$. Napište její obecnou rovnici.

20. Rovnicemi $p: 3ax - 8y + 13 = 0\,,\ q: (a+1)x - 2ay - 21 = 0$, v nichž a je parametr, jsou dány přímky p, q. Pro jakou hodnotu parametru a jsou tyto přímky rovnoběžné?

21. Jsou dány body $K = [1, 2]$, $L = [-1, 0]$, $M = [2, -1]$. Určete neznámou souřadnici bodu $N = [?, 3]$ tak, aby vektory $\overrightarrow{KL}$ a $\overrightarrow{MN}$ byly navzájem kolmé.

22. Najděte bod P souměrný s bodem $Q = [-2, -9]$ podle přímky, která je dána rovnicí $p: 2x + 5y - 38 = 0$.

23. Vypočtěte souřadnice bodu B, který je souměrně sdružen podle přímky $2x - 5y - 1 = 0$ s bodem $A = [5, -4]$.

24. Rovnicí $2x - 5y + 10 = 0$ je zadána přímka p. Určete obecnou rovnici přímky, která je kolmá k přímce p a prochází středem úsečky vyťaté na přímce p souřadnicovými osami.

25. Je dána přímka $r: 3x - y + 1 = 0$ a bod P jako průsečík přímek $p: 2x + 3y - 11 = 0$ a $q: 3x - 3y + 6 = 0$. Napište obecnou rovnici přímky kolmé na přímku r a procházející bodem P.

Výsledky.
1. 8. **2.** $26x - 13y + 44 = 0$. **3.** 12. **4.** $2x - y + 3 = 0$, $[-3/2, 0]$, $[0, 3]$, $9/4$. **5.** $[-3, -1/3]$. **6.** $y = 2x + 44/13$. **7.** $y = 4x/3 + 25/3$. **8.** $x + 3y - 2 = 0$. **9.** $2x - y - 1 = 0$. **10.** $p \| q$. **11. a)** $x - 11y - 66 = 0$; **b)** $40x + 20y - 9 = 0$. **12.** $2x + y + 1 = 0$. **13.** $x + 2y + 3 = 0$. **14.** $5x + y + 9 = 0$, $P = [-2, 1]$. **15.** $x + 3y + 5 = 0$, $P = [1, -2]$. **16.** $8x - 5y - 10 = 0$. **17.** $x + 2y + 10 = 0$. **18.** $3x - 2y + 1 = 0$. **19.** $6x - 2y + 13 = 0$. **20.** 2, $-2/3$. **21.** -2. **22.** $[10, 21]$. **23.** $[1, 6]$. **24.** $10x + 4y + 21 = 0$. **25.** $x + 3y - 10 = 0$.

26. Pod jakým úhlem protíná přímka procházející body $[2, -5]$, $[-1, 1]$ přímku o rovnici $3x - y - 4 = 0$?

27. Napište obecnou rovnici přímky, která prochází počátkem souřadnic a protíná přímku $2x + y - 4 = 0$ pod úhlem $45°$.

28. Určete odchylku dvou přímek, jejichž rovnice jsou:

a) $2x + y = 0,\ 3x - y - 4 = 0$; **b)** $5x - y + 7 = 0,\ 2x - 3y + 1 = 0$;
c) $x + y = 0,\ x - (2 - \sqrt{3})y = 1$.

29. Určete odchylku přímky $x + y + 1 = 0$ od osy y.

30. Určete odchylku přímky $\sqrt{3}x + 3y + 7 = 0$ od osy y.

31. V rovnici $3x + by - 1 = 0$ určete parametr b tak, aby přímka popsaná touto rovnicí svírala s kladnou poloosou x úhel $30°$.

32. Rovnicemi $p : 8x + 6y = 2$, $q : x = 2 + 4t,\ y = 3t,\ t \in \mathsf{R}$, jsou dány dvě přímky. Určete průsečík a odchylku těchto přímek.

33. Rovnicemi $p : 2x - y + 3 = 0$, $q : x = 1 - 2t,\ y = 3 + t,\ t \in \mathsf{R}$, jsou dány dvě přímky. Rozhodněte o jejich vzájemné poloze a vypočtěte jejich odchylku.

34. Přímka p je dána rovnicí $3x + y + 5 = 0$ a přímka q body $A = [3, 0]$, $B = [7, 2]$. Určete průsečík P obou přímek a najděte jeho vzdálenost v od bodu $M = [4, -1]$.

35. Přímka p je dána rovnicí $2x + y + 5 = 0$ a přímka q body $A = [1, 0]$, $B = [7, 2]$. Určete průsečík P obou přímek a najděte jeho vzdálenost v od bodu $M = [2, -3]$.

36. Který bod přímky $5x - 4y - 28 = 0$ má tu vlastnost, že jeho vzdálenost od bodů $M = [1, 5]$ a $N = [7, -3]$ je stejná?

37. Vzdálenost počátku souřadnic od přímky $y = kx + 5$ je rovna $\sqrt{5}$. Spočtěte hodnotu parametru k v rovnici přímky.

38. Určete vzdálenost dvou rovnoběžek $y = \sqrt{3}x - 4,\ y = \sqrt{3}x + 2$.

39. Dokažte, že přímky $p : 2x - 3y = 6,\ q : 4x - 6y = 25$ jsou rovnoběžné a určete jejich vzdálenost.

40. Bod $M = [x, y]$ se pohybuje v rovině tak, že rozdíl čtverců vzdáleností bodu M od bodů $A = [-a, a]$, $B = [a, -a]$ je roven konstantě $4a^2$. Napište rovnici dráhy bodu M.

41. Napište rovnice přímek, které jsou rovnoběžné s přímkou zadanou rovnicí $3x - 4y - 10 = 0$ a jsou od ní vzdálené $d = 3$.

42. Jaký vztah splňují souřadnice $[x, y]$ všech bodů P, které mají od bodů $A = [7, -3]$, $B = [-2, 1]$ stejnou vzdálenost.

43. Rovnicemi $2x - 3y = 6$, $4x - 6y - 25 = 0$ jsou dány dvě rovnoběžné přímky. Určete jejich vzdálenost.

44. Přímka prochází bodem $P = [-2, 5]$ a její vzdálenost od bodu $Q = [3, 5]$ je rovna $d = \sqrt{5}$. Určete její obecnou rovnici.

45. Určete parametrické vyjádření těžnice t_a v trojúhelníku ABC, pro jehož vrcholy platí $A = [0, 5]$, $B = [5, 1]$, $C = [3, 6]$.

46. Je dán trojúhelník ABC, $A = [3, 5]$, $B = [-2, 1]$, $C = [0, -3]$. Najděte délku těžnice t_b a napište obecnou rovnici přímky, na níž těžnice leží.

47. Je dán trojúhelník ABC, $A = [3, 5]$, $B = [-2, 1]$, $C = [0, -3]$. Najděte délku těžnice t_a a napište obecnou rovnici přímky, na níž těžnice leží.

48. Je dán trojúhelník ABC: $A = [8, 1]$, $B = [2, 6]$, $C = [-4, 2]$. Napište obecnou rovnici přímky, na které leží těžnice z vrcholu A. Dále vypočtěte souřadnice těžiště T daného trojúhelníka.

49. Je dán trojúhelník ABC: $A = [-6, 3]$, $B = [2, -1]$, $C = [7, 4]$. Napište obecnou rovnici přímky, na které leží těžnice z vrcholu C. Dále vypočtěte souřadnice těžiště T daného trojúhelníka.

50. Určete délku výšky v_c v trojúhelníku ABC a napište obecnou rovnici přímky, na které výška v_c leží, když $A = [1, 1]$, $B = [2, 3]$, $C = [-4, -3]$.

51. Je dán trojúhelník ABC: $A = [6, 1]$, $B = [-3, 4]$, $C = [1, -4]$. Napište obecnou rovnici přímky, na které leží výška z vrcholu C. Dále vypočtěte souřadnice bodu P, který je patou této výšky (tj. P je průnik hledané přímky a strany AB).

52. Je dán trojúhelník ABC: $A = [-1, 5]$, $B = [0, -2]$, $C = [6, 1]$. Napište obecnou rovnici přímky, na které leží výška z vrcholu A. Dále vypočtěte souřadnice bodu P, který je patou této výšky (tj. P je průnik hledané přímky a strany BC).

53. Určete velikosti všech vnitřních úhlů trojúhelníka ABC, když souřadnice vrcholů jsou: $A = [1, 1]$, $B = [2, -1]$, $C = [3, 2]$.

54. Určete souřadnice paty výšky trojúhelníka ABC spuštěné z vrcholu A na stranu BC, jestliže $A = [1, -1]$, $B = [3, 3]$, $C = [4, 1]$.

55. Ověřte, že trojúhelník ABC je pravoúhlý a vypočítejte jeho obsah, jestliže souřadnice jeho vrcholů jsou $A = [4, -1]$, $B = [3, 4]$, $C = [1, 2]$.

56. Určete velikost těžnic v trojúhelníku ABC, jestliže souřadnice jeho vrcholů jsou $A = [4, 7]$, $B = [-1, 3]$, $C = [1, -1]$.

57. Vypočítejte obsah trojúhelníka ABC, jestliže souřadnice jeho vrcholů jsou $A = [1, 1]$, $B = [6, 3]$, $C = [4, 8]$.

58. Je dán trojúhelník o vrcholech $A = [1, 2]$, $B = [4, 3]$, $C = [5, 8]$. Napište obecnou rovnici přímky, na které leží těžnice jdoucí bodem B a určete vzdálenost bodu A od této přímky.

59. Rozhodněte, zda útvar $ABCD$ je rovnoběžník, a v kladném případě upřesněte, zda jde o čtverec, obdélník či kosočtverec, když souřadnice bodů jsou dány takto:

a) $A = [4, 1]$, $B = [6, 7]$, $C = [0, 5]$, $D = [-2, -1]$;

b) $A = [0, 0]$, $B = [3, -4]$, $C = [6, 0]$, $D = [3, 4]$.

60. Určete souřadnice zbývajících vrcholů rovnoběžníka $ABCD$, je-li dáno $A = [-2, -1]$, $B = [-1, -3]$ a průsečík úhlopříček $S = [0, -2]$.

61. Jsou dány body $A = [1, -1]$, $B = [2, 3]$, $C = [-1, p]$. Spočítejte hodnotu parametru p tak, aby útvar $ABCD$ byl obdélník, a dopočtěte souřadnice zbývajícího vrcholu.

Výsledky.

26. $45°$. **27.** $3x - y = 0$, $x + 3y = 0$. **28. a)** $45°$; **b)** $45°$; **c)** $60°$.
29. $45°$. **30.** $60°$. **31.** $-3\sqrt{3}$. **32.** $[22/25, -21/25]$, $90°$. **33.** Kolmé různoběžky. **34.** $P = [-1, -2]$, $v = \sqrt{26}$. **35.** $P = [-2, -1]$, $v = \sqrt{20}$.
36. $[10, 11/2]$. **37.** ± 2. **38.** 3. **39.** $\sqrt{13}/2$. **40.** $x - y = \pm a$.
41. $3x - 4y + 5 = 0$, $3x - 4y - 25 = 0$. **42.** $18x - 8y - 53 = 0$. **43.** $\sqrt{13}/2$.
44. $x - 2y + 12 = 0$, $x + 2y - 8 = 0$. **45.** $x = 4t$, $y = 5 - 3t/2$, $t \in \langle 0, 1\rangle$.
46. $7/2$, $y = 1$. **47.** $2\sqrt{13}$, $3x - 2y + 1 = 0$. **48.** $x + 3y - 11 = 0$, $T = [2, 3]$. **49.** $x - 3y + 5 = 0$, $T = [1, 2]$. **50.** $6\sqrt{5}/5$, $x + 2y + 10 = 0$.
51. $-3x + y + 7 = 0$, $P = [3, 2]$. **52.** $2x + y - 3 = 0$, $P = [2, -1]$. **53.** $90°$, $45°$, $45°$. **54.** $[21/5, 3/5]$. **55.** 6. **56.** $2\sqrt{13}$, $7/2$, $\sqrt{145}/2$. **57.** $29/2$.
58. $2x + y - 11 = 0$, $7\sqrt{5}/5$. **59. a)** kosočtverec; **b)** kosočtverec.
60. $C = [2, -3]$, $D = [1, -1]$. **61.** $p = 15/4$, $D = [-2, -1/4]$.

8.2 Analytická geometrie v rovině – kuželosečky

1. Určete souřadnice středu S a poloměr r kružnice:

a) $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$; **b)** $x^2 + y^2 + 6x + 6y - 18 = 0$;

c) $x^2 + y^2 - 20x - 2\sqrt{69}y = 0$; **d)** $x^2 + y^2 + 6x - 8y = 0$.

2. Kružnice, jejíž střed leží na ose x, prochází body $[5, 4]$, $[7, 0]$. Určete její rovnici.

3. Napište rovnice obou kružnic, které mají tu vlastnost, že procházejí bodem $[2, 4]$ a dotýkají se zároveň x-ové i y-ové osy.

4. Určete rovnici kružnice se středem v bodě $[1, 2]$, která se dotýká přímky, jejíž rovnice je $8x + 15y + 13 = 0$.

5. Kružnice má střed v bodě $[2, -1]$ a poloměr 5. Určete obecný tvar rovnic tečen vedených k této kružnici, je-li x-ová souřadnice bodu dotyku 6.

6. Určete souřadnice středu S a poloměr r kružnice procházející body:

a) $[2, 9]$, $[7, 4]$, $[5, 8]$; **b)** $[3, 7]$, $[8, 2]$, $[6, 6]$.

7. Určete souřadnice středu S a poloměr r kružnice opsané trojúhelníku s vrcholy v bodech $[-1, 3]$, $[0, 2]$, $[1, -1]$.

8. Určete rovnici kružnice opsané trojúhelníku ABC, jestliže souřadnice vrcholů jsou $A = [-1, 3]$, $B = [0, 2]$, $C = [1, -1]$.

9. Určete rovnici kružnice, která prochází bodem $K = [-4, 4]$ a průsečíky kružnice $x^2 + y^2 - 4x - 4y = 0$ s přímkou $y = x$.

10. Napište rovnici kružnice procházející počátkem soustavy souřadnic a průsečíky přímky $p : x + y + a = 0$ s kružnicí $k : x^2 + y^2 = a^2$, $a \neq 0$.

11. Napište rovnice tečen vedených z počátku soustavy souřadnic ke kružnici $x^2 + y^2 - 10x - 4y + 25 = 0$.

12. Pro které hodnoty parametru L je křivka $x^2 + y^2 + 2x - 6y + L = 0$ kružnicí? Určete souřadnice jejího středu S a poloměr r.

13. Vypočítejte hodnotu parametru a tak, aby přímka p s rovnicí $y = ax$ byla tečnou kružnice s rovnicí $(x - 5)^2 + y^2 = 1$.

14. Středem kružnice $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 23 = 0$ prochází přímka q, která je kolmá na přímku p danou rovnicí $p :\ 5x + 2y - 24 = 0$. Napište obecnou rovnici přímky q.

15. Napište rovnici přímky, která prochází bodem $A = [2, -1]$ a středem kružnice $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 11 = 0$.

16. Určete rovnici kružnice, která prochází body $A = [3, 0]$, $B = [-1, 2]$ a jejíž střed leží na přímce $x - y + 2 = 0$.

17. Napište rovnici kružnice, která se dotýká souřadnicových os a prochází bodem $A = [2, 1]$.

18. Určete rovnici přímky, která prochází středy kružnic, jejichž rovnice jsou $x^2 - 10x + y^2 + 6y + 18 = 0$, $x^2 + 6x + y^2 + 2y + 1 = 0$.

19. Napište obecnou rovnici přímky, která prochází středem kružnice k kolmo k přímce p, když $k : x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$, $p : 2x - 3y + 4 = 0$.

20. Napište rovnici kružnice, která prochází bodem $M = [9, 2]$ a dotýká se obou souřadnicových os.

21. Napište rovnici kružnice, která leží v prvním kvadrantu, dotýká se souřadnicových os a vzdálenost jejího středu od počátku je $2\sqrt{2}$. Napište rovnice všech tečen této kružnice, které jsou rovnoběžné se souřadnicovými osami.

22. Napište rovnici kružnice, která má střed v bodě $S = [5, 4]$ a na přímce $x + 2y - 3 = 0$ vytíná úsečku délky $d = 8$.

23. Napište obecnou rovnici přímky, která prochází bodem $A = [1, -1]$ a středem kružnice $x^2 + y^2 - 6x - 6y = 0$.

Výsledky.
1. a) $S = [2, -3]$, $r = 4$; **b)** $S = [-3, -3]$, $r = 6$; **c)** $S = [10, \sqrt{69}]$, $r = 13$; **d)** $S = [-3, 4]$, $r = 5$. **2.** $(x-2)^2 + y^2 = 25$. **3.** $(x-10)^2 + (y-10)^2 = 100$, $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 4$. **4.** $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 9$. **5.** $4x + 3y - 30 = 0$, $4x - 3y - 36 = 0$. **6. a)** $S = [2, 4]$, $r = 5$; **b)** $S = [3, 2]$, $r = 5$. **7.** $S = [-4, -1]$, $r = 5$. **8.** $(x+4)^2 + (y+1)^2 = 25$. **9.** $x^2 + (y-4)^2 = 16$. **10.** $x^2 + y^2 + ax + ay = 0$. **11.** $y = 0$, $20x - 21y = 0$. **12.** $L < 10$, $S = [-1, 3]$, $r = \sqrt{10 - L}$. **13.** $\pm 1/\sqrt{24}$. **14.** $2x - 5y + 3 = 0$. **15.** $3x + y - 5 = 0$. **16.** $(x-3)^2 + (y-5)^2 = 25$. **17.** $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$, $(x-5)^2 + (y-5)^2 = 25$. **18.** $x + 4y + 7 = 0$. **19.** $3x + 2y + 1 = 0$. **20.** $(x-5)^2 + (y-5)^2 = 25$, $(x-17)^2 + (y-17)^2 = 17^2$. **21.** $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 4$, $x = 0$, $x = 4$, $y = 0$, $y = 4$. **22.** $(x-5)^2 + (y-4)^2 = 36$. **23.** $2x - y - 3 = 0$.

24. Určete souřadnice středu S a délky a, b obou poloos elipsy:
a) $25x^2+4y^2-150x-16y+141=0$; **b)** $x^2+6y^2-6x+24y-3=0$;
c) $25x^2+y^2-50x-6y+9=0$; **d)** $4x^2+9y^2+8x-36y+4=0$.

25. Určete druh kuželosečky $4x^2+y^2-6y+5=0$, souřadnice jejího středu S a velikosti obou poloos a, b.

26. Určete druh kuželosečky $5x^2-30x+4y^2+32y+89=0$, velikosti jejích poloos a, b a vzdálenost v jejího středu od bodu $P=[-1,4]$.

27. Určete střed elipsy $x^2+4x+4y^2+8y-8=0$ a vypočítejte jeho vzdálenost od přímky s rovnicí $3x+4y+5=0$.

28. Napište rovnice tečen elipsy $3x^2+6y^2=18$, které jsou kolmé na přímku $x-y=0$.

29. Určete všechny hodnoty parametru q, pro něž přímka $y=2x+q$ a elipsa $\dfrac{x^2}{18}+\dfrac{y^2}{9}=1$ mají jediný společný bod. Určete souřadnice tohoto bodu.

30. Dokažte, že rovnice $9x^2+25y^2-54x-50y-119=0$ je rovnicí elipsy, a napište obecnou rovnici přímky, která prochází středem této elipsy rovnoběžně s přímkou $3x+y+2=0$.

31. Elipsa má osy totožné s osami souřadné soustavy a prochází body se souřadnicemi $[2,3]$, $[-1,-4]$. Najděte její rovnici.

Výsledky.
24. a) $S=[3,2]$, $a=2$, $b=5$; **b)** $S=[3,-2]$, $a=6$, $b=\sqrt{6}$; **c)** $S=[1,3]$, $a=1$, $b=5$; **d)** $S=[-1,2]$, $a=3$, $b=2$. **25.** Elipsa, $S=[0,3]$, $a=1$, $b=2$. **26.** Elipsa, $a=2$, $b=\sqrt{5}$, $v=4\sqrt{5}$. **27.** $[-2,-1]$, 1. **28.** $x+y+3=0$, $x+y-3=0$. **29.** $q=9$: $[-4,1]$; $q=-9$: $[4,-1]$. **30.** $3x+y-10=0$. **31.** $7x^2+3y^2=55$.

32. Určete rovnici paraboly procházející bodem $A=[-5,4]$, jestliže rovnice její vrcholové tečny je $y-3=0$ a osa paraboly má rovnici $x+7=0$.

33. Určete rovnici osy paraboly $y=x^2+2x$.

34. Určete souřadnice ohniska paraboly $x=y^2-4y$.

35. Určete číslo $k\in \mathsf{R}$ tak, aby přímka $x+y+k=0$ a parabola $x=4y^2$ měly jediný společný bod.

36. Napište rovnici přímky jdoucí vrcholem kuželosečky $x^2 + y - 4 = 0$ a bodem $A = [-3, 1]$.

37. Určete druh kuželosečky $y^2 + 8x + 2y - 31 = 0$, souřadnice jejího vrcholu V a jeho vzdálenost v od bodu $Q = [-6, 4]$.

38. Určete druh kuželosečky $x^2 - 4x + 6y + 22 = 0$, souřadnice jejího vrcholu V a jeho vzdálenost v od bodu $N = [-1, 3]$.

39. Napište rovnici paraboly, která je souměrná podle osy y a prochází body $P = [0, 8]$ a $M = [6, -2]$.

40. Napište rovnici paraboly, která je souměrná podle osy y a prochází body $P = [0, 0]$, $M = [6, -2]$.

41. Parabola $y^2 = 2px$ má tečnu $3x - 4y + 6 = 0$. Vypočítejte p a souřadnice dotykového bodu.

42. Určete rovnici tečny ke grafu funkce f, která je rovnoběžná s danou přímkou p, když $f(x) = x^2 + 3x + 3\,,\ p : y = 2x + 1$.

43. Určete rovnici tečny k parabole $y^2 = 9x$, která je kolmá na přímku s rovnicí $2x + 5y = 0$. Určete také souřadnice bodu dotyku.

44. Najděte rovnice tečen vedených z bodu $A = [1, -3]$ k parabole $x^2 = 8y$.

45. Najděte rovnici paraboly, která má vrchol v počátku, osu v ose x a dotýká se přímky $3x - 2y + 8 = 0$.

46. Vrcholem paraboly $y^2 - 4y - x + 3 = 0$ veďte přímky p, q pod úhlem 45° vzhledem k ose paraboly. Napište obecné rovnice těchto přímek.

47. Napište rovnici tečny paraboly $y^2 = 9x$, která je rovnoběžná s přímkou $9x - 4y + 11 = 0$.

48. Vrcholem paraboly $y = x^2 + 4x - 3$ veďte přímku, která prochází počátkem souřadnic.

49. Parabola, jejíž osa je rovnoběžná s jednou ze souřadných os, má vrchol V a prochází bodem M. Najděte její rovnici, když:

a) $V = [3, -7]\,,\ M = [4, -5]$; **b)** $V = [5, 4]\,,\ M = [0, \frac{13}{2}]$.

50. Parabola má osu rovnoběžnou s osou x a prochází body se souřadnicemi $[0, 0]$, $[\frac{9}{2}, 9]$, $[12, -6]$. Najděte její rovnici.

51. Určete souřadnice středu, ohnisek a rovnice obou asymptot u hyperboly, jejíž rovnice je $x^2 - 4y^2 + 6x + 5 = 0$.

52. Napište rovnici hyperboly, která má vrcholy v ohniskách a ohniska ve vrcholech elipsy o rovnici $9x^2 + 25y^2 = 225$.

53. Napište rovnice tečen hyperboly $16x^2 - 9y^2 = 144$, které jsou kolmé k přímce dané parametrickými rovnicemi $x = 4t + 8$, $y = 1 - t$.

54. Určete rovnice asymptot hyperboly $-\dfrac{x^2}{4} + (y+1)^2 = 1\,.$

55. Určete velikosti obou poloos a, b a souřadnice středu S hyperboly o rovnici $9x^2 - 25y^2 - 18x - 100y - 316 = 0$.

56. Určete druh kuželosečky $4x^2 - 8x - 3y^2 - 12y - 20 = 0$, velikosti jejích poloos a, b a vzdálenost v jejího středu od bodu $M = [-3, 4]$.

Výsledky.
32. $(x+7)^2 = 4(y-3)$. **33.** $x = -1$. **34.** $[-15/4, 2]$. **35.** $1/16$.
36. $x - y + 4 = 0$. **37.** Parabola, $V = [4, -1]$, $v = 5\sqrt{5}$. **38.** Parabola, $V = [2, -3]$, $v = 3\sqrt{5}$. **39.** $5x^2 + 18y - 144 = 0$. **40.** $x^2 + 18y = 0$.
41. $9/4$, $[2, 3]$. **42.** $8x - 4y + 11 = 0$. **43.** $25x - 10y + 9 = 0$, $[9/25, 9/5]$. **44.** $y = 3x/2 - 9/2$, $y = -x - 2$. **45.** $y^2 = 24x$.
46. $x - y + 3 = 0$, $x + y - 1 = 0$. **47.** $9x - 4y + 4 = 0$.
48. $7x - 2y = 0$. **49. a)** $(y+7)^2 = 4(x-3)$, $(x-3)^2 = (y+7)/2$;
b) $(y-4)^2 = -5(x-5)/4$, $(x-5)^2 = 10(y-4)$. **50.** $(y-3)^2 = 6(x+3/2)$.
51. $[-3, 0]$, $[-3 - \sqrt{5}, 0]$, $[-3 + \sqrt{5}, 0]$, $y = (x+3)/2$, $y = -(x+3)/2$.
52. $9x^2 - 16y^2 = 144$. **53.** $4x - y \pm 8\sqrt{2} = 0$. **54.** $y = \pm x/2 - 1$.
55. $S = [1, -2]$, $a = 5$, $b = 3$. **56.** Hyperbola, $a = \sqrt{3}$, $b = 2$, $v = 2\sqrt{13}$.

9.1 Slovní úlohy

1. Vsuneme-li mezi cifry dvoumístného čísla číslici 7, dostaneme jeho jedenáctinásobek. Postavíme-li před ně jedničku, dostaneme pětinásobek. Které je to číslo?

2. Číslo 1 086 rozložte na tři sčítance tak, aby první sčítanec byl o 267 větší než druhý a třetí sčítanec se rovnal součtu prvních dvou.

3. Vsuneme-li mezi cifry dvoumístného čísla číslici 9, dostaneme jeho jedenáctinásobek. Zaměníme-li pořadí jeho cifer, zvětší se o 45. Které je to číslo?

4. Ve dvojciferném čísle je počet desítek o tři větší než počet jednotek. Jestliže původní číslo násobíme číslem napsaným týmiž číslicemi, avšak v opačném pořádku, dostaneme součin 3 478. Určete číslo stanovené těmito podmínkami.

5. Součet tří čísel je 100. Dělíme-li druhé z nich prvním, dostaneme podíl 5 a zbytek 1. Týž výsledek dostaneme dělením třetího čísla druhým. Která to jsou čísla?

6. Součet dvou čísel a jejich druhých mocnin je 152; součet rozdílů daných čísel a rozdílů jejich druhých mocnin je 68. Určete obě čísla.

7. Součet druhých mocnin po sobě jdoucích přirozených čísel je 1 201. Určete obě čísla.

8. Které číslo je třikrát větší než jeho pětina zvětšená o 6?

9. Která dvě sousední přirozená čísla mají tu vlastnost, že rozdíl jejich čtverců se rovná 15?

10. Synovi je 16 let, otec je o 24 roky starší. Za kolik let bude otec třikrát starší než jeho syn?

11. Ve třídě je třikrát více chlapců než děvčat. Kdyby 8 chlapců a 8 dívek odešlo ze třídy, zbylo by pětkrát více chlapců než děvčat. Kolik je ve třídě chlapců a kolik děvčat?

12. Vyjádřete v minutách nejkratší dobu, za kterou se po čtvrté hodině ručičky hodinek kryjí.

13. Kryjí-li se právě ručičky hodinek, vyjádřete v minutách nejkratší dobu, za kterou budou ručičky hodinek stát proti sobě.

14. Obsah obdélníka je 375 cm^2. Jeho šířka je 60% délky. Vypočítejte strany obdélníka.

15. Pracovní doba se zkrátí z 8 na 7 hodin. O kolik procent je třeba zvýšit produktivitu práce, aby výroba stoupla o 5 procent?

16. V textilní továrně pracuje 822 zaměstnanců, přitom počet mužů tvoří jen 37% počtu žen. Kolik je v továrně zaměstnáno žen a mužů?

17. Částku 440 Kč rozdělte na tři části tak, že 40% první části se rovná

50% části druhé a součet druhé a třetí části se rovná první části.

18. Původní cena zboží byla nejprve o 30% zvýšena a později byla tato nová cena snížena o 30%. Vzrostla nebo klesla výsledná cena v porovnání s cenou původní? A o kolik procent?

19. Kolik kilogramů vody je nutno odpařit z 500 kg celulózy obsahující 85% vody, aby se obsah vody snížil na 75%?

20. Mořská voda obsahuje 5% soli. Kolik kilogramů vody, která žádnou sůl neobsahuje, je nutno přidat ke 30 kg mořské vody, aby obsah soli poklesl na 1,5%?

21. Ocelová tyč obdélníkového průřezu je 6 m dlouhá, 50 mm široká, 20 mm vysoká a její hmotnost je 48 kg. Vypočtěte hmotnost tyče o rozměrech 4,5 m, 60 mm a 15 mm, je-li zhotovena ze stejného materiálu.

22. Ocelová tyč čtvercového průřezu je 8 m dlouhá, 50 mm široká a její hmotnost je 160 kg. Jak dlouhá je ocelová tyč (opět čtvercového průřezu), jejíž hmotnost je 39,6 kg a šířka 30 mm?

23. Zedník položí za 6 dnů 13,5 m^3 cihlového zdiva, pracuje-li 9 hodin denně. Za kolik dnů položí 11 m^3 zdiva, pracuje-li denně 8 hodin?

24. Zedník položí za 9 dnů 14,4 m^3 cihlového zdiva, pracuje-li 8 hodin denně. Kolik m^3 zdiva položí za 6 dnů, pracuje-li 7 hodin denně?

25. Dva dělníci dokončí práci za 12 dní. Kolik dní by musel pracovat každý sám, aby tuto práci vykonal, potřebuje-li jeden dělník k jejímu provedení o 10 dní více než druhý?

26. Dva dělníci by vykonali určitou práci společně za 12 dní. Kdyby první vykonal polovinu práce a druhý ji po něm dokončil, trvala by práce celkem 25 dní. Za kolik dní by tuto práci vykonal každý dělník sám o sobě?

27. Jeden dělník vykoná nějakou práci za 10 dní, zatímco druhý dělník tutéž práci vykoná za 15 dní. Za jak dlouho vykonají oba dělníci tuto práci společně?

28. Vysokoškolák má prostudovat skripta o 120 stranách. Studium si rozdělí tak, aby každý den nastudoval stejný počet stran. Kdyby zvýšil počet denně nastudovaných stran o 4, prostudoval by skripta o jeden den dříve. Kolik dní bude skripta studovat?

29. Nádržku lze doplnit jedním přívodem za a hodin, druhým za b hodin. Za kolik hodin se nádržka naplní, jsou-li otevřeny oba přívody?

30. Nádrž se naplní současně dvěma přítokovými rourami za 18 minut. Naplňuje-li se pouze první rourou, naplní se nádrž o 48 minut dříve, než když se naplňuje pouze rourou druhou. Za kolik minut se nádrž naplní, je-li otevřena pouze první roura?

31. Nádrž s objemem V hl se naplní prvním kohoutkem za 15 minut, druhým kohoutkem za 20 minut a třetím kohoutkem za 30 minut. Za jakou dobu se naplní nádrž, otevřou-li se všechny tři kohoutky současně?

32. Honza jel po řece z tábořiště A na tábořiště B proti proudu 1 hodinu. Kdyby jel obráceně a pádloval stejnou rychlostí, cesta by mu trvala 20 minut. Jakou rychlostí v_H Honza pádloval a jaká byla rychlost proudu v_p, jestliže vzdálenost mezi tábořišti byla 4 km?

33. Vláďa jede na loďce od vesnice A do vesnice B proti proudu řeky 1 hodinu 40 minut. Kdyby rychlost proudu byla poloviční, jízda by mu trvala pouze 1 hodinu. Jaká je rychlost proudu v_p a jakou rychlostí v_V Vláďa pádluje, je-li vzdálenost obou vesnic 5 km?

34. Automobil jel z místa A do místa B vzdáleného 150 km. Kdyby jel rychlostí o 10 km za hodinu větší, byl by do B dojel o 30 minut dříve. Jak velkou rychlostí automobil jel?

35. Turista ušel 45 km. Kdyby urazil za hodinu o 500 metrů méně, došel by k cíli o 1 hodinu později. Jak rychle šel?

36. Ze stanice A do stanice B vyjel v 9 hodin 35 minut nákladní vlak rychlostí 60 km/h. V 9 hodin 55 minut vyjel ze stanice B směrem do stanice A rychlík rychlostí 90 km/h. V kolik hodin a kolik minut se tyto vlaky potkají a jak daleko od stanice A k tomu dojde, jestliže vzdálenost obou stanic je 270 km?

37. V 9 hodin 15 minut vyjel ze stanice nákladní vlak rychlostí 60 km/h. V 9 hodin 55 minut za ním z téže stanice vyjel osobní vlak, a to rychlostí 75 km/h. V kolik hodin a kolik minut bude nákladní vlak dojet vlakem osobním a jak daleko od výchozí stanice k tomu dojde?

38. Dvě tělesa se současně začala rovnoměrně pohybovat po ramenech pravého úhlu k jeho vrcholu. Obě byla vzdálena 52 cm od vrcholu pravého úhlu a jedno se pohybuje rychlostí 4 cm/s a druhé rychlostí 6 cm/s. Jaká je nejkratší doba, za kterou se ocitnou ve vzdálenosti 26 cm od sebe?

39. Dvě tělesa, která jsou od sebe vzdálena 48 m, se dají současně do pohybu po přímé dráze proti sobě. Jedno urazí za první vteřinu 4 m a v každé následující sekundě vždy o 2 m více než ve vteřině předcházející. Druhé se pohybuje rovnoměrně rychlostí 10 m za sekundu. Za kolik sekund dojde ke srážce?

40. Ze dvou míst A a B vzdálených od sebe 135 km vyjedou současně proti sobě dva automobily, které se za hodinu a půl potkají. Jak daleko od A se to stane, potřebuje-li automobil vyjíždějící z A k projetí 10 km cesty o 3 minuty více času než ten, který vyjíždí z B?

41. Ze stanice A vyjede vlak do 80 km vzdálené stanice B a za půl hodiny vyjede další vlak rychlostí, která je o 32 km/h menší. Jaká je rychlost prvního vlaku, když dorazí do stanice B o 1 hodinu a 45 minut dříve, než druhý vlak?

42. Dva cyklisté současně vyjeli z osady do města vzdáleného 56 km. Druhý cyklista za každou hodinu zůstal za prvním o 2 km pozadu, a proto přijel do města o půl hodiny později. Vypočítejte rychlost prvního i druhého cyklisty.

43. Ze dvou míst A a B vzdálených 24 km vyrazí současně proti sobě chodec rychlostí 4 km/h a cyklista rychlostí 12 km/h. Kdy a kde se potkají?

44. Cyklista vyjel z místa A v 15 hodin odpoledne rychlostí 20 km/h. O 2 hodiny později vyjel z téhož místa motocyklista na stejnou trať rychlostí 60 km/h. V kolik hodin dohoní cyklistu?

45. Parník pluje po proudu rychlostí 18 km/h, ale proti proudu pouze rychlostí 14 km/h. Určete rychlost toku řeky i rychlost parníku v klidné vodě.

46. Dva parníky jezdí na trati 5 km dlouhé. První vyjíždí o 5 minut dříve než druhý a k cíli dojedou současně, protože druhý parník ujede za hodinu o 3 km více než první. Jaká je průměrná hodinová rychlost obou parníků?

47. Z vesnice je do hájovny 8 km. Právě v tu dobu, kdy ze vsi vyšla žena hajného, vyšel jí hajný z hájovny naproti. Oba šli rychlostí 4 km/h. S hajným vyběhl jeho pes rychlostí 10 km/h. Pes utíkal tak dlouho, dokud nepotkal hajnou, potom se vrátil k hajnému a tak běhal od jednoho k druhému, dokud se nepotkali. Kolik km pes naběhal?

Výsledky.

1. 25. **2.** $138 + 405 + 543$. **3.** 27. **4.** 74. **5.** 3, 16, 81. **6.** 10, 6; 10, -7; -11, 6; -11, -7. **7.** 24, 25. **8.** 45. **9.** 7, 8. **10.** Před 4 roky. **11.** 48, 16. **12.** 240/11 minuty. **13.** 360/11 minuty. **14.** 25 cm, 15 cm. **15.** 20%.

16. 600 žen, 222 mužů. **17.** 220 Kč, 176 Kč, 44 Kč. **18.** Klesla o 9%.
19. 200 kg. **20.** 70 kg. **21.** 32,4 kg. **22.** 5,5 m. **23.** 5,5 dne.
24. 8,4 m^3. **25.** 30 a 20 dní. **26.** 30 a 20 dní. **27.** 6 dní. **28.** 6 dní.
29. $ab/(a+b)$ hodin. **30.** 24 minuty. **31.** 6 minut 40 sekund.
32. $v_H = 8$ km/h, $v_p = 4$ km/h. **33.** $v_p = 4$ km/h, $v_V = 7$ km/h.
34. 50 km/h. **35.** 5 km/h. **36.** 11 hodin 35 minut, 120 km.
37. 12 hodin 35 minut, 200 km. **38.** 7 s. **39.** Za 3 s. **40.** 60 km.
41. 64 km/h. **42.** 16 km/h, 14 km/h. **43.** Za 1,5 hodiny, 6 km od A.
44. V 18 hodin. **45.** 2 km/h, 16 km/h. **46.** 12 km/h, 15 km/h.
47. 10 km.

Ukázky písemných přijímacích testů a jejich řešení

Písemná přijímací zkouška z matematiky na Přírodovědeckou fakultu Univerzity Karlovy obsahuje v posledních letech sedm rovnocenně hodnocených příkladů, k jejichž vyřešení je 60 minut.

Uchazeči při ní mohou jako jedinou pomůcku používat neprogramovatelné kalkulátory; matematické tabulky či jiné pomocné texty povoleny nejsou. V případě, kdy je pro vyřešení příkladu nezbytná znalost komplikovanějšího vzorce, je takový vzorec uveden jako součást zadání.

Kromě správnosti výsledku je samozřejmě kontrolována i správnost postupu (na čistě uhádnuté řešení nebude brán zřetel). Vypracování testu by tak mělo být nejen čitelné, ale i přehledné a jednoznačné. Není kupříkladu možno vedle správné varianty řešení uvádět i variantu chybnou: co neplatí, je třeba škrtnout — co není škrtnuté, je hodnoceno.

Body za jednotlivé příklady jsou zpravidla přiznávány i za jednotlivé části řešení, nejsou-li chybné. Za drobné chyby (např. některé numerické) ve správném postupu se pak v zásadě sráží méně bodů, než kdyby se jednalo o chybnou úvahu. Patřičnou pozornost je nutno věnovat i bezchybnému opsání úlohy.

Jsou-li při řešení rovnic prováděny tzv. neekvivalentní úpravy (například u některých typů rovnic logaritmických nebo u rovnic s odmocninami), je třeba na závěr provést zkoušku správnosti řešení.

PÍSEMNÁ PŘIJÍMACÍ ZKOUŠKA Z MATEMATIKY 2000

1. Určete podmínky existence výrazu a výraz upravte:

$$\frac{\sin 2x}{1-\sin x}+\frac{\sin 2x}{1+\sin x}\ .$$

2. V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic: $\begin{aligned} x+\ y^2 &= 7\ , \\ xy^2 &= 12\ . \end{aligned}$

3. V oboru reálných čísel řešte rovnici: $\sqrt{x+8}-\sqrt{5x+20}+2 = 0\ .$

4. V oboru reálných čísel řešte nerovnici: $\log_2 \dfrac{3x+1}{x+1} \leq -1$.

5. Je dán trojúhelník ABC, $A = [3,5]$, $B = [-2,1]$, $C = [0,-3]$. Najděte délku těžnice t_a a napište obecnou rovnici přímky, na níž těžnice leží.

6. Určete všechna přirozená čísla vyhovující rovnici:

$$\frac{(n+6)!}{(n+4)!} + n^2 - 16n = 28 .$$

7. Pro rozměry kvádru a, b, c platí $a : b : c = 3 : 4 : 12$. Velikost tělesové úhlopříčky je rovna 26 cm. Určete povrch kvádru.

Řešení

1. $\dfrac{\sin 2x}{1-\sin x} + \dfrac{\sin 2x}{1+\sin x} = 2\sin x\cos x\Big(\dfrac{1}{1-\sin x} + \dfrac{1}{1+\sin x}\Big) =$

$= 2\sin x\cos x \cdot \dfrac{1+\sin x + 1 - \sin x}{(1-\sin x)(1+\sin x)} = 2\sin x \cos x \cdot \dfrac{2}{1-\sin^2 x} =$

$= \dfrac{4\sin x\cos x}{\cos^2 x} = 4 \cdot \dfrac{\sin x}{\cos x} = 4\,\mathrm{tg}\, x\,.$

Podmínky: $\sin x \neq \pm 1 \Longrightarrow x \neq \pi/2 + k\pi, k \in \mathsf{Z}$.

2. $\left.\begin{aligned} x + y^2 &= 7 \\ y^2 &= 12/x \end{aligned}\right\} \quad\Longrightarrow\quad x + 12/x = 7 \quad\Longrightarrow\quad x^2 - 7x + 12 = 0 \quad\Longrightarrow$

$(x-3)(x-4) = 0 \quad\Longrightarrow\quad x_1 = 3, x_2 = 4$.
Pro $x_1 = 3$ je $y^2 = 4 \Longrightarrow y_{11} = 2, y_{12} = -2$.
Pro $x_2 = 4$ je $y^2 = 3 \Longrightarrow y_{21} = \sqrt{3}, y_{22} = -\sqrt{3}$.
Soustava má tedy čtyři řešení: $[3,2], [3,-2], [4,\sqrt{3}], [4,-\sqrt{3}]$.

3. Obě strany rovnice $\sqrt{x+8} + 2 = \sqrt{5x+20}$ umocníme:

$$x + 8 + 4\sqrt{x+8} + 4 = 5x + 20 ,$$
$$\sqrt{x+8} = (4x+8)/4 = x + 2 .$$

Po dalším umocnění je: $x + 8 = x^2 + 4x + 4 \quad\Longrightarrow\quad x^2 + 3x - 4 = 0 \quad\Longrightarrow$
$(x+4)(x-1) = 0 \quad\Longrightarrow\quad x_1 = -4, x_2 = 1$.
Provedením zkoušky se přesvědčíme, že původně zadanou rovnici řeší pouze hodnota $x_2 = 1$.

4. Protože $\log_2 z \leq -1 \iff z \in (0, 2^{-1}\rangle$, je třeba řešit nerovnici

$$0 < \frac{3x+1}{x+1} \leq \frac{1}{2} .$$

Vztah $0 < \dfrac{3x+1}{x+1}$ je splněn, mají-li čitatel i jmenovatel zlomku na pravé straně „stejné znaménko“. To nastane pro $x \in (-\infty, -1) \cup (-\frac{1}{3}, +\infty)$.

Druhou nerovnici $\dfrac{3x+1}{x+1} \leq \dfrac{1}{2}$ nejprve upravme:

$$\frac{3x+1}{x+1} - \frac{1}{2} \leq 0 \implies \frac{6x+2-x-1}{2(x+1)} \leq 0 \implies \frac{5x+1}{2(x+1)} \leq 0 .$$

Poslední nerovnost je splněna, mají-li čitatel a jmenovatel „opačná znaménka“ nebo je-li čitatel roven nule. Tedy v případě $x \in (-1, -\frac{1}{5}\rangle$.

Množinou řešení dané logaritmické nerovnice je pak průnik obou výše uvedených množin, tj. interval $(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{5}\rangle$.

5. Těžnice t_a je spojnice vrcholu A a středu úsečky BC. Označíme-li tento střed jako S, jsou jeho souřadnice: $S = (B+C)/2 = [-1, -1]$.
Délka těžnice t_a je pak rovna vzdálenosti bodů A a S:

$$\sqrt{(3-(-1))^2 + (5-(-1))^2} = \sqrt{16+36} = 2\sqrt{13}.$$

Směrovým vektorem přímky procházející body A, S je například vektor $\vec{s} = A - S = (4, 6)$.

Parametricky můžeme tuto přímku vyjádřit ve tvaru: $\begin{matrix} x = 3 + 4t \\ y = 5 + 6t \end{matrix}$, kde t je reálný parametr. Odečteme-li nyní od trojnásobku první rovnice dvojnásobek rovnice druhé, dostaneme $3x - 2y = -1$. Obecnou rovnicí přímky, na které leží těžnice t_a, je tak rovnice $3x - 2y + 1 = 0$.

6. $\dfrac{(n+6)(n+5)(n+4)!}{(n+4)!} + n^2 - 16n = 28 \implies$ (po zkrácení)
$(n+6)(n+5)+n^2-16n = 28 \implies n^2+11n+30+n^2-16n-28 = 0 \implies$
$2n^2 - 5n + 2 = 0 \implies (2n-1)(n-2) = 0 \implies n_1 = \frac{1}{2}, n_2 = 2$.

Protože $\frac{1}{2}$ není číslo přirozené, je jediným řešením dané rovnice hodnota $n_2 = 2$.

7. Pro velikost tělesové úhlopříčky u kvádru platí: $u = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.
Protože $b = 4a/3$ a $c = 12a/3 = 4a$, můžeme psát:

$$u^2 = a^2 + 16a^2/9 + 16a^2 = a^2(17 + 16/9) = 169a^2/9 = (13a/3)^2.$$

Je tedy $u = 13a/3$, tj. $a = 3u/13 = 3 \cdot 26/13 = 6$ cm. Zbývající rozměry kvádru pak jsou $b = 4 \cdot 6/3 = 8$ cm a $c = 4 \cdot 6 = 24$ cm.
Povrch kvádru S nakonec spočteme jako:
$S = 2(ab + ac + bc) = 2 \cdot (48 + 144 + 192) = 2 \cdot 384 = 768$ cm^2.

PÍSEMNÁ PŘIJÍMACÍ ZKOUŠKA Z MATEMATIKY 2002

1. Najděte podmínky existence výrazu a výraz zjednodušte:
$$\left[\left(\frac{r}{s} - \frac{s}{r}\right) : (r+s) - r \cdot \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s}\right)\right] : \frac{1+r}{s} \quad .$$

2. V oboru reálných čísel řešte nerovnici: $|x-4| + 2x \le |2x-1|$.

3. V oboru reálných čísel řešte rovnici: $3^{2x-1} + 9^{x-1} - 3^{2x-4} = 315$.

4. Určete reálnou a imaginární část komplexního čísla $z = \left(2 - 2\mathrm{i}\right)^6$.

5. Délky stran pravoúhlého trojúhelníka tvoří aritmetickou posloupnost. Větší odvěsna měří 24 cm. Spočtěte velikost menší odvěsny a přepony.

6. Automobil jel z místa A do místa B vzdáleného 150 km. Kdyby jel rychlostí o 10 km za hodinu větší, byl by do B dojel o 30 minut dříve. Jak velkou rychlostí automobil jel?

7. Napište rovnici přímky (v obecném tvaru), která je rovnoběžná s přímkou $3x+y+2=0$ a prochází středem elipsy $9x^2+25y^2-54x-50y-119=0$.

Řešení

1. $\left[\left(\frac{r}{s} - \frac{s}{r}\right) : (r+s) - r \cdot \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{s}\right)\right] : \frac{1+r}{s} =$
$$= \left[\frac{r^2 - s^2}{sr} \cdot \frac{1}{r+s} - \frac{r(s-r)}{rs}\right] \cdot \frac{s}{1+r} =$$

$$= \left[\frac{(r+s)(r-s)}{sr(r+s)} + \frac{r(r-s)}{sr}\right] \cdot \frac{s}{1+r} =$$
$$= \left[\frac{r-s}{sr} + \frac{r(r-s)}{sr}\right] \cdot \frac{s}{1+r} = \frac{(r-s)+r(r-s)}{sr} \cdot \frac{s}{1+r} =$$
$$= \frac{(r-s)(1+r)}{r} \cdot \frac{1}{1+r} = \frac{r-s}{r} \ .$$

Podmínky: $s \neq 0, r \neq 0, r \neq -1, r \neq -s$.

2. Abychom v nerovnici odstranili absolutní hodnoty, je třeba reálnou osu rozdělit na tři intervaly.

I) Pro $x \in (-\infty, \frac{1}{2})$:
$-(x-4) + 2x \leq -(2x-1) \implies -x+4+2x \leq -2x+1 \implies$
$3x \leq -3 \implies x \leq -1$, tj. $x \in (-\infty, -1\rangle$.
Nerovnici tak vyhovují $x \in (-\infty, \frac{1}{2}) \cap (-\infty, -1\rangle = (-\infty, -1\rangle$.

II) Pro $x \in \langle \frac{1}{2}, 4\rangle$:
$-(x-4) + 2x \leq 2x-1 \implies -x+4+2x \leq 2x-1 \implies$
$-x \leq -5 \implies x \geq 5$, tj. $x \in \langle 5, +\infty)$.
Protože $\langle \frac{1}{2}, 4\rangle \cap \langle 5, +\infty) = \emptyset$, nemá uvažovaná nerovnice na tomto intervalu žádné řešení.

III) Pro $x \in (4, +\infty)$:
$x-4+2x \leq 2x-1 \implies x \leq 3$, tj. $x \in (-\infty, 3\rangle$.
Opět je $(4, +\infty) \cap (-\infty, 3\rangle = \emptyset$, a tak ani zde další řešení zadané nerovnice nenajdeme.

Celkem: množinou řešení dané nerovnice je interval $(-\infty, -1\rangle$.

3. Upravujme nejprve levou stranu rovnice:

$$3^{2x-1} + 3^{2(x-1)} - 3^{2x-4} = 315 \ ,$$
$$3^{2x} \cdot (3^{-1} + 3^{-2} - 3^{-4}) = 315 \ ,$$
$$3^{2x} \cdot (\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{9} - \tfrac{1}{81}) = 315 \ ,$$
$$3^{2x} \cdot (\tfrac{27+9-1}{81}) = 315 \ ,$$
$$3^{2x} \cdot \tfrac{35}{81} = 315 \ .$$

Odtud $3^{2x} = 315 \cdot \frac{81}{35} = 9 \cdot 81 = 9^3 = 3^6$, tedy $2x = 6$, tj. $x = 3$.

4. $2 - 2\mathrm{i} = \sqrt{8}\big(\frac{\sqrt{2}}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\big) = \sqrt{8}\big(\cos(-\frac{\pi}{4}) + \mathrm{i}\sin(-\frac{\pi}{4})\big)$ a z Moivreovy věty:

$z = (2-2\mathrm{i})^6 = \left(\sqrt{8}\right)^6 \cdot \left(\cos(-\frac{6\pi}{4}) + \mathrm{i}\sin(-\frac{6\pi}{4})\right) = 8^3 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}\right) =$
$= 512 \cdot (0 + \mathrm{i}\cdot 1) = 512\mathrm{i}$.

Jiný postup:
$z = \left(2(1-\mathrm{i})\right)^6 = 2^6 \cdot (1-\mathrm{i})^6$; dle binomické věty dále je:

$$(1-\mathrm{i})^6 = \tbinom{6}{0}1^6(-\mathrm{i})^0 + \tbinom{6}{1}1^5(-\mathrm{i})^1 + \tbinom{6}{2}1^4(-\mathrm{i})^2 + \tbinom{6}{3}1^3(-\mathrm{i})^3 + \tbinom{6}{4}1^2(-\mathrm{i})^4 + \tbinom{6}{5}1^1(-\mathrm{i})^5 + \tbinom{6}{6}1^0(-\mathrm{i})^6 = 1 - 6\mathrm{i} + 15\mathrm{i}^2 - 20\mathrm{i}^3 + 15\mathrm{i}^4 - 6\mathrm{i}^5 + \mathrm{i}^6 = 1 - 6\mathrm{i} - 15 + 20\mathrm{i} + 15 - 6\mathrm{i} - 1 = 8\mathrm{i};$$

celkem máme: $z = 2^6 \cdot 8\mathrm{i} = 64 \cdot 8\mathrm{i} = 512\mathrm{i}$.

Reálná část daného komplexního čísla je tedy 0, imaginární část je 512.

5. Označme délku větší odvěsny jako a, diferenci aritmetické posloupnosti jako d. Délka menší odvěsny je tedy rovna $a - d$, délka přepony $a + d$. Z Pythagorovy věty potom vyplývá:
$$(a-d)^2 + a^2 = (a+d)^2 \ ,$$
$$a^2 - 2ad + d^2 + a^2 = a^2 + 2ad + d^2 \ ,$$
$$a^2 - 4ad = 0 \ ,$$
$$a(a-4d) = 0 \ .$$
Protože $a \neq 0$, je $a - 4d = 0$, tedy $d = a/4 = 24/4 = 6$ cm.

   Délka menší odvěsny tak je rovna $a - d = 24 - 6 = 18$ cm, délka přepony $a + d = 24 + 6 = 30$ cm.

6. Označme rychlost automobilu jako v. Dobu, za kterou urazil vzdálenost z A do B, jako t.
Platí: $150 = v \cdot t$,
$150 = (v + 10)(t - 0,5) = v \cdot t + 10t - v/2 - 5$.
Odečteme-li od druhé rovnice rovnici prvou, dostáváme
$0 = 10t - v/2 - 5$, tj. $10t = (v + 10)/2$.
Pro hledanou rychlost v tak platí:
$$150 = v \cdot \frac{v+10}{20} \implies v^2 + 10v - 3000 = 0 \implies (v-50)(v+60) = 0 \ .$$
Musí být $v > 0$, a úloha má tudíž jediné řešení: $v = 50$ km/h.

7. Určeme nejprve střed elipsy:
$$9(x^2 - 6x) + 25(y^2 - 2y) = 119 \ ,$$
$$9(x^2 - 6x + 9) - 81 + 25(y^2 - 2y + 1) - 25 = 119 \ ,$$
$$9(x-3)^2 + 25(y-1)^2 = 225 \ ,$$

$$\frac{(x-3)^2}{25} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1 \ .$$

Vidíme, že středem elipsy je bod o souřadnicích $[3, 1]$.

Každá rovnoběžka s přímkou $3x + y + 2 = 0$ má tvar $3x + y + c = 0$, kde c je reálný parametr. Má-li na ní ležet bod $[3, 1]$, musí parametr c splňovat rovnici $3 \cdot 3 + 1 + c = 0$, odkud $c = -10$.

Rovnice hledané rovnoběžky tedy je $3x + y - 10 = 0$.

PÍSEMNÁ PŘIJÍMACÍ ZKOUŠKA Z MATEMATIKY 2003

1. Zjednodušte tento výraz a najděte, za jakých podmínek existuje:
$$x^{-\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}} + \frac{(1-x)(1-x^{-\frac{1}{2}})}{1-\sqrt{x}} \ .$$

2. Najděte všechna reálná čísla x, která vyhovují nerovnosti:
$$x + 3 \leq \frac{2(x+3)}{x-2} \ .$$

3. Vypočítejte všechny úhly x (vyjádřete je v obloukové míře, tj. radiánech), které vyhovují rovnici: $\cos^2 x - \sin^2 x = 2 + 5\cos x$.

4. Najděte obecnou rovnici přímky p, která prochází body $A[m, 0]$, $B[0, -3]$, kde m je reálný parametr. Dále najděte obecnou rovnici přímky q, která prochází bodem $C[m, -3]$ kolmo na přímku p.

5. Výpočtem najděte komplexní čísla z_1, z_2, která vyhovují této soustavě rovnic:
$$\begin{aligned} 2\,z_1 - \phantom{\mathrm{i}\,} z_2 &= -1 + 6\mathrm{i} \ , \\ z_1 + \mathrm{i}\,z_2 &= 5 + 4\mathrm{i} \ . \end{aligned}$$

6. Po odečtení prvního členu geometrické posloupnosti od členu čtvrtého dostaneme 315, po odečtení druhého členu od třetího dostaneme 60. Spočítejte kvocient této posloupnosti.

7. Výpočtem najděte všechna reálná čísla x, která splňují rovnici:
$$2\log(3x+1) - \log(x+11) = \log 4 + \log(x-1) \ .$$

1. $x^{-\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}}+\dfrac{(1-x)(1-x^{-\frac{1}{2}})}{1-\sqrt{x}}=\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{x}+\dfrac{(1+\sqrt{x})(1-\sqrt{x})(1-\frac{1}{\sqrt{x}})}{1-\sqrt{x}}=$

$$=\frac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{x}+(1+\sqrt{x})(1-\frac{1}{\sqrt{x}})=\frac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{x}+1-\frac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{x}-1=2\sqrt{x}\,.$$

Podmínky: $x>0, x\neq 1$.

2. Nerovnost nejprve upravme:

$$0\leq\frac{2(x+3)}{x-2}-(x+3)\implies 0\leq(x+3)\Big(\frac{2}{x-2}-1\Big)\implies$$

$$0\leq(x+3)\cdot\frac{2-x+2}{x-2}\implies 0\leq\frac{(x+3)(4-x)}{x-2}\quad.$$

Poslední nerovnost je splněna, mají-li čitatel a jmenovatel „stejné znaménko“ nebo je-li čitatel roven nule:

čitatel i jmenovatel nabývají kladných hodnot pro

$$x\in(-3,4)\cap(2,+\infty)=(2,4)\,;$$

čitatel i jmenovatel nabývají záporných hodnot pro

$$x\in\big((-\infty,-3)\cup(4,\infty)\big)\cap(-\infty,2)=(-\infty,-3)\,;$$

čitatel je roven nule pro $x=-3$ nebo $x=4$.

Závěr: množinou řešení dané nerovnice je $(-\infty,-3\rangle\cup(2,4\rangle$.

3. Užitím rovnosti $\sin^2 x=1-\cos^2 x$ ihned dostáváme kvadratickou rovnici pro $\cos x$ ve tvaru:

$$\cos^2 x-(1-\cos^2 x)=2+5\cos x\ ,$$
$$2\cos^2 x-5\cos x-3=0\ .$$

Jejím řešením je $(\cos x)_{1,2}=\frac{1}{4}\big(5\pm\sqrt{25+24}\big)=\frac{1}{4}(5\pm 7)$.

Protože funkce kosinus nabývá v reálném oboru pouze hodnot z intervalu $\langle -1,1\rangle$, nevede kořen $(\cos x)_1=3$ k žádnému řešení dané goniometrické rovnice.

Všechna řešení tak vyhovují rovnosti $(\cos x)_2=-\frac{1}{2}$, odkud vyplývá:

$$x=\tfrac{2}{3}\pi+2k\pi\ \text{ nebo }\ x=\tfrac{4}{3}\pi+2k\pi,\ k\in\mathsf{Z}.$$

4. Směrový resp. normálový vektor přímky p označme $\vec{s}_p$ resp. $\vec{n}_p$.

Je $\vec{s}_p=\overrightarrow{BA}=(m,3)$, $\vec{n}_p=(3,-m)$, a obecná rovnice přímky p má tudíž tvar $3x-my+c=0$. Hodnotu reálného parametru c dopočítáme dosazením například bodu B: $3 \cdot 0 - m \cdot (-3) + c = 0$, tedy $c = -3m$.

Pro normálový vektor přímky q platí $\vec{n}_q = \vec{s}_p = (m, 3)$, a její obecné vyjádření tak má tvar $mx + 3y + d = 0$. Parametr d zjistíme tentokrát dosazením bodu C: $m \cdot m + 3 \cdot (-3) + d = 0$, tj. $d = 9 - m^2$.

Hledané rovnice přímek tak jsou:

$$p : 3x - my - 3m = 0\,,$$
$$q : mx + 3y + 9 - m^2 = 0\,.$$

5. Vynásobme nejprve první rovnici soustavy číslem i:

$$\begin{aligned} 2\mathrm{i}\, z_1 - \mathrm{i}\, z_2 &= -\mathrm{i} + 6\mathrm{i}^2\,, \\ z_1 + \mathrm{i}\, z_2 &= 5 + 4\mathrm{i}\,. \end{aligned}$$

Sečtením obou rovnic (je $6\mathrm{i}^2 = -6$) máme $(1 + 2\mathrm{i})z_1 = -1 + 3\mathrm{i}$, odkud

$$z_1 = \frac{-1+3\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}} = \frac{-1+3\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}} \cdot \frac{1-2\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}} = \frac{-1+3\mathrm{i}+2\mathrm{i}+6}{1^2-(2\mathrm{i})^2} = \frac{5+5\mathrm{i}}{1+4} = 1 + \mathrm{i}\,.$$

Z první rovnice původní soustavy pak snadno dopočteme z_2:
$z_2 = 2z_1 + 1 - 6\mathrm{i} = 2(1 + \mathrm{i}) + 1 - 6\mathrm{i} = 2 + 2\mathrm{i} + 1 - 6\mathrm{i} = 3 - 4\mathrm{i}\,.$

Jediným řešením dané soustavy je dvojice komplexních čísel $z_1 = 1 + \mathrm{i}$, $z_2 = 3 - 4\mathrm{i}$.

6. Označme kvocient geometrické posloupnosti q a její členy a_1, a_2, a_3, a_4. Platí: $a_4 - a_1 = 315, a_3 - a_2 = 60$, přičemž $a_2 = a_1 q, a_3 = a_1 q^2, a_4 = a_1 q^3$. Řešíme proto soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} a_1 q^3 - a_1 &= 315\,, \\ a_1 q^2 - a_1 q &= 60\,; \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} a_1(q^3 - 1) &= 315\,, \\ a_1 q(q - 1) &= 60\,. \end{aligned}$$

Vydělíme-li nyní první rovnici rovnicí druhou, dostáváme

$$\frac{a_1(q^3-1)}{a_1 q(q-1)} = \frac{a_1(q-1)(q^2+q+1)}{a_1 q(q-1)} = \frac{q^2+q+1}{q} = \frac{315}{60} = \frac{21}{4}\,,$$

z čehož získáme kvadratickou rovnici pro hledaný kvocient q:

$$4(q^2 + q + 1) = 21q \implies 4q^2 - 17q + 4 = 0\,.$$

Jejím řešením je $q_{1,2} = \frac{1}{8}\big(17 \pm \sqrt{17^2 - 64}\big) = \frac{1}{8}\big(17 \pm \sqrt{225}\big) = \frac{1}{8}(17 \pm 15)\,.$
Úloha má tedy dvě řešení: $q_1 = \frac{32}{8} = 4$ a $q_2 = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}\,.$

7. Upravujme obě strany rovnice:

$$\log(3x + 1)^2 - \log(x + 11) = \log 4 + \log(x - 1)\,,$$
$$\log \frac{(3x+1)^2}{x+11} = \log\big(4 \cdot (x - 1)\big)\,.$$

Řešení zadané rovnice tedy musí splňovat vztah

$$\frac{(3x+1)^2}{x+11} = 4 \cdot (x-1)\ , \quad \text{tj.} \quad (3x+1)^2 = 4(x-1)(x+11)\ .$$

Odtud: $9x^2 + 6x + 1 = 4x^2 + 40x - 44 \implies 5x^2 - 34x + 45 = 0\,.$

Kořeny této kvadratické rovnice jsou

$$x_{1,2} = \tfrac{1}{10}\big(34 \pm \sqrt{34^2 - 4\cdot 5\cdot 45}\big) = \tfrac{1}{10}\big(34 \pm \sqrt{4\cdot 17^2 - 4\cdot 225}\big) =$$
$$= \tfrac{1}{10}\big(34 \pm 2\sqrt{289-225}\big) = \tfrac{1}{10}\big(34 \pm 2\sqrt{64}\big) = \tfrac{1}{5}(17 \pm 8)\,.$$

Zkouškou se přesvědčíme, že daná logaritmická rovnice má skutečně dvě řešení: $x_1 = \frac{25}{5} = 5$ a $x_2 = \frac{9}{5}$.

Literatura

P. Benda a kol.: *Sbírka maturitních příkladů z matematiky.* SPN, Praha, 1988.

L. Boček a kol.: *Matematika pro gymnázia – Rovnice a nerovnice.* Prometheus, Praha, 1995.

I. Bušek: *Řešené maturitní úlohy z matematiky.* SPN, Praha, 1988.

I. Bušek a kol.: *Matematika pro gymnázia – Základní poznatky z matematiky.* Prometheus, Praha, 1995.

B. Bydžovský, J. Vojtěch: *Sbírka úloh z matematiky pro vyšší třídy středních škol.* JČMaF, Praha, 1924.

E. Calda, V. Dupač: *Matematika pro gymnázia – Kombinatorika, pravděpodobnost, statistika.* Prometheus, Praha, 1996.

E. Calda a kol.: *Přijímací zkoušky na vysoké školy. Matematika.* SPN, Praha, 1988.

O. N. Cuberbiller: *Zadači i upražnenija po analitičeskoj geometrii.* Nauka, Moskva, 1968.

T. Gál, A. Kamarýt: *Opakování středoškolské matematiky.* Státní zemědělské nakladatelství, Praha, 1965.

V. M. Govorov a kol.: *Sbornik konkursnych zadač po matematike.* Nauka, Moskva, 1986.

S. Horák a kol.: *Požadavky z matematiky pro přijímací řízení na vysokých školách technických.* Ministerstvo školství ČSR, 1980.

M. Kočandrle, L. Boček: *Matematika pro gymnázia – Analytická geometrie.* Prometheus, Praha, 1996.

E. Kraemer a kol.: *Matematika pro III. ročník středních všeobecně vzdělávacích škol.* SPN, Praha, 1965.

J. Kubát: *Sbírka úloh z matematiky pro přípravu k přijímacím zkouškám na vysoké školy.* SPN, Praha, 1988.

J. Kubát a kol.: *Sbírka úloh z matematiky pro střední školy. Maturitní minimum.* Prometheus, Praha, 1996.

V. S. Kuščenko: *Sbornik konkursnych zadač po matematike s rešenijami.* GSISP, Leningrad, 1960.

J. Maláč: *Sbírka náročnějších úloh z matematiky pro 6.–9. ročník.* SPN, Praha, 1969.

J. Muk: *Aritmetika pro vyšší třídy gymnasií, reál. gymnasií a ref. reál. gymnasií.* Profesorské nakladatelství a knihkupectví, Praha, 1935.

O. Odvárko: *Matematika pro gymnázia – Goniometrie.* Prometheus, Praha, 1994.

O. Odvárko: *Matematika pro gymnázia – Posloupnosti a řady.* Prometheus, Praha, 1995.

O. Odvárko: *Matematika pro gymnázia – Funkce.* Prometheus, Praha, 1996.

J. Polák: *Přehled středoškolské matematiky.* Prometheus, Praha, 1995.

J. Polák: *Středoškolská matematika v úlohách I.* Prometheus, Praha, 1996.

E. Pomykalová: *Matematika pro gymnázia – Stereometrie.* Prometheus, Praha, 1995.

E. Pomykalová: *Matematika pro gymnázia – Planimetrie.* Prometheus, Praha, 1997.

Z. Renc: *Sbírka řešených úloh z matematiky, fyziky a informatiky.* Matfyzpress, Praha, 1997.

M. Rosická, L. Eliášová: *Sbírka příkladů z matematiky k přijímacím zkouškám na VŠE.* VŠE, Praha, 1998.

J. Seibert: *Studijní návody pro přípravu na přijímací zkoušku z matematiky.* Pedagogická fakulta, Hradec Králové, 1988.

E. Sitárová: *Skúšky na vysoké školy, matematika – fyzika.* Slovenské pedagogické nakladateľstvo, Bratislava, 1992.

M. I. Skanavi a kol.: *Sbornik zadač po matematike dlja postupajuščich vo vtuzy.* Vysšaja škola, Moskva, 1988.

F. Vejsada, F. Talafous: *Sbírka úloh z matematiky pro gymnasia.* SPN, Praha, 1969.

Z. Vošický: *Matematika v kostce.* Fragment, Havlíčkův Brod, 1996.

J. Vyšín a kol.: *Úlohy z matematiky pro IV. ročník gymnázií.* SPN, Praha, 1978.

M. Zedek a kol.: *Matematika pro I. ročník středních všeobecně vzdělávacích škol.* SPN, Praha, 1966.

Obsah