OBSAH

1. Opakování a rozšíření středoškolské látky
    - 1.1. Opakování 7
    - 1.2. Goniometrie a komplexní čísla 8
    - 1.3. Geometrie v E^2 a E^3 10
2. Jednoduché funkce a jednoduché limity
    - 2.1. Jednoduché funkce 13
    - 2.2. Jednoduché limity 15
    - 2.3. Bolzanova věta 16
3. Derivace
    - 3.1. Výpočet derivací, diferenciál 17
    - 3.2. Užití derivací 21
    - 3.3. Průběh funkce 27
4. Integrál funkcí jedné proměnné
    - 4.1. Neurčitý integrál, část I 33
    - 4.2. Neurčitý integrál, část II 39
    - 4.3. Určitý integrál 45
    - 4.4. Nevlastní integrál 51
    - 4.5. Užití určitého integrálu 53
    - 4.6. Integrály v pravděpodobnosti 57
5. Funkce dvou proměnných
    - 5.1. Funkce dvou proměnných; základní pojmy 63
    - 5.2. Parciální derivace jednoduchých funkcí a jejich užití 65
    - 5.3. Parciální derivace složených funkcí 68
    - 5.4. Regresní přímka 73
    - 5.5. Dvojný integrál 75
6. Lineární algebra
    - 6.1. Gaussova eliminace, vektory a matice 77
    - 6.2. Determinanty, inverzní matice 79
    - 6.3. Vlastní vektory 81
7. Geografické aplikace
    - 7.1. Sférické souřadnice a vzdálenost bodů na kulové ploše 85
    - 7.2. Eulerův sférický trojúhelník, kosinová věta pro stranu a pro úhel 87
    - 7.3. Mercatorovo zobrazení, loxodroma 90

Literatura 92

OPAKOVÁNÍ A ROZŠÍŘENÍ STŘEDOŠKOLSKÉ LÁTKY

1.1. Opakování

1.1.1. Výrazy zjednodušte a najděte hodnoty proměnné, pro které mají smysl:

a) $\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)^{-1}\left(1+\frac{1}{2}\left(a^2+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}2x\right), a>0,$ b) $\sqrt{z}\cdot\dfrac{z^{\frac{1}{2}}-z^{-\frac{1}{2}}}{z^{\frac{1}{2}}-1}+\dfrac{z-z^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{z}},$

c) $\dfrac{\sqrt{a^4-x^4}}{x}\left(\dfrac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{a-x}}-\dfrac{\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}}\right),\ a>0,$ d) $\dfrac{v^{\frac{1}{2}}-v^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{v}(v^{\frac{1}{2}}-1)}-\dfrac{v-v^{\frac{1}{2}}}{v\sqrt{v}},$

e) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\left(1+\sqrt{2x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)(\sqrt{x}+1)-\left(1-\sqrt{2x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)(\sqrt{x}-1)\right).$

1.1.2. Najděte všechna reálná čísla, která vyhovují nerovnici:

a) $\dfrac{1}{2x+3}\le\dfrac{1}{x-5},$ b) $\dfrac{1}{x-1}\ge\dfrac{1}{x+2}-1,$

c) $\dfrac{5(x+6)}{x+3}\le x+6,$ d) $x+2\le\dfrac{3(x+2)}{x-3},$

e) $\dfrac{x+3}{x+2}\le\dfrac{2}{3-x}+\dfrac{2}{(x+2)(3-x)},$ f) $\dfrac{x+2}{x+1}+\dfrac{2}{x-3}\le\dfrac{2}{(x+1)(3-x)}.$

1.1.3. Za základ logaritmů můžeme vzít libovolné kladné číslo a různé od jedné. Pro obecný základ logaritmů a (a tedy speciálně pro $a=10$ nebo pro $a=\mathrm{e}$) platí tento (definiční) vztah:

$$a^{\log_a x}=x\quad\text{(speciálně } 10^{\log x}=x \text{ nebo } \mathrm{e}^{\ln x}=x\text{)}\quad\text{pro každé } x>0.$$

Použijte zmíněných relací a jejich logaritmováním dokažte, že:

a) $\log x=\dfrac{\ln x}{\ln 10},\ x>0,$ b) $\ln x=\dfrac{\log x}{\log\mathrm{e}},\ x>0,$ c) $\log\mathrm{e}=\dfrac{1}{\ln 10}.$

1.1.4. Najděte všechna reálná čísla, která splňují:

a) $\log(2x+9)-\log(x+1)=\log(x+6)-\log(x-2),$ b) $\log(x+5)+\log(11-3x)=1+\log(1-x),$

c) $\log(3-x)+\log(x+6)=\log 5+\log(\frac{3}{5}-x),$ d) $x^{2(1+\log x)}=1000\,x^7.$

1.1.5. Najděte všechna reálná čísla, která splňují:

a) $\log|x-10|\le 1,$ b) $\log_2\left(|x|-3\right)\le 1,$ c) $\log(x+3)\le\frac{1}{2}\log(6x+25),$

d) $\dfrac{1+\log x}{1-\log x}\ge 0,$ e) $\log_2\dfrac{x}{x-1}\le 1,$ f) $\log_3\dfrac{x+1}{x-1}\le 1.$

1.1.6. Najděte explicitní vyjádření těchto posloupností zadaných rekurentně:

a) $a_{n+2}=a_{n+1}+2a_n,\ a_1=1, a_2=11,$ b) $a_{n+2}=a_{n+1}+2a_n,\ a_0=2, a_1=1,$

c) $a_{n+2}=\frac{1}{2}(3a_{n+1}+2a_n),\ a_0=1, a_1=7,$ d) $a_{n+2}=3a_{n+1}-2a_n,\ a_3=8, a_4=6.$

1.1.7. Dokažte, že pro každé reálné číslo $q \neq 1$ a každé přirozené číslo n platí

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Odtud odvoďte, že pro $|q| < 1$ je nekonečná geometrická řada konvergentní a pro její součet platí

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}.$$

Najděte součet těchto řad (pokud obsahují parametr, určete, pro jaké hodnoty parametru konvergují):

a) $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\dots,$ b) $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}+\frac{1}{32}-\frac{1}{64}+\dots,$

c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z}{z+2}\right)^k,$ d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\left(\frac{z}{z^2-z+1}\right)^k.$

1.2. Goniometrie a komplexní čísla

1.2.1. S pomocí identit

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta\,,\ \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

odvoďte vztahy

a) $\cos 3x + \cos x = 2\cos 2x \cos x\,,$ b) $\sin 3x + \sin x = 2\sin 2x \cos x\,.$

c) Najděte všechna $x \in (-\pi,\pi\rangle$, pro která $\sin 3x + \sin x = \sin 2x\,.$

d) Najděte všechna $x \in (-\pi,\pi\rangle$, pro která $\sin 3x + \sin 2x + \sin x = \cos 3x + \cos 2x + \cos x\,.$

1.2.2. Využijte toho, že $105° = 60° + 45°$, $15° = 60° - 45°$, a s pomocí vztahů z předcházejícího cvičení odvoďte přesné hodnoty pro

a) $\cos 105°\,,$ b) $\sin 105°\,,$ c) $\cos 15°\,,$ d) $\sin 15°\,.$

1.2.3. Využijte vztahů

$$1-\cos x = 2\sin^2\tfrac{x}{2}\,,\ 1+\cos x = 2\cos^2\tfrac{x}{2}\,,\ \sin x = 2\sin\tfrac{x}{2}\cos\tfrac{x}{2}$$

a najděte (v prvních dvou úlohách bez použití kalkulačky) všechny body x z intervalu $(-\pi,\pi\rangle$ (a ty potom přepočítejte na úhly z intervalu $\langle 0°, 360°)$), které splňují rovnici:

a) $\cos x + \sqrt{3}\sin x = 1\,,$ b) $\cos x + \sqrt{3}\sin x = -1\,,$

c) $\cos x + 5\sin x = 1\,,$ d) $\cos x - 3\sin x = -1\,.$

1.2.4. Jsou-li na kalkulačce nastaveny radiány, potom funkce vyvolaná stiskem Shift následovaným stiskem klávesy tan přiřazuje každému číslu y číslo $x \in (-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ takové, že $\operatorname{tg} x = y$. Pro tuto funkci se používá označení arctg. Postupem předcházejícího cvičení vyjádřete pomocí funkce arctg řešení rovnice (A, B jsou parametry, pro něž $AB \neq 0$):

a) $A\cos x + B\sin x = A\,,$ b) $A\cos x + B\sin x = -A\,.$

1.2.5. Lehko si uvědomíme, že ke každé dvojici čísel A, B takové, že $A^2 + B^2 > 0$, existuje $\bar{x} \in (-\pi,\pi\rangle$, pro které platí

$$\cos\bar{x} = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\,,\ \sin\bar{x} = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\,.$$

Proto můžeme rovnici

$$A\cos x + B\sin x = F \tag{$*$}$$

(po dělení $\sqrt{A^2+B^2}$ a náhradě výrazů na levé straně) přepsat do tvaru

$$\cos x\cos\bar{x} + \sin x\sin\bar{x} = \frac{F}{\sqrt{A^2+B^2}}\,.$$

Pokud na pravé straně je výraz v absolutní hodnotě menší nebo roven jedné, přepíšeme rovnici ($*$) do tvaru

$$\cos(x-\bar{x}) = \cos\tilde{x}\,, \tag{$**$}$$

kde $\tilde{x}$ vybereme tak, že

$$\cos\tilde{x} = \frac{F}{\sqrt{A^2+B^2}}\,.$$

Ze vztahu ($**$) vyplývá, že každé řešení x rovnice ($*$) splňuje

$$x = \bar{x} + \tilde{x} + 2\pi k \quad \text{nebo} \quad x = \bar{x} - \tilde{x} + 2\pi k \quad \text{pro nějaké} \quad k \in Z\,.$$

To nemusí být dvě různá řešení. Kdy? Užijte tohoto postupu a najděte (v prvních čtyřech úlohách bez použití kalkulačky) všechny body x z intervalu $(-\pi,\pi\rangle$ (a ty potom přepočítejte na úhly z intervalu $\langle 0°, 360°)$), které splňují rovnici:

a) $\cos x + \sqrt{3}\sin x = \sqrt{2}$,

b) $\sqrt{3}\cos x - \sin x = -\sqrt{2}$,

c) $\cos x + \sin x = \sqrt{\frac{3}{2}}$,

d) $\cos x - \sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}$,

e) $8\cos x + 6\sin x = 9$,

f) $4\cos x + 3\sin x = 2$,

g) $3\cos x - 4\sin x = -2$,

h) $7\cos x - 3\sin x = -4$.

1.2.6. Při řešení předcházející úlohy můžeme postupovat tak, že vezmeme bod $\bar{\bar{x}} \in (-\pi,\pi\rangle$, který splňuje

$$\cos\bar{\bar{x}} = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\,,\ \sin\bar{\bar{x}} = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\,.$$

Potom rovnici 1.2.5.($*$) můžeme zapsat ve tvaru

$$\sin x\cos\bar{\bar{x}} + \cos x\sin\bar{\bar{x}} = \frac{F}{\sqrt{A^2+B^2}}\,.$$

Pokud najdeme bod $\tilde{\tilde{x}} \in (-\pi,\pi\rangle$, který splňuje

$$\sin\tilde{\tilde{x}} = \frac{F}{\sqrt{A^2+B^2}}\,,$$

můžeme rovnici 1.2.5.($*$) dát tvar

$$\sin(x+\bar{\bar{x}}) = \sin\tilde{\tilde{x}}\,.$$

Z této rovnice odvoďte takové dva vztahy, že každý bod x, který je řešením 1.2.5.($*$), vyhovuje alespoň jednomu z nich. Kdy vyhovuje oběma vztahům?

1.2.7. Hodnoty $\cos x$ a $\sin x$ můžeme vyjádřit pomocí $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, když postupujeme takto:

$$\cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{1} = \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1 - \frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}}{1 + \frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}} = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}\,,$$

$$\sin x = \frac{2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}}{1} = \frac{2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}} = \frac{2\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}}{1 + \frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}\,.$$

Pro jaké body x platí uvedená vyjádření hodnot $\sin x$ a $\cos x$ pomocí $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$?

1.2.8. Předpokládejte, že $A + F \neq 0$, a pomocí vzorců z předcházejícího cvičení převeďte rovnici

$$A\cos x + B\sin x = F$$

na kvadratickou rovnici pro $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Vyřešte ji a pomocí funkce arctg napište vyjádření všech čísel x z intervalu $(-\pi, \pi)$, která rovnici vyhovují. Jak se na odvozeném vzorci pozná, že v daném intervalu má rovnice jediné řešení? Vraťte se k některé úloze cvičení 1.2.5. a řešte ji právě popsaným způsobem.

1.2.9. Hledáme komplexní čísla z_1, z_2 v algebraickém tvaru taková, že vyhovují soustavě rovnic:

a)
$$\begin{aligned} z_1 - z_2 &= 1 + 2\mathrm{i}, \\ \mathrm{i}\,z_1 + z_2 &= \mathrm{i}, \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} z_1 + 3\mathrm{i}\,z_2 &= \mathrm{i}, \\ (1+\mathrm{i})\,z_1 + 2\mathrm{i}\,z_2 &= 4\mathrm{i}, \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} 3\,z_1 + (2+\mathrm{i})\,z_2 &= 3 + 2\mathrm{i}, \\ (1+\mathrm{i})\,z_1 - \mathrm{i}\,z_2 &= -2, \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} \mathrm{i}\,z_1 - (2+\mathrm{i})\,z_2 &= -2 + 3\mathrm{i}, \\ (2+\mathrm{i})\,z_1 + 3\,z_2 &= 1, \end{aligned}$$

e)
$$\begin{aligned} \mathrm{i}\,z_1 + (1-\mathrm{i})\,z_2 &= -2, \\ (2-\mathrm{i})\,z_1 + 3\,z_2 &= 3 - 2\mathrm{i}, \end{aligned}$$

f)
$$\begin{aligned} 3\,z_1 + (2-\mathrm{i})\,z_2 &= 1, \\ (2-\mathrm{i})\,z_1 + \mathrm{i}\,z_2 &= 2 + 3\mathrm{i}. \end{aligned}$$

1.3. Geometrie v E^2 a E^3

1.3.1. Skalární součin $\vec{a}\cdot\vec{b}$ dvou vektorů $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ z E^3 je číslo definované vztahem

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 .$$

Délka $|\vec{a}|$ vektoru $\vec{a}$ se dá vyjádřit pomocí skalárního součinu takto:

$$|a| = (\vec{a}\cdot\vec{a})^{\frac{1}{2}} \equiv \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} .$$

Ověřte tyto vlastnosti skalárního součinu (α, β_1, β_2 jsou skaláry):

a) $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$,

b) $(\alpha\vec{a})\cdot\vec{b} = \alpha\,(\vec{a}\cdot\vec{b})$,

c) $(\vec{a}_1 + \vec{a}_2)\cdot\vec{b} = \vec{a}_1\cdot\vec{b} + \vec{a}_2\cdot\vec{b}$,

d) $\vec{a}\cdot(\beta_1\vec{b}_1 + \beta_2\vec{b}_2) = \beta_1\,(\vec{a}\cdot\vec{b}_1) + \beta_2\,(\vec{a}\cdot\vec{b}_2)$,

e) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b}) = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2$,

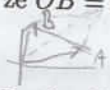
f) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b}) = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\,\vec{a}\cdot\vec{b}$.

1.3.2. Ukážeme, že pro dva vektory $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$ platí vztah

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\,\cos\varphi , \tag{$*$}$$

v němž φ je úhel, který svírají vektory $\vec{a}$ a $\vec{b}$, a $|\vec{a}|$ (resp. $|\vec{b}|$) označuje velikost vektoru $\vec{a}$ (resp. $\vec{b}$). Úhel φ leží v intervalu $\langle 0, \pi)$.

Označíme O počátek souřadného systému. Jestliže bod A je takový, že $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ a bod B takový, že $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, je vzdálenost $|AB|$ bodů A, B rovna $|\vec{b} - \vec{a}|$. Proto můžeme psát



$$|AB|^2 = |\vec{b}-\vec{a}|^2 = (\vec{b}-\vec{a})\cdot(\vec{b}-\vec{a}) = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\,\vec{a}\cdot\vec{b} .$$

Poněvadž $|OA| = |\vec{a}|$ a $|OB| = |\vec{b}|$, vidíme, že mezi stranami trojúhelníku OAB a skalárním součinem platí vztah

$$|AB|^2 = |OA|^2 + |OB|^2 - 2\,\vec{a}\cdot\vec{b} .$$

Podle kosinové věty rovinné trigonometrie vyjádříme velikost $|AB|$ strany AB trojúhelníku OAB pomocí stran trojúhelníku $|OA|$, $|OB|$ a úhlu φ, který tyto strany svírají, vztahem

$$|AB|^2 = |OA|^2 + |OB|^2 - 2\,|OA|\,|OB|\,\cos\varphi .$$

Porovnáním posledních dvou vztahů dostáváme $(*)$ okamžitě, poněvadž $|OA| = |\vec{a}|$ a $|OB| = |\vec{b}|$.

1.3.3. Vektorový součin $\vec{a}\times\vec{b}$ dvou vektorů $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ z E^3 je číslo definované vztahem

$$\vec{a}\times\vec{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2, -(a_1 b_3 - a_3 b_1), a_1 b_2 - a_2 b_1) ,$$

$a_1\ a_2\ a_3\ a_1\ a_2\ a_3$
$b_1\ b_2\ b_3\ b_1\ b_2\ b_3$

který se dá přehledněji zapsat ve tvaru

$$\vec{a} \times \vec{b} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right),$$

v němž je užito determinantu – zobrazení, které čtveřici čísel A, B, C, D přiřazuje číslo podle předpisu

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = AD - BC .$$

Ověřte tyto vlastnosti vektorového součinu (α, β_1, β_2 jsou skaláry):

a) $(\alpha\vec{a}) \times (\beta_1\vec{b}_1 + \beta_2\vec{b}_2) = (\alpha\beta_1)\ (\vec{a} \times \vec{b}_1) + (\alpha\beta_2)\ (\vec{a} \times \vec{b}_2)$,

b) $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$, c) $\vec{a} \times \vec{a} = (0,0,0) \equiv \vec{0}$, d) $\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$, e) $\vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$,

f) $|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2\,|\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$. $= |\bar{a}|^2 |\bar{b}|^2 - |\bar{a}|^2 |\bar{b}|^2 \cos^2\varphi = |\bar{a}|^2 |\bar{b}|^2 \underbrace{(1 - \cos^2\varphi)}_{\sin^2\varphi}$

Pro dva nenulové vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$ užijte výsledek cvičení **f)** a ukažte, že platí vztah

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \sin\varphi , = \sqrt{|a|^2 \cdot |b|^2 \sin^2\varphi} = |\bar{a}||\bar{b}| \sin\varphi$$

v němž φ je úhel svíraný vektory $\vec{a}$ a $\vec{b}$. To dává vektorovému součinu geometrický význam.

1.3.4. V trojúhelníku ABC s vrcholy $A = (3, -2)$, $B = (-5, 2)$, $C = (-4, -1)$, najděte obecné rovnice přímek p_a, p_b, p_c, na nichž leží strany trojúhelníku, a obecné rovnice přímek v_a, v_b, v_c, na nichž leží výšky. Dále najděte souřadnice bodu V, který je průsečíkem výšek, souřadnice těžiště T a obsah S zadaného trojúhelníku.

1.3.5. Výpočtem najděte souřadnice bodu B, který odpovídá bodu $A = (5, -3)$ v osové symetrii vzhledem k přímce s rovnicí $2y = 3x + 5$.

1.3.6. Najděte obsah trojúhelníku ABC s vrcholem C, pro jehož souřadnice platí $C = (-2, 3)$, a s vrcholy A a B, které leží ve vzdálenosti 4 délkových jednotek na přímce s rovnicí $3y = 4x + 2$.

1.3.7. Napište obecnou rovnici přímky p, která prochází bodem $P = (6, 5)$ a průsečíkem přímek, jejichž obecné rovnice jsou $q_1 : x + y - 4 = 0$ a $q_2 : 3x - 5y + 4 = 0$.

1.3.8. Napište středovou rovnici kružnice, na které leží body $A = (5, 3)$ a $B = (-2, 2)$ a jejíž střed leží na přímce $x - 2y - 4 = 0$.

1.3.9. Úhel α je odchylkou přímek s rovnicemi $y = 2x + 3$ a $y = -\frac{1}{3}x + 1$. Kolik je $\operatorname{tg}\alpha$ a $\cos\alpha$?

1.3.10. Na přímce zadané parametricky vektorovým vztahem $X = P + t\,\vec{s}$, $t \in (-\infty, \infty)$, vezmeme dva body X_1 a X_2, které odpovídají hodnotám parametru t_1 a t_2. Jaká je vzdálenost $d(X_1, X_2)$ bodů X_1 a X_2, když směrový vektor $\vec{s}$ má jednotkovou délku.

1.3.11. Najděte obecnou rovnici roviny ρ, ve které leží bod $P = (1, -1, 2)$ a která je kolmá na dvě roviny, jejichž rovnice jsou $x + y - z - 3 = 0$ a $z = 2y$.

1.3.12. Najděte obecnou rovnici roviny ρ, ve které leží bod $P = (2, 3, 2)$ a která obsahuje přímku s parametrickými rovnicemi $x = 1 + t$, $y = 5 + t$, $z = -2 + t$, $t \in (-\infty, \infty)$.

1.3.13. Najděte obsah trojúhelníku ABC a obecnou rovnici roviny ρ, ve které trojúhelník leží, když $A = (1, 2, 3)$, $B = (4, 3, -1)$, $C = (2, 4, 5)$.

1.3.14. V rovnoběžnostěnu $ABCDEFGH$ jsou souřadnice vrcholu A a tří sousedních vrcholů B, D, E dány takto: $A = (-1, 2, 3)$, $B = (3, -1, 1)$, $D = (2, 0, 1)$, $E = (0, 2, -3)$. Spočítejte objem rovnoběžnostěnu, obsah jeho stěny ležící v rovině ρ určené body A, B, D a obecnou rovnici roviny ρ.

1.3.15. Najděte vzdálenost vrcholu krychle o hraně a od roviny proložené sousedními třemi vrcholy.

1.3.16. Najděte obecné rovnice rovin, které jsou rovnoběžné s rovinou $2x - 2y + z = 0$ a dotýkají se kulové plochy $x^2 - 4x + y^2 + 8y + z^2 - 8z = 0$.

1.3.17. Trojúhelník má vrcholy v bodech, v nichž rovina $6x + 3y + 2z = 6$ protíná souřadnicové osy. Jaký je jeho obsah?

1.3.18. Najděte vzdálenost bodu A od přímky p v E^3, když

a) $A = (2,-2,3)$, $p: x = 8+5t,\ y = t,\ z = 4+3t,\ t \in (-\infty,\infty)$,

b) $A = (1,-3,4)$, $p: x = 8+2t,\ y = -7-2t,\ z = -1-t,\ t \in (-\infty,\infty)$.

Řešení.

1.1.1. a) $\dfrac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}$ pro $x \in (-\infty,\infty)$, **b)** $2\sqrt{z}$ pro $z \in (0,1) \cup (1,\infty)$, **c)** $2\sqrt{a^2+x^2}$ pro $x \in (-a,0) \cup (0,a)$, **d)** $\dfrac{2}{v}$ pro $v \in (0,1) \cup (1,\infty)$, **e)** $2x$ pro $x \in (0,\infty)$.

1.1.2. a) $x \in \langle -8, -\frac{3}{2}) \cup (5,\infty)$, **b)** $x \in (-\infty,-2) \cup (1,\infty)$, **c)** $x \in \langle -6,-3) \cup \langle 2,\infty)$, **d)** $x \in (-\infty,-2\rangle \cup (3,6\rangle$, **e)** $x \in \langle -3,-2) \cup \langle 1,3)$, **f)** $x \in \langle -2,-1) \cup \langle 1,3)$.

1.1.4. a) $x = 6$, **b)** $x = -3$, **c)** $x = -3$, **d)** $x_1 = 10^3$, $x_2 = 10^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$.

1.1.5. a) $x \in \langle 0,10) \cup (10,20\rangle$, **b)** $x \in \langle -5,-3) \cup (3,5\rangle$, **c)** $x \in (-3,4\rangle$, **d)** $x \in \langle \frac{1}{10}, 10)$, **e)** $x \in (-\infty,0) \cup \langle 2,\infty)$, **f)** $x \in (-\infty,-1) \cup \langle 2,\infty)$. **1.1.6. a)** $a_n = 2^{n+1} + 3(-1)^n$, **b)** $a_n = 2^n + (-1)^n$, **c)** $a_n = 3\cdot 2^n + (-1)^{n+1}\cdot 2^{1-n}$, **d)** $a_n = 10 - 2^{n-2}$. **1.1.7. a)** 1, **b)** $\frac{1}{3}$, **c)** pro $z \in (-1,\infty)$ konverguje k součtu $\frac{1}{2}(z+2)$, **d)** pro $z \neq 1$ konverguje k součtu $\dfrac{z}{z^2+1}$.

1.2.1. c) $x \in \{-\frac{1}{2}\pi, -\frac{1}{3}\pi, 0, \frac{1}{3}\pi, \frac{1}{2}\pi, \pi\}$ **d)** $x \in \{-\frac{7}{8}\pi, -\frac{2}{3}\pi, -\frac{3}{8}\pi, \frac{1}{8}\pi, \frac{5}{8}\pi, \frac{2}{3}\pi\}$.
1.2.2. a) $\cos 105° = -\frac{1}{4}(\sqrt{3}-1)\sqrt{2}$, **b)** $\sin 105° = \frac{1}{4}(\sqrt{3}+1)\sqrt{2}$, **c)** $\cos 15° = \frac{1}{4}(\sqrt{3}+1)\sqrt{2}$, **d)** $\sin 15° = \frac{1}{4}(\sqrt{3}-1)\sqrt{2}$. **1.2.3. a)** $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{2}{3}\pi$ ($x_1 = 0°$, $x_2 = 120°$), **b)** $x_1 = -\frac{1}{3}\pi$, $x_2 = \pi$ ($x_1 = 300°$, $x_2 = 180°$), **c)** $x_1 = 0$, $x_2 \doteq 2.746802$ ($x_1 = 0°$, $x_2 \doteq 157°22'48''$), **d)** $x_1 \doteq 0.643501$, $x_2 = \pi$ ($x_1 \doteq 36°52'12''$, $x_2 = 180°$). **1.2.4. a)** $x_1 = 0$, $x_2 = 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{B}{A}$, **b)** $x_1 = \pi$, $x_2 = -2\,\mathrm{arctg}\,\frac{A}{B}$.
1.2.5. a) $x_1 = \frac{1}{12}\pi$, $x_2 = \frac{7}{12}\pi$ ($x_1 = 15°$, $x_2 = 105°$), **b)** $x_1 = -\frac{11}{12}\pi$, $x_2 = \frac{7}{12}\pi$ ($x_1 = 195°$, $x_2 = 105°$), **c)** $x_1 = \frac{1}{12}\pi$, $x_2 = \frac{5}{12}\pi$ ($x_1 = 15°$, $x_2 = 75°$), **d)** $x_1 = -\frac{7}{12}\pi$, $x_2 = \frac{1}{12}\pi$ ($x_1 = 255°$, $x_2 = 15°$), **e)** $x_1 \doteq 0.192474$, $x_2 \doteq 1.094528$ ($x_1 \doteq 11°1'41''$, $x_2 \doteq 62°42'43''$), **f)** $x_1 \doteq -0.515778$, $x_2 \doteq 1.802781$ ($x_1 \doteq 330°26'53''$, $x_2 \doteq 103°17'30''$), **g)** $x_1 \doteq -2.909608$, $x_2 \doteq 1.055018$ ($x_1 \doteq 193°17'30''$, $x_2 \doteq 60°26'53''$), **h)** $x_1 \doteq -2.528668$, $x_2 \doteq 1.718885$ ($x_1 \doteq 215°7'5''$, $x_2 \doteq 98°29'5''$). **1.2.6.** Každý bod, který vyhovuje rovnici 1.2.5.(*), splňuje $x = \tilde{\bar{x}} - \bar{\bar{x}} + 2\pi k$ nebo $x = \pi - \tilde{\bar{x}} - \bar{\bar{x}} + 2\pi k$ pro nějaké $k \in Z$. **1.2.7.** Pro každé x takové, že $\cos\frac{x}{2} \neq 0$, tj. $x \neq \pi + 2\pi k$, $k \in Z$.
1.2.8. Jediné řešení je pro $|F| = \sqrt{A^2+B^2}$, což je ve shodě se vztahem $x_{1,2} = \dfrac{B \pm \sqrt{A^2+B^2-F^2}}{A+F}$.
1.2.9. a) $z_1 = 2+\mathrm{i}$, $z_2 = 1-\mathrm{i}$, **b)** $z_1 = 3+\mathrm{i}$, $z_2 = \mathrm{i}$, **c)** $z_1 = \mathrm{i}$, $z_2 = 1-\mathrm{i}$, **d)** $z_1 = 1+\mathrm{i}$, $z_2 = -\mathrm{i}$, **e)** $z_1 = 1+\mathrm{i}$, $z_2 = -\mathrm{i}$, **f)** $z_1 = \mathrm{i}$, $z_2 = 1-\mathrm{i}$.

1.3.4. $p_a: 3x+y+13 = 0$, $p_b: x+7y+11 = 0$, $p_c: x+2y+1 = 0$, $v_a: x-3y-9 = 0$, $v_b: 7x-y+37 = 0$, $v_c: 2x-y+7 = 0$, $V = (-6,-5)$, $T = (-2,-\frac{1}{3})$, $S = 10$ plošných jednotek.
1.3.5. $B = (-7,5)$. **1.3.6.** Obsah trojúhelníku je 6 plošných jednotek. **1.3.7.** $3x-4y+2 = 0$.
1.3.8. $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 25$. **1.3.9.** $\mathrm{tg}\,\alpha = 7$, $\cos\alpha = \frac{1}{10}\sqrt{2}$. **1.3.10.** $d(X_1,X_2) = |t_1 - t_2|$.
1.3.11. Obecná rovnice roviny ρ je $x+y+2z-4 = 0$. **1.3.12.** Obecná rovnice roviny ρ je $2x-y-z+1 = 0$. **1.3.13.** Obsah trojúhelníku je $\frac{15}{2}$ plošné jednotky a obecná rovnice roviny ρ je $2x-2y+z-1 = 0$. **1.3.14.** Objem je roven 4 objemovým jednotkám, obsah stěny jsou 3 plošné jednotky a obecná rovnice roviny ρ je $2x+2y+z-5 = 0$. **1.3.15.** Vzdálenost je $\frac{1}{3}\sqrt{3}\,a$ délkových jednotek. **1.3.16.** Rovnice rovin jsou $2x-2y+z-34 = 0$ a $2x-2y+z+2 = 0$. **1.3.17.** Obsah trojúhelníku je $\frac{7}{2}$ plošných jednotek. **1.3.18. a)** Vzdálenost je $\sqrt{6}$ délkových jednotek; souřadnice bodu přímky p, který je nejblíže bodu A, jsou $(3,-1,1)$. **b)** Vzdálenost je 3 délkové jednotky; souřadnice bodu přímky p, který je nejblíže bodu A, jsou $(2,-1,2)$.

JEDNODUCHÉ FUNKCE A JEDNODUCHÉ LIMITY

2.1. Jednoduché funkce

2.1.1. Určete definiční obor a načrtněte grafy funkcí:

a) $x \to (x+2)^2$, b) $x \to \ln(x-2)$, c) $x \to e^{x-1}$,

d) $x \to \dfrac{1}{e^x}$, e) $x \to \dfrac{x+2}{x+1}$, f) $x \to \ln|x-2|$,

g) $x \to 2-|x|$, h) $x \to 2|x+1|$, i) $x \to \dfrac{|x|-x}{x}$,

j) $x \to \sqrt{2x-x^2-1}$, k) $x \to |x-1|+|x|$, l) $x \to \ln(4x-x^2-4)$.

2.1.2. Najděte definiční obor a určete, zda je funkce f lichá nebo sudá, když

a) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2+1}$, b) $f(x) = \dfrac{x\sin x}{x^4+2x^2+1}$, c) $f(x) = \dfrac{(x^4-x^2)\cos 2x}{\sin^2 x + 2\cos^2 x}$.

2.1.3. Najděte definiční obor $D(f)$ funkce f a určete, zda funkce f je na něm rostoucí či klesající, když

a) $f(x) = 3x^3+2x$, b) $f(x) = \dfrac{x|x|}{x^2+1}$, c) $f(x) = e^{-x}-e^x$,

2.1.4. Najděte největší interval I obsahující bod x_0, na kterém je zadaná funkce g monotónní. Označte f funkci s definičním oborem $D(f)=I$, pro kterou $f(x)=g(x)$. Rozhodněte, zda je funkce f v intervalu I klesající či rostoucí, najděte inverzní funkci f^{-1} a její definiční obor $D(f^{-1}) = H(f)$, když

a) $g(x) = x^2+4x+1$, $x_0 = 0$, b) $g(x) = |x|+1$, $x_0=-2$,

c) $g(x) = 2|x-1|+|x-3|$, $x_0=-1$, d) $g(x) = \dfrac{x+3}{x-2}$, $x_0=-1$.

2.1.5. Najděte obor hodnot $H(f)$ funkce f dané vztahem ($x \in (-\infty,\infty)$):

a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$, b) $f(x) = 3x^2-3x+1$, c) $f(x) = \ln(1+x^2)$.

Řešení.

2.1.1. **a)** $(-\infty,\infty)$, **b)** $(2,\infty)$, **c)** $(-\infty,\infty)$, **d)** $(-\infty,\infty)$, **e)** $(-\infty,-1)\cup(-1,\infty)$, **f)** $(-\infty,2)\cup(2,\infty)$, **g)** $(-\infty,\infty)$, **h)** $(-\infty,\infty)$, **i)** $(-\infty,0)\cup(0,\infty)$, **j)** definiční obor D obsahuje jediný bod, číslo 1, proto $D=\{1\}$, **k)** $(-\infty,\infty)$, **l)** definiční obor D neobsahuje žádný bod, je to prázdná množina, proto $D=\emptyset$.

2.1.2. **a)** $D(f) = (-\infty,\infty)$, funkce f je lichá, **b)** $D(f) = (-\infty,\infty)$, funkce f je sudá, **c)** $D(f) = (-\infty,\infty)$, funkce f je sudá.

2.1.3. **a)** $D(f) = (-\infty,\infty)$, funkce f je na něm rostoucí, **b)** $D(f) = (-\infty,\infty)$, funkce f je na něm rostoucí, **c)** $D(f) = (-\infty,\infty)$, funkce f je na něm klesající.

2.1.4. **a)** $I = \langle -2,\infty)$, $f^{-1}(y) = -2+\sqrt{y+3}$, $D(f^{-1}) = \langle -3,\infty)$, **b)** $I=(-\infty,0\rangle$, $f^{-1}(y) = 1-y$, $D(f^{-1}) = \langle 1,\infty)$, **c)** $I=(-\infty,1\rangle$, $f^{-1}(y) = \frac{1}{3}(5-y)$, $D(f^{-1}) = \langle 2,\infty)$, **d)** $I=(-\infty,2)$, $f^{-1}(y) = \frac{2y+3}{y-1}$, $D(f^{-1}) = (-\infty,1)$.

2.1.5. **a)** $H(f) = (0,1\rangle$, **b)** $H(f) = \langle \frac{1}{4},\infty)$, **c)** $H(f) = \langle 0,\infty)$.

2.1.6. Ukažte, že funkce g definovaná vztahem

$$g(x) = \frac{x}{x-1}$$

splňuje $g(g(x)) = x$ pro všechna x z definičního oboru. Najděte definiční obor $D(g)$ funkce g, obor hodnot $H(g)$ a vyjádření inverzní funkce g^{-1}.

2.1.7. Ukažte, že funkce h definovaná vztahem

$$h(x) = \frac{ax+c}{bx-a},$$

v němž a, b, c jsou parametry, které vyhovují podmínkám $b \neq 0$, $a^2 + bc \neq 0$, splňuje $h(h(x)) = x$ pro všechna x z definičního oboru.

2.1.8. Funkce inverzní k funkci f_{tg} definované vztahem $f_{\mathrm{tg}}(x) = \operatorname{tg} x$ pro ty hodnoty proměnné x, které patří do definičního oboru $D(f_{\mathrm{tg}}) = (-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$, je funkce arctg. Funkce inverzní k funkci f_{cotg} definované vztahem $f_{\mathrm{cotg}}(x) = \operatorname{cotg} x$ pro ty hodnoty proměnné x, které patří do definičního oboru $D(f_{\mathrm{cotg}}) = (0, \pi)$, je funkce arccotg.

a) Vyjádřete pomocí arctg inverzní funkci k funkci g, která má definiční obor $D(g) = (\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi)$, na němž pro hodnoty funkce g platí $g(x) = 3 \operatorname{tg} x$.

b) Vyjádřete pomocí arccotg inverzní funkci k funkci h, která má definiční obor $D(h) = (4\pi, 5\pi)$, na němž pro hodnoty funkce h platí $h(x) = 2 \operatorname{cotg} x$.

c) Ukažte, že pro všechna $x \in (-\infty, \infty)$ je $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x = \frac{1}{2}\pi$.

d) Ukažte, že pro všechna reálná $x \neq 0$ je

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \begin{cases} \frac{1}{2}\pi & \text{pro } x > 0, \\ -\frac{1}{2}\pi & \text{pro } x < 0. \end{cases}$$

Řešení.

2.1.6. $D(g) = H(g) = (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$, $g^{-1}(x) = \frac{x}{x-1} \equiv g(x)$. **2.1.8. a)** $D(g^{-1}) = (-\infty, \infty)$, $g^{-1}(y) = \pi + \operatorname{arctg} \frac{1}{3}y$. **b)** $D(h^{-1}) = (-\infty, \infty)$, $h^{-1}(y) = 4\pi + \operatorname{arccotg} \frac{1}{2}y$.

c) Hodnotu $\operatorname{arctg} x$ označíme φ, tj.

$$\operatorname{arctg} x = \varphi\,. \qquad (*)$$

Potom je $\varphi \in (-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ a $\operatorname{tg}\varphi = x$. Protože $\frac{1}{2}\pi - \varphi \in (0, \pi)$ a $\operatorname{cotg}(\frac{1}{2}\pi - \varphi) = \operatorname{tg}\varphi = x$, je

$$\operatorname{arccotg} x = \tfrac{1}{2}\pi - \varphi\,. \qquad (**)$$

Sečtením $(*)$ a $(**)$ dostaneme výsledek.

d) Hodnotu $\operatorname{arctg} x$ označíme φ, tj.

$$\operatorname{arctg} x = \varphi\,. \qquad (*)$$

Probereme případ $x > 0$. Potom je $\varphi \in (0, \frac{1}{2}\pi)$ a $\operatorname{tg}\varphi = x$. Protože $\frac{1}{2}\pi - \varphi \in (0, \frac{1}{2}\pi)$, je

$$\operatorname{tg}(\tfrac{1}{2}\pi - \varphi) = \operatorname{cotg}\varphi = \frac{1}{\operatorname{tg}\varphi} = \frac{1}{x}\,.$$

Máme tedy

$$\operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \tfrac{1}{2}\pi - \varphi\,. \qquad (**)$$

Sečtením $(*)$ a $(**)$ dostaneme výsledek. V případě $x < 0$ je $\varphi \in (-\frac{1}{2}\pi, 0)$. Poněvadž pro takové φ platí $-\frac{1}{2}\pi - \varphi \in (-\frac{1}{2}\pi, 0)$ a také

$$\operatorname{tg}(-\tfrac{1}{2}\pi - \varphi) = -\operatorname{tg}(\tfrac{1}{2}\pi + \varphi) = -\frac{\sin(\frac{1}{2}\pi + \varphi)}{\cos(\frac{1}{2}\pi + \varphi)} = \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} = \operatorname{cotg}\varphi = \frac{1}{\operatorname{tg}\varphi} = \frac{1}{x}\,,$$

je odtud možné učinit závěr

$$\operatorname{arctg} \frac{1}{x} = -\tfrac{1}{2}\pi - \varphi\,.$$

V tomto vztahu místo φ napíšeme $\operatorname{arctg} x$, tím je výsledek dokázán i pro $x < 0$.

2.2. Jednoduché limity

2.2.1. Spočítejte tyto limity:

a) $\lim\limits_{x\to 2}(2x^2-5)$, b) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin x}{x}$, c) $\lim\limits_{x\to\infty}2^{-x}$,

d) $\lim\limits_{x\to-\pi}\dfrac{\cos x}{x}$, e) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{6-2x-2x^2}{3x^2+4x-3}$, f) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3-7\cos x}{2-\sqrt{x}}$,

g) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^4-2x^3-x}{2x^3+3x^2+2x}$, h) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{3x^2+2x-1}{2x^2+3x+1}$, i) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-2x-4}{x^2+x-6}$,

j) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-3x+2}{7-4x^3}$, k) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^4-3x^3+5}{3x^5+4x+1}$, l) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2-5x^4}{3x^3+2x}$,

m) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5-3x^4}{2x-3x^2+4x^4}$, n) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^{\frac{3}{2}}-2x}{2x^2+4}$, o) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5x^5-2x-1}{3x^3+2x^2+x}$,

p) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2^{x-2}-3^{x+1}}{2^{x-2}+3^{x-1}}$, q) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$, r) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$,

s) $\lim\limits_{x\to 0}x\cos\dfrac{1}{x}$, t) $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x\cos x$, u) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+x}}{x}$.

2.2.2. Použijte těchto dvou limit

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \quad , \quad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

a spočítejte:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{7x}$, b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\operatorname{tg}5x}$, c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 3x}{x^2}$,

d) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}\pi}\dfrac{\cos x}{\frac{1}{2}\pi-x}$, e) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{e^{x+h}-e^x}{h}$, f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-1}{x}$,

g) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 2x}{\sin^2 3x}$, h) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos^2 x-1}{x^2}$, i) $\lim\limits_{x\to\pi}(\pi-x)\operatorname{cotg}x$.

2.2.3. Jestliže limita neexistuje, spočítejte limity jednostranné (pokud existují):

a) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-3}{2-x}$, b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-3}{(x-1)^4}$, c) $\lim\limits_{x\to-5}\dfrac{x+11}{(x+5)^3}$,

d) $\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{1}{x}}$, e) $\lim\limits_{x\to 0}\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$, f) $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{\frac{x}{x-2}}$,

g) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x+1}{x^2+4x+4}$, h) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1-2x}{x^2-2x-3}$, i) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2-x-2}{x^2+2x+1}$,

j) $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$, k) $\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{1}{x}}\cos\dfrac{1}{x}$, l) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{\sin x}$.

Řešení.

2.2.1. a) 3, b) 0, c) 0, d) $\frac{1}{\pi}$, e) 2, f) 0, g) $-\frac{1}{2}$, h) 4, i) $\frac{6}{5}$, j) $-\frac{1}{2}$, k) 0, l) ∞, m) $-\frac{3}{4}$, n) 0, o) ∞, p) -9, q) 1, r) -1, s) 0, t) 0, u) -1.

2.2.2. a) $\frac{3}{7}$, b) $\frac{1}{5}$, c) 9, d) 1, e) e^x, f) 3, g) $\frac{4}{9}$, h) -1, i) -1.

2.2.3. a) limita zleva je $-\infty$, zprava ∞, b) $-\infty$, c) limita zleva je $-\infty$, zprava ∞, d) limita zleva je 0, zprava ∞, e) limita zprava je ∞, funkce není definována v levém okolí bodu 0, f) e, g) limita je $-\infty$, h) limita zleva je ∞, zprava $-\infty$, i) limita zleva je ∞, zprava $-\infty$, j) neexistuje limita zleva, ani limita zprava, k) limita zleva je 0, limita zprava neexistuje, l) limita zleva je -1, zprava 1.

2.2.4. Spočítejte tuto limitu (která se nazývá derivace funkce f)

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$

pro funkci f danou takto:

a) $f(x)=x^2$, b) $f(x)=x^3$, c) $f(x)=x^4$,

d) $f(x)=\dfrac{1}{x}$, e) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$, f) $f(x)=\sqrt{x}, x>0$.

2.2.5. Dvě funkce f a g splňují

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A\,,\ \lim_{x\to\infty} g(x)=B\ \text{, přičemž}\ A,B\in(-\infty,\infty)\,,\ A<B\,.$$

a) Ukažte, že potom existuje číslo a takové, že $x\in(a,\infty)\ \Rightarrow\ f(x)<g(x)$.

b) Ukažte, že potom pro každé číslo D, které splňuje $D<B-A$, existuje číslo b takové, že

$$x\in(b,\infty)\ \Rightarrow\ f(x)+D<g(x)\,.$$

c) Ukažte, že pro dosti velká čísla x platí

$$\frac{3x^2+x\sqrt{x}+(5x+3)\sin 7x}{2x^2-x-2}<\frac{4x^2-x-19e^{-5x}}{x^2+5x+3|x+50|}\,.$$

2.3. Bolzanova věta

2.3.1. Bolzanova věta. Buď f spojitá funkce na intervalu $\langle a,b\rangle$, $-\infty<a<b<\infty$. Pro každý bod intervalu, jehož krajními body jsou hodnoty $f(a)$, $f(b)$, existuje bod $x\in\langle a,b\rangle$ takový, že $f(x)=y$. Ukažte, že funkce f má v daném intervalu $\langle a,b\rangle$ aspoň jeden bod x takový, že platí $f(x)=y$, když

a) $f(x)=(x-2)e^{-x}+x^2\,,\ a=0\,,\ b=2\,,\ y=1\,,$

b) $f(x)=x-2\sin x\,,\ a=\frac{1}{6}\pi\,,\ b=\pi\,,\ y=2\,,$

c) $f(x)=x^5-3x^2+1\,,\ a=0\,,\ b=1\,,\ y=0\,,$

d) $f(x)=x^4-3x^2-x+1\,,\ a=0\,,\ b=2\,,\ y=0\,.$

2.3.2. Spočítejte a potom vysvětlete, proč pro funkci $f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$ neexistuje v intervalu $\langle 0,2\rangle$ bod x takový, že $f(x)=y$, kde y je libovolný bod z intervalu $(0,4)$, i když v krajních bodech intervalu platí $f(0)=0$ a $f(2)=4$.

Řešení.

2.2.4. a) $2x$, b) $3x^2$, c) $4x^3$, d) $-\frac{1}{x^2}$, e) $-\frac{2}{x^3}$, f) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

2.2.5. a) Označíme $\varepsilon=\frac{1}{2}(B-A)$. Z definice limity funkce f vyplývá, že existuje číslo a_f takové, že pro každé $x\in(a_f,\infty)$ je $f(x)<A+\varepsilon$. Z definice limity funkce g vyplývá, že existuje číslo a_g takové, že pro každé $x\in(a_g,\infty)$ je $f(x)>B-\varepsilon$. Jestliže označíme a větší z hodnot a_f, a_g je (vzhledem k tomu, že $A+\varepsilon=B-\varepsilon$) splněna nerovnost $f(x)<g(x)$ pro všechna $x\in(a,\infty)$.
b) Úvaha je stejná jako při řešení předcházející úlohy, pouze volíme $\varepsilon=\frac{1}{2}(B-A-D)$.
c) Limita funkce stojící na levé straně nerovnosti v nevlastním bodě ∞ je $\frac{3}{2}$, limita funkce vpravo je 4; proto pro velká x nerovnost platí.

2.3.1. a) $f(0)=-2$, $f(2)=4$, proto existuje bod $x\in(0,2)$ takový, že $f(x)=1$, b) $f(\frac{1}{6}\pi)=\frac{1}{6}\pi-1$, $f(\pi)=\pi$, proto existuje bod $x\in(\frac{1}{6}\pi,\pi)$ takový, že $f(x)=2$, c) $f(0)=1$, $f(1)=-1$, proto existuje $x\in(0,1)$ takový, že $f(x)=0$, d) $f(0)=1$, $f(2)=3$, musíme zkusit další body uvnitř intervalu $\langle 0,2\rangle$: $f(1)=-2$, proto existuje $x_1\in(0,1)$ a $x_2\in(1,2)$ tak, že $f(x_1)=f(x_2)=0$.

2.3.2. Funkce není spojitá v intervalu $\langle 0,2\rangle$. Později si nakreslete graf funkce f.

DERIVACE

3.1. Výpočet derivací, diferenciál

3.1.1. Spočítejte derivaci, uveďte největší otevřený interval, na kterém je derivace spočítána, a zjistěte hodnoty funkce a derivace v bodě $x = 1$:

a) $f(x) = 3(x^2 - 2x + 1) - 5\ln x + 2\sqrt{x}$, b) $g(x) = \sin 2x + \cos 2x$,

c) $h(x) = 9x^{\frac{5}{3}} + \dfrac{8}{\sqrt{x}} - \dfrac{4}{x\sqrt{x}}$, d) $j(x) = \sqrt{x\sqrt{x^3}}$,

e) $k(x) = 2^x$, f) $l(x) = \log x \equiv \log_{10} x$.

3.1.2. Spočítejte derivaci a uveďte největší otevřené intervaly, na kterých vztahy platí:

a) $f(x) = \sin(\cos(e^{1-2x}))$, b) $f(x) = (x^2 - 4x + 24)\sqrt{x+3}$,

c) $f(x) = (x+1)^3(x^2-1)^2$, d) $f(x) = \dfrac{1}{4(x^4+4)}$,

e) $f(x) = e^{-3x}\cos 2x$, f) $f(x) = x\,\mathrm{arctg}\,x - \ln\sqrt{1+x^2}$,

g) $f(x) = \dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$, h) $f(x) = \dfrac{3+\sin^2 x}{1+\cos^2 x}$, i) $f(x) = \mathrm{arctg}\,\dfrac{1}{x}$,

j) $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$, k) $f(x) = \mathrm{tg}^2\, 2x$, l) $f(x) = \dfrac{3-x}{5x+2}$,

m) $m(x) = e^{\frac{x-1}{2x+1}}$, n) $f(x) = \arcsin\dfrac{x+2}{2}$, o) $g(x) = \dfrac{e^{-x}}{x^2+1}$,

p) $f(x) = x^x$, q) $f(x) = \cos^2\sqrt{1+x^2}$, r) $g(x) = \mathrm{arctg}\,\dfrac{x+2}{2x-1}$.

3.1.3. Při úpravě výrazu vzniklého derivováním je třeba včas vytknout vše, co vytknout lze. Například

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{(x^2-3)^4}{(x^2+2)^3} = \frac{4(x^2-3)^3 2x(x^2+2)^3 - (x^2-3)^4 3(x^2+2)^2 2x}{(x^2+2)^6}$$
$$= \frac{2x(x^2-3)^3(x^2+2)^2(4(x^2+2) - 3(x^2-3))}{(x^2+2)^6}$$
$$= \frac{2x(x^2-3)^3(x^2+17)}{(x^2+2)^4}.$$

Podobně postupujte u těchto funkcí:

a) $f(x) = \dfrac{(x+1)^3}{(x-2)^4}$, b) $f(x) = \dfrac{(x-2)^5}{(x+3)^3}$, c) $f(x) = \dfrac{(x^3+2)^3}{(x^2+1)^2}$.

3.1.4. Funkci zapište pomocí záporného exponentu; potom dvakrát derivujte:

a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2(x^2+1)}$, b) $f(x) = \dfrac{(x+1)^2}{x^3}$,

c) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+2+\sin x}$, d) $f(x) = \dfrac{x^2+3x+2}{\sqrt{x^2+1}}$.

3.1.5. Spočítejte první a druhou derivaci funkce:

a) $f(x) = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+a^2} + a^2\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})\right)$, $a > 0$,

b) $f(x) = \dfrac{2}{3a^2}(ax-2b)\sqrt{ax+b}$, $a > 0$, c) $f(x) = \dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$.

3.1.6. Spočítejte první a druhou derivaci funkce:

$$f(x) = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

a) Postupujte přímým výpočtem.

b) Povšimněte si, že $f(x) = g(x)g'(x)$, kde pro stručnost je použito označení $g(x) = \arcsin x$. Potom ukažte, že platí (pro zkrácení proměnnou x nevypisujeme)

$$f' = g\,g'' + (g')^2,$$
$$f'' = g\,g''' + 3g'g''.$$

Poněvadž se snadno odvodí, že

$$g''(x) = \frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}},\quad g'''(x) = \frac{1+2x^2}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}},$$

dostaneme výsledek pouhým dosazováním do předcházejících vztahů.

3.1.7. Funkce f, g a h mají na otevřeném intervalu I potřebné derivace, funkce f je na tomto intervalu nenulová. Spočítejte

a) $\left(\frac{f'}{f}\right)'$, b) $\left(\frac{f'}{f}\right)''$, c) $(fgh)'$, d) $\left(\frac{gh}{f}\right)'$.

3.1.8. Funkce f a g mají na $(-\infty,\infty)$ potřebné derivace, a je pevná konstanta. Spočítejte

a) $\dfrac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k} f(3-2x)$, $k = 1,2,\dots$, b) $\dfrac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\left(f(x)g(a-x)\right)$, $k = 1,2$,

c) $\dfrac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\dfrac{(x-a)^n}{n!}$, $k = 1,\dots,n$, d) $\dfrac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\dfrac{1}{(x-a)^3}$, $k = 1,2,\dots$,

e) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\dfrac{f}{1+f^2}$, f) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f^6g^4)$.

3.1.9. Pro všechna x platí $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x$. Derivujeme jako složenou funkci a dostaneme vztah

$$\frac{1}{\cos^2(\operatorname{arctg} x)}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{arctg} x = 1.$$

Označíme-li $\varphi = \operatorname{arctg} x$, je $\varphi \in (-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ a $\operatorname{tg}\varphi = x$; poněvadž $\cos^2\varphi = \dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2\varphi}$, dostáváme

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{arctg} x = \cos^2\varphi = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\varphi} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Podobně spočítejte první dvě derivace funkce $x \to y(x)$ (nazývané implicitně zadaná funkce) v určeném bodě x:

a) $x^2 + y^2 = R^2$, $R > 0$, $x \in (-R,R)$, b) $x\ln y + 2y = x^2 - 2$ v bodě $x = 2$ (kde $y(2) = 1$).

3.1.10. Vše, co bude řečeno, se týká funkce f, která má derivaci na otevřeném intervalu I. Pro takovou funkci označuje

$$\mathrm{d}f = f'(x)\,\mathrm{d}x$$

diferenciál funkce f v bodě $x \in I$, přičemž $\mathrm{d}x$ označuje velikost přírůstku nezávisle proměnné x – diferenciál nezávisle proměnné x. Někdy je třeba pro označení diferenciálu psát $\mathrm{d}f(x, dx)$, abychom zachytili jak bod x, v němž se diferenciál bere, tak i velikost přírůstku $\mathrm{d}x$. Proto například

$$\mathrm{d}f(x_0, h) = f'(x_0)h$$

znamená diferenciál v bodě x_0 s přírůstkem nezávisle proměnné vyjádřeným veličinou h.

Naproti tomu přírůstkem $\Delta f(x,h)$ se rozumí přesný přírůstek hodnot funkce f, proto se definuje

$$\Delta f(x,h) = f(x+h) - f(x)\,.$$

a) Ukažte, že $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{\Delta f(x,h) - \mathrm{d}f(x,h)}{h} = 0\,.$

b) Nová veličina y (závisle proměnná y) je zavedena vztahem $y = f(x)$. Jak definujeme diferenciál proměnné y? Co takový vztah vyjadřuje?

3.1.11. Porovnejte $\Delta g(x_0,h)$ a $\mathrm{d}g(x_0,h)$ tím, že spočítáte $\Delta g(x_0,h) - \mathrm{d}g(x_0,h)$ pro obecnou hodnotu přírůstku h nezávisle proměnné; ověřte, že tento výraz (i po dělení přírůstkem h nezávisle proměnné) konverguje k nule, když $h \to 0$:

a) $g(x) = x^2$ v bodě $x_0 = 3\,,$ b) $g(x) = x^3$ v bodě $x_0 = 2\,,$

c) $g(x) = \dfrac{1}{x}$ v bodě $x_0 = 2\,,$ d) $g(x) = \sqrt{x}$ v bodě $x_0 = 1\,.$

3.1.12. Porovnejte $\Delta m(x,h)$ a $\mathrm{d}m(x,h)$ tím, že spočítáte $\Delta m(x,h) - \mathrm{d}m(x,h)$ pro vybrané hodnoty přírůstku h nezávisle proměnné pro funkci:

a) $m(x) = e^{2x}$ v bodě $x = 0$ a pro tyto hodnoty přírůstku h: $1, 0.5, 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}$.

b) $m(x) = \cos x$ v bodě $x = \frac{1}{6}\pi$ a pro tyto hodnoty přírůstku h: $1, 0.5, 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}$.

Řešení.

3.1.1. a) $f'(x) = 6(x-1) - \dfrac{5}{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $D(f) = (0,\infty)$, $f(1) = 2$, $f'(1) = -4$,
b) $g'(x) = 2(\cos 2x - \sin 2x)$, $D(f) = (-\infty,\infty)$, $g(1) = \sin 2 + \cos 2 \doteq 0.5$, $g'(1) = 2(\cos 2 - \sin 2) \doteq -2.7$,
c) $h'(x) = 15x^{\frac{2}{3}} - 4x^{-\frac{3}{2}} + 6x^{-\frac{5}{2}} \equiv 15x^{\frac{2}{3}} - \dfrac{4}{x\sqrt{x}} + \dfrac{6}{x^2\sqrt{x}}$, $D(f) = (0,\infty)$, $h(1) = 13$, $h'(1) = 17$,
d) $j'(x) = \frac{5}{4}x^{\frac{1}{4}} \equiv \frac{5}{4}\sqrt[4]{x}$, $D(j) = (0,\infty)$, $j(1) = 1$, $j'(1) = \frac{5}{4}$,
e) $k'(x) = 2^x \ln 2$, $D(k) = (-\infty,\infty)$, $k(1) = 2$, $k'(1) = 2\ln 2 \doteq 1.4$,
f) $l'(x) = \dfrac{1}{x\ln 10} \equiv \dfrac{\log e}{x}$, $D(l) = (0,\infty)$, $l(1) = 0$, $l'(1) = \frac{1}{\ln 10} \equiv \log e \doteq 0.4$.

3.1.2. a) $f'(x) = 2e^{1-2x}\cos(\cos(e^{1-2x}))\sin(e^{1-2x})$ na $(-\infty,\infty)$, b) $f'(x) = \dfrac{5x^2}{2\sqrt{x+3}}$ na $(-3,\infty)$,
c) $f'(x) = (x+1)^4(x-1)(7x-3)$ na $(-\infty,\infty)$, d) $f'(x) = \dfrac{-x^3}{(x^4+4)^2}$ na $(-\infty,\infty)$,
e) $f'(x) = -e^{-3x}(3\cos 2x + 2\sin 2x)$ na $(-\infty,\infty)$, f) $f'(x) = \operatorname{arctg} x$ na $(-\infty,\infty)$,
g) $f'(x) = \dfrac{-1}{(1+\sqrt{x})^2\sqrt{x}}$ na $(0,\infty)$, h) $f'(x) = \dfrac{10\sin x\cos x}{(1+\cos^2 x)^2} \equiv \dfrac{5\sin 2x}{(1+\cos^2 x)^2}$ na $(-\infty,\infty)$,
i) $f'(x) = \dfrac{-1}{1+x^2}$ na $(-\infty,0)\cup(0,\infty)$, j) $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ na $(-\infty,\infty)$,
k) $f'(x) = \dfrac{4\sin 2x}{\cos^3 2x}$ na $(-\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi)$ a na intervalech, které se dostanou posunutím o $\frac{1}{2}\pi k$, k celé číslo,
l) $f'(x) = \dfrac{-17}{(5x+2)^2}$ na $(-\infty,-\frac{2}{5})\cup(-\frac{2}{5},\infty)$,
m) $m'(x) = \dfrac{3}{(2x+1)^2}e^{\frac{x-1}{2x+1}} \equiv \dfrac{3m(x)}{(2x+1)^2}$ pro $x \neq -\frac{1}{2}$, n) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{-x^2-4x}}$ na $(-4,0)$,
o) $g'(x) = \dfrac{-(x+1)^2e^{-x}}{(x^2+1)^2} \equiv \dfrac{-(x+1)^2}{(x^2+1)}g(x)$ na $(-\infty,\infty)$,

p) $f'(x) = x^x(1+\ln x)$ na $(0,\infty)$, q) $f'(x) = \dfrac{-x\sin 2\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}$ na $(-\infty,\infty)$, r) $g'(x) = \dfrac{-1}{x^2+1}$ na $(-\infty,\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2},\infty)$.

3.1.3. a) $f'(x) = \dfrac{-(x+1)^2(x+10)}{(x-2)^5}$ pro $x \in (-\infty,2) \cup (2,\infty)$,

b) $f'(x) = \dfrac{(x-2)^4(2x+21)}{(x+3)^4}$ pro $x \in (-\infty,-3) \cup (-3,\infty)$,

c) $f'(x) = \dfrac{x(x^3+2)^2(5x^3+9x-8)}{(x^2+1)^3}$ pro $x \in (-\infty,\infty)$.

3.1.4. a) $f'(x) = \dfrac{-2(2x^2+1)}{x^3(x^2+1)^2}$, $f''(x) = \dfrac{2(10x^4+9x^2+3)}{x^4(x^2+1)^3}$ pro $x \in (-\infty,0) \cup (0,\infty)$,

b) $f'(x) = \dfrac{-(x+1)(x+3)}{x^4}$, $f''(x) = \dfrac{2(x^2+6x+6)}{x^5}$ pro $x \in (-\infty,0) \cup (0,\infty)$.

c) $f'(x) = \dfrac{-(2x+\cos x)}{(x^2+2+\sin x)^2}$, $f''(x) = \dfrac{(6+\sin x)x^2+8x\cos x+\cos^2 x-3}{(x^2+2+\sin x)^3}$ pro $x \in (-\infty,\infty)$,

d) $f'(x) = \dfrac{x^3+3}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$, $f''(x) = \dfrac{3x(x-3)}{(x^2+1)^{\frac{5}{2}}}$ pro $x \in (-\infty,\infty)$.

3.1.5. a) $f'(x) = \sqrt{x^2+a^2}$, $f''(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}$ pro $x \in (-\infty,\infty)$,

b) $f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{ax+b}}$, $f''(x) = \dfrac{ax+2b}{2(ax+b)^{\frac{3}{2}}}$ pro $x \in (-\frac{b}{a},\infty)$,

c) $f'(x) = \dfrac{x^2(x+3)}{2(x+1)^3}$, $f''(x) = \dfrac{3x}{(x+1)^4}$ pro $x \in (-\infty,-1) \cup (-1,\infty)$.

3.1.6. a) $f'(x) = \dfrac{x\arcsin x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} + \dfrac{1}{1-x^2}$, $f''(x) = \dfrac{(2x^2+1)\arcsin x}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}} + \dfrac{3x}{(1-x^2)^2}$ pro $x \in (-1,1)$.

3.1.7. a) $\left(\dfrac{f'}{f}\right)' = \dfrac{ff''-(f')^2}{f^2}$, b) $\left(\dfrac{f'}{f}\right)'' = \dfrac{f^2f'''-3ff'f''+2(f')^3}{f^3}$, c) $f'gh+fg'h+fgh'$,

d) $\dfrac{fg'h+fgh'-f'gh}{f^2}$. **3.1.8.** a) $(-2)^k f^{(k)}(3-2x)$, b) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f(x)g(a-x)) =$
$f'(x)g(a-x) - f(x)g'(a-x)$, $\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}(f(x)g(a-x)) = f''(x)g(a-x) - 2f'(x)g'(a-x) + f(x)g''(a-x)$,

c) $\dfrac{(x-a)^{n-k}}{(n-k)!}$, d) $\dfrac{(-1)^k(k+2)!}{2!(x-a)^{k+3}}$, e) $\dfrac{(1-f^2)f'}{(1+f^2)^2}$, f) $2f^5g^3(3f'g+2fg')$.

3.1.9. a) $y'(x) = \dfrac{-x}{y(x)}$, $y''(x) = \dfrac{-R^2}{y^3(x)}$, b) $y'(2) = 1$, $y''(2) = \frac{1}{2}$.

3.1.10. b) Vztah má tvar $\mathrm{d}y = f'(x)\,\mathrm{d}x$ a vyjadřuje, jak veliká je změna nové proměnné y, když se původní proměnná x mění o „malé hodnoty“ $\mathrm{d}x$.

3.1.11. a) h^2, b) $(6+h)h^2$, c) $\dfrac{h^2}{4(2+h)}$, d) $\dfrac{(1-\sqrt{1+h})h}{2(1+\sqrt{1+h})}$.

3.1.12. a)

$h =$	1	0.5	0.1	0.01	0.001	0.0001
$\Delta m(0,h) \doteq$	6.389056	1.718282	0.221403	0.020201	0.002002	0.00020002
$\mathrm{d}m(0,h) =$	2	1	0.2	0.02	0.002	0.0002

b)

$h =$	1	0.5	0.1	0.01	0.001	0.0001
$\Delta m(\frac{1}{6}\pi,h) \doteq$	−0.818845	−0.345729	−0.054243	−0.005043	−0.0005004	−0.000050004
$\mathrm{d}m(\frac{1}{6}\pi,h) =$	−0.5	−0.25	−0.05	−0.005	−0.0005	−0.00005

3.2. Užití derivací

Definice a význam derivace

3.2.1. PŘÍKLAD. Pravděpodobnost dožití se věku x je pro narozeného jedince popsána funkcí $p(x)$. Jak interpretovat funkci μ, která je definována výrazem

$$\mu(x) = -\frac{1}{p(x)}\frac{\mathrm{d}p(x)}{\mathrm{d}x}\,?$$

Podle definice derivace pro malé kladné h uvedený vztah přibližně vyjadřuje (tím „přesněji", čím je h „menší")

$$\mu(x) \doteq -\frac{1}{p(x)}\frac{p(x+h)-p(x)}{h}.$$

Násobíme h, a zlomek vpravo rozšíříme číslem N_0, které vyjadřuje počet narozených; dostaneme

$$\mu(x)\,h \doteq \frac{N_0p(x) - N_0p(x+h)}{N_0p(x)}.$$

V posledním výrazu $N_0p(x)$ představuje počet jedinců, kteří dosáhli věku x, a $N_0p(x+h)$ je počet jedinců, kteří dosáhli věku $x+h$. Rozdíl $N_0p(x) - N_0p(x+h)$ udává tedy počet zemřelých ve věku, který je větší než x a je menší než $x+h$. Tedy podíl stojící na pravé straně poslední rovnosti vyjadřuje pravděpodobnost, že jedinec, který se dožil věku x, zemře před dosažením věku $x+h$. Funkce μ se nazývá intenzita úmrtnosti a veličina $\mu(x)\,h$ pro „malá" h odpovídá pravděpodobnosti úmrtí ve věku z intervalu $(x, x+h)$.

3.2.2. Poloha bodu při oscilačním pohybu na přímce je popsána funkcí $x(t) = A\cos\omega t$, kde A, ω jsou kladné konstanty. Najděte výraz pro rychlost $v(t)$ pohybu a najděte místa, kde je rychlost největší. Dále najděte výraz pro zrychlení $a(t)$ pohybu a najděte místa, kde je zrychlení oscilačního pohybu největší.

3.2.3. Veličinou $P(t)$ je vyjádřena velikost populace v závislosti na čase t. Vysvětlete, proč výrazy

$$\frac{\mathrm{d}P(t)}{\mathrm{d}t}, \quad \frac{1}{P(t)}\frac{\mathrm{d}P(t)}{\mathrm{d}t}$$

je rozumné nazývat rychlost růstu populace a relativní rychlost růstu populace. Spočítejte, že pokud populace je popsána funkcí $P(t) = P_0e^{\alpha t}$, v níž P_0 a α jsou konstanty, potom relativní rychlost růstu populace je α.

Tečna

3.2.4. Napište obecnou rovnici tečny ke křivce $y = 8 - 2x - x^2$ v bodech $(-1, ?)$, $(0, ?)$ a $(3, ?)$.

3.2.5. Napište vektor, který má směr tečny ke křivce $y = f(x)$ v bodě $x = a$, v němž existuje derivace funkce f. Napište pro tento bod vektor normály ke křivce, jenž směřuje do míst „jižnějších", než je bod $(a, f(a))$. Jaký je vektor normály směřující do „severnějších" míst?

3.2.6. Je dána funkce f, která má na otevřeném intervalu I derivaci. Najděte vyjádření pro funkci q, která popisuje y-ovou souřadnici bodu, v němž tečna v bodě x ke křivce $y = f(x)$ protíná osu y.

3.2.7. Je dána funkce f, která má na otevřeném intervalu I nenulovou derivaci. Najděte vyjádření pro funkci p, která popisuje x-ovou souřadnici bodu, v němž tečna v bodě x ke křivce $y = f(x)$ protíná osu x.

3.2.8. Funkce f je lichá funkce na $(-\infty, \infty)$ a $y = kx + q$ je tečna v bodě se souřadnicí $x = a$. Jakou rovnici má tečna v bodě se souřadnicí $x = -a$?

3.2.9. Funkce f je sudá funkce na $(-\infty, \infty)$ a $y = kx + q$ je tečna v bodě se souřadnicí $x = a$. Jakou rovnici má tečna v bodě se souřadnicí $x = -a$?

3.2.10. Rovnice tečny ke křivce $y = f(x)$ v jistém bodě se souřadnicí $x = a$ je $y = kx + q$. Jaká je rovnice tečny v bodě se souřadnicí $x = a$ ke křivce $y = \alpha f(x)$, kde α je libovolná konstanta?

3.2.11. Funkce f je libovolná funkce, která má na otevřeném intervalu I derivaci. Pro libovolný nenulový reálný parametr α sestrojíme funkci f_α předpisem

$$f_\alpha(x) = \alpha f(x) \quad \text{pro} \quad x \in I\,.$$

V bodě se souřadnicí $x = a \in I$, v němž derivace funkce f není rovna nule, sestrojíme tečnu ke grafu funkce f a označíme b bod, v němž tečna protíná osu x. V bodě se stejnou souřadnicí $x = a$ sestrojíme také tečnu ke grafu funkce f_α a označíme b_α bod, v němž tato tečna protíná osu x.

a) Odvoďte vztah mezi b a b_α pouhou úvahou, bez počítání.

b) Napište rovnice tečen a průsečíky b, b_α s osou x spočítejte.

Taylorův vzorec

3.2.12. Pro každou funkci f, která má na otevřeném intervalu I derivace (pro jednoduchost) všech řádů, můžeme pro každý bod $x \in I$ a pro libovolné přirozené číslo n a libovolný bod $x_0 \in I$ psát

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_{n+1}(x) \\ &\equiv \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R_{n+1}(x)\,, \end{aligned}$$

kde pro veličinu $R_{n+1}(x)$, kterou nazýváme zbytek, platí vztah

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\,,$$

v němž bod ξ je nějaký bod z intervalu s krajními body x a x_0. Řadu

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

nazýváme formální Taylorovou řadou se středem v bodě x_0. Často se pomocí této řady dá vyjádřit hodnota funkce $f(x)$.

a) Napište Taylorovu řadu se středem v bodě $x_0 = 2$ pro funkci $f(x) = x^3 - 7x^2 + 15x - 8$. Vypište všechny nenulové členy řady. Přesvědčte se, že zadaný polynom je roven odvozené Taylorově řadě.

b) Stejně jako v předcházející úloze: střed v bodě $x_0 = -1$, funkce $f(x) = x^5 - 2x + 1$.

c) Napište formální Taylorovy řady pro funkce $f_1(x) = e^x$, $f_2(x) = \cos x$ a $f_3(x) = \sin x$ se středem v bodě $x_0 = 0$. Tyto řady vyjadřují hodnoty funkcí pro každé x – dokonce i komplexní.

d) Najděte přibližné hodnoty pro e a e^{-1} sečtením prvních pěti členů odvozené řady. Srovnejte s hodnotou, kterou najdete na kalkulačce.

e) Najděte přibližné hodnoty $\sin 6°$ a $\cos 10°$ sečtením prvních dvou členů odvozených řad. Velikost úhlu vyjádříme v radiánech a pak dosadíme. Porovnejte s údajem kalkulačky.

Funkce rostoucí, klesající, minimum, maximum

3.2.13. Pomocí Rolleovy věty určete bez počítání disjunktní (bez společných bodů) otevřené intervaly délky jedna, v nichž leží kořeny derivace polynomu $p(x) = x(x^2-1)(x^2-4)$.

3.2.14. Příklad. Funkce $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ má zápornou derivaci v každém bodě svého definičního oboru $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$. Proto je funkce klesající na intervalu $(-\infty, 1)$ a také na intervalu $(1, \infty)$. Nelze říci, že funkce klesá na svém definičním oboru, neboť $0 < 2$ a přitom $f(0) = -1 < f(2) = 3$.

3.2.15. Najděte intervaly, na nichž je funkce $h(x) = \dfrac{(x^2+1)^2}{(x^2+2)^3}$ monotónní.

3.2.16. Na kterých intervalech je funkce $f(x) = \dfrac{3x^2 - 1}{x(x^2 - 1)}$ klesající?

3.2.17. Buď $f(x) = x^3(4 - x)$. Ukažte, že pro každé číslo $A < 27$ existuje jediná dvojice bodů (a, b) taková, že $a < 3 < b$ a $f(a) = f(b) = A$.

3.2.18. Dokažte, že funkce g je na svém definičním oboru kladná, když $g(x) = \dfrac{1}{x} + \ln x$.

3.2.19. Najděte maximum a minimum funkce $f(x) = x^3 - 3x^2 - 3$ na intervalu $I = \langle -1, 4 \rangle$.

3.2.20. Najděte maximum a minimum funkce $g(x) = x - 2 \operatorname{arctg} x$ na intervalu $I = \langle 0, \infty)$.

3.2.21. Najděte minimum a maximum funkce $h(x) = x^2 - 2x - 4|x - 2| + 1$ na intervalu $I = \langle -2, 3 \rangle$.

3.2.22. Najděte minimum a maximum funkce $f(x, y) = 5x^2 + 4xy + 2y^2$ na množině M bodů (x, y) v rovině, když $M = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 3\}$. Množina M se dá zachytit (parametrizovat) jedinou proměnnou, například t; můžeme psát $x = \sqrt{3} \cos t$, $y = \sqrt{3} \sin t$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$.

3.2.23. Jako v předcházející úloze pro funkci $g(x, y) = 10x^2 + 6xy + 2y^2$ a $M = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$.

3.2.24. Najděte mezi kladnými čísly takové, že je pro něj součet druhé a třetí mocniny zmenšený o přirozený logaritmus jeho páté mocniny nejmenší.

3.2.25. Najděte rozměry obdélníka s obvodem $L > 0$, který má největší obsah.

3.2.26. Najděte poloměr základny r a výšku v válce největšího objemu, který se vejde do koule poloměru R.

3.2.27. Jako v předcházející úloze pro kužel s poloměrem základny r a výškou v.

3.2.28. Náklady na provoz jisté lodi se dají rozdělit na paušální a ty, které jsou svázány s rychlostí pohybu lodě. Tyto náklady rostou se třetí mocninou rychlosti a při rychlosti 10 km/h jsou 40 Kč/h. Paušální náklady jsou 640 Kč/h. Při jaké rychlosti jsou náklady na jeden kilometr plavby nejnižší?

3.2.29. Cena $C(x)$ komodity klesá se vzdáleností x od města podle vztahu $C(x) = \dfrac{c_0}{1 + \alpha x}$, kde c_0 a α jsou kladné konstanty. Dopravní náklady $D(x)$ rostou lineárně se vzdáleností od města x podle vztahu $D(x) = ax + b$, kde a, b jsou kladné konstanty. Za jakých podmínek na parametry c_0, α, a, b jsou celkové náklady $N(x) = C(x) + D(x)$ nejmenší pro nějakou vzdálenost $x_0 > 0$? Podmínku interpretujte graficky.

3.2.30. Aritmetický průměr. Jsou dána reálná čísla $x_1, \ldots, x_n$. Najděte bod absolutního (globálního) minima funkce

$$f_A(x) = \sum_{j=1}^{n} (x - x_j)^2 .$$

3.2.31. Geometrický průměr. Jsou dána kladná čísla $x_1, \ldots, x_n$. Najděte bod absolutního (globálního) minima funkce

$$f_G(x) = \sum_{j=1}^{n} (\ln x - \ln x_j)^2 \equiv \sum_{j=1}^{n} \ln^2 \frac{x}{x_j} .$$

3.2.32. Harmonický průměr. Jsou dána kladná čísla $x_1, \ldots, x_n$.

a) Najděte bod x_H absolutního (globálního) minima funkce $f_H(x) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \Big(\frac{1}{x} - \frac{1}{x_j} \Big)^2$.

b) Proč stačí hledat minimum mezi kladnými čísly?

c) Spočítejte $f''(x_H)$.

3.2.33. Vyšetřujte minimum vzdálenosti bodu Q a bodů křivky. Odvoďte podmínku, pro x-ovou souřadnici bodu P na křivce $y = x^2$, který je nejblíže bodu $Q = (1, 0)$. Ukažte, že spojnice bodu P s bodem Q je normálou křivky v bodě P.

3.2.34. Dokažte využitím konkávnosti, že funkce $g(\varphi) = 2\varphi + \pi\cos\varphi - \pi$ je nezáporná pro $\varphi \in \langle 0, \frac{1}{2}\pi\rangle$. Ukažte, že na žádném větším intervalu už tato funkce nezáporná není.

l'Hospitalovo pravidlo

3.2.35. Poznámka. Výrazy, které se mají derivovat při aplikaci l'Hospitalova pravidla, jsou někdy složité a lze je zjednodušit tím, že z nich vypreparujeme části, které mají nenulovou a konečnou limitu. Například

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x-\sin x)(5-\cos x)}{\sin^3 x} = \lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{\sin^3 x}\,\lim_{x\to 0}(5-\cos x) = 4\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{\sin^3 x}$$
$$= 4\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3\sin^2 x\cos x} = \frac{4}{3}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin^2 x}\,\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}$$
$$= \frac{4}{3}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin^2 x} = \frac{4}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2\sin x\cos x} = \frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x} = \frac{2}{3}.$$

Někdy je třeba výraz pro použití l'Hospitalova pravidla připravit. Pak stačí pouze trocha trpělivosti, abychom z úprav, které se nabízejí, vybrali tu správnou. Například, pro výpočet limity $\lim\limits_{x\to 0+} x^3\ln x$ vybereme poslední výraz z těchto:

$$\lim_{x\to 0+} x^3\ln x = \lim_{x\to 0+}\frac{x^3}{(\ln x)^{-1}} = \lim_{x\to 0+}\frac{\ln x}{x^{-3}},$$

poněvadž prostřední výraz se užitím l'Hospitalova pravidla komplikuje. Zkuste to.

3.2.36. Pomocí l'Hospitalova pravidla spočítejte:

a) $\lim\limits_{x\to\frac{3}{2}}\dfrac{2x^2+x-6}{4x^2-8x+3}$, b) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^3-5x^2-4x+3}{x^3+2x^2-x-2}$, c) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}}\dfrac{3x^2-4x+1}{6x^3+7x^2-1}$,

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$, e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$, f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^2\operatorname{tg} x}$,

g) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln^3 x}{x}$, h) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3}{e^x}$, i) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$

j) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x-1}{3^x-1}$, k) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-b^x}{x}$, $a>0$, $b>0$, l) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{\operatorname{arctg} x}$,

m) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin 7x-\sin x}{\operatorname{tg} 3x}$, n) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x-\operatorname{tg} 4x}{x^4}$, o) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{e^x-e^2}{x-2}$,

v těchto úlohách označuje $p(x)$ polynom libovolného stupně v proměnné x:

p) $\lim\limits_{x\to\infty} p(x)e^{-\alpha x}$, $\alpha>0$, q) $\lim\limits_{x\to+\infty} p(x)e^{-\alpha x^2}$, r) $\lim\limits_{x\to-\infty} p(x)e^{-\alpha x^2}$.

3.2.37. Nejprve upravte, pak pomocí l'Hospitalova pravidla spočítejte:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}(x-\ln x)$, b) $\lim\limits_{x\to\infty}(e^{\frac{x}{10}}-5x^3-3x^2-1)$, c) $\lim\limits_{x\to 0+}\left(\dfrac{4}{x\sqrt{x}}+\ln x\right)$,

d) $\lim\limits_{x\to 0+} x^x$, e) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$, f) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^x$,

g) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\operatorname{cotg} x\right)$, h) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\left(\dfrac{1}{\ln 2x}-\dfrac{2x}{2x-1}\right)$, i) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{e^x-1}-\dfrac{1}{x}\right)$.

3.2.38. POZNÁMKA. Někdy je rozumné ještě před použitím l'Hospitalova pravidla změnit proměnnou. Například přejdeme-li od proměnné x, $x \to 0+$ k proměnné $y = \frac{1}{x}$, máme $y \to \infty$, a proto

$$\lim_{x\to 0+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^5} = \lim_{y\to\infty} y^5 e^{-y} = \lim_{y\to\infty} \frac{y^5}{e^y} = 0\,.$$

Pokud nezačneme úpravou, každé užití l'Hospitalova pravidla vede ke stále složitějším výrazům.

Řešení.

3.2.2. Pro rychlost platí $v(t) = -A\omega \sin \omega t$, největší v bodech, kde je $x(t) = 0$. Pro zrychlení platí $a(t) = -A\omega^2 \cos \omega t \equiv -\omega^2 x(t)$, největší je v bodech, kde je $x(t)$ extremální. **3.2.4.** $y - 9 = 0$, $2x + y - 8 = 0$, $8x + y - 17 = 0$. **3.2.5.** Tečný vektor: $(1, f'(a))$; normálový vektor mířící severněji: $(-f'(a), 1)$, normálový vektor mířící jižněji: $(f'(a), -1)$. **3.2.6.** $q(x) = f(x) - x f'(x)$. **3.2.7.** $q(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$. **3.2.8.** $y = kx - q$. **3.2.9.** $y = -kx + q$. **3.2.10.** $y = \alpha(kx + q)$.

3.2.11. a) $b = b_\alpha$. b) $y - f(a) = f'(a)(x - a)$, $y - \alpha f(a) = \alpha f'(a)(x - a)$, $b \equiv b_\alpha = a - \dfrac{f(a)}{f'(a)}$.

3.2.12. a) $f(x) = (x-2)^3 - (x-2)^2 - (x-2) + 2$.
b) $f(x) = (x+1)^5 - 5(x+1)^4 + 10(x+1)^3 - 10(x+1)^2 + 3(x+1) + 2$.
c) $e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \ldots \equiv \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$, $\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \ldots$,
$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \ldots$,

3.2.13. Derivace je polynom stupně čtyři. Jeho čtyři kořeny leží v intervalech: $(-2, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 2)$. **3.2.15.** Derivace je

$$h'(x) = \frac{2x(1 - x^2)(x^2 + 1)}{(x^2 + 2)^4}\,.$$

Funkce h roste na $(-\infty, -1\rangle$ a na $\langle 0, 1\rangle$, klesá na $\langle -1, 0\rangle$ a na $\langle 1, \infty)$.

3.2.16. Pro derivaci platí

$$f'(x) = \frac{-(3x^4 + 1)}{x^2(x^2 - 1)^2}\,.$$

Derivace je tedy záporná pro všechny body definičního oboru. Funkce f klesá na každém z těchto intervalů: $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, \infty)$. **3.2.17.** Funkce f je rostoucí na intervalu $(-\infty, 3\rangle$ a klesající na $\langle 3, \infty)$, přitom $f(3) = 27$.

3.2.18. Minimum funkce g na definičním oboru $(0, \infty)$ je v bodě $x = 1$; poněvadž $g(1) = 1$, je dokonce $g(x) \geq 1$ pro každé $x \in (0, \infty)$. **3.2.19.** Minimum na intervalu I je $f(-1) = f(2) = -7$, maximum je $f(4) = 13$. **3.2.20.** Minimum na intervalu I je $g(1) = 1 - \frac{1}{2}\pi$, maximum neexistuje, funkce není shora omezená. **3.2.21.** Minimum na intervalu I je $h(-1) = -8$, maximum je $h(2) = 1$. Derivace funkce h v bodě $x = 2$ neexistuje. **3.2.22.** Minimum na množině M je 3, maximum je 18. **3.2.23.** Minimum na množině M je 1, maximum je 11. **3.2.24.** $x = 1$. **3.2.25.** Čtverec o straně $\frac{1}{4}L$. **3.2.26.** $r = \frac{\sqrt{6}}{3}R$, $v = \frac{2\sqrt{3}}{3}R$. **3.2.27.** $r = \frac{2\sqrt{2}}{3}R$, $v = \frac{4}{3}R$. **3.2.28.** Jde o minimum funkce $F(v) = \frac{4v^3 + 64000}{v}$. Nejnižší náklady jsou při rychlosti 20 km/h. **3.2.29.** Derivace funkce $N(x)$ je rovna nule v bodě $x > 0$, když $a(1 + \alpha x)^2 = \alpha c_0$. To je možné pouze za podmínky $\frac{\alpha c_0}{a} > 1$, což je totéž jako podmínka $N'(0) < 0$.

3.2.30. Funkce f_A je definována na $(-\infty, \infty)$. Limity v nevlastních bodech $\pm\infty$ jsou ∞. Poněvadž je derivace funkce f_A rovna nule pouze v bodě x_A, pro který platí

$$x_A = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} x_j \quad \text{(aritmetický průměr čísel} \quad x_1, \ldots, x_n)\,,$$

je tento bod absolutním minimem funkce f_A na $(-\infty, \infty)$.

3.2.31. Funkce f_G je definována na $(0,\infty)$. Limity v nule zprava a v nevlastním bodě ∞ jsou ∞. Poněvadž je derivace funkce f_G rovna nule pouze v bodě x_G, pro který platí

$$x_G = \sqrt[n]{x_1\cdots x_n} \equiv (x_1\cdots x_n)^{\frac{1}{n}} \quad \text{(geometrický průměr čísel} \quad x_1,\dots,x_n),$$

je tento bod absolutním minimem funkce f_G na $(0,\infty)$.

3.2.32. a) Funkce f_H budeme vyšetřovat na $(0,\infty)$. Pro limitu zprava v nule a pro limitu v $+\infty$ platí

$$\lim_{x\to 0+} f_H(x) = +\infty \;, \quad \lim_{x\to+\infty} f_H(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{x_j^2}\,.$$

Jakmile je x větší než největší z čísel $x_1,\dots,x_n$, je

$$f(x) < \lim_{x\to\infty} f_H(x) \equiv \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{x_j^2}\,.$$

Proto existuje bod, ve kterém funkce f_H nabývá minima na intervalu $(0,\infty)$. Tento bod musí být bodem x_H, bodem v němž derivace funkce f_H je rovna nule. Takový bod x_H je jenom jeden a splňuje relaci

$$\frac{1}{x_H} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{x_j} \quad (x_H \text{ je harmonický průměr čísel} \quad x_1,\dots,x_n)\,.$$

c) $\dfrac{2n}{x_H^4}$.

3.2.33. Souřadnice x nejbližšího bodu splňuje $2x^3+x-1=0$. Vektor $\vec{t}_P$, který je tečným vektorem ke křivce $y=x^2$ v bodě $P=(x,x^2)$, má tvar $\vec{t}_P=(1,2x)$. Poněvadž $\overrightarrow{QP}=(x-1,x^2)$, je jejich skalární součin $\vec{t}_P\cdot\overrightarrow{QP}=2x^3+x-1=0$. Proto je $\overrightarrow{QP}$ normálou.

3.2.34. Funkce má hodnotu nula v krajních bodech intervalu $\langle 0,\frac{1}{2}\pi\rangle$. Poněvadž $g''(x)=-\pi\cos\varphi$, funkce je konkávní na $\langle 0,\frac{1}{2}\pi\rangle$, a graf leží nad osou x pro hodnoty z vnitřku vyšetřovaného intervalu. Poněvadž $g'(0)=2>0$ a $g'(\frac{1}{2}\pi)=2-\pi<0$, interval nejde rozšířit.

3.2.36. a) $\frac{7}{4}$, b) -6, c) $-\frac{3}{10}$, d) $\frac{1}{2}$, e) $-\frac{1}{6}$, f) $-\frac{1}{6}$, g) 0, h) 0, i) $-\frac{1}{6}$, j) $-\ln\frac{3}{2}$, k) $\ln\frac{a}{b}$, l) 1, m) 2, n) $-\frac{64}{3}$, o) e^2, p) 0, q) 0, r) 0.

3.2.37. a) ∞, píšeme $x-\ln x = x(1-\frac{\ln x}{x})$, výsledek je důsledkem $\frac{\ln x}{x}\to 0$ pro $x\to\infty$,
b) ∞, píšeme

$$e^{\frac{x}{10}} - 5x^3 - 3x^2 - 1 = x^3\Big(\frac{e^{\frac{x}{10}}}{x^3} - 5 - \frac{3}{x} - \frac{1}{x^3}\Big)\,;$$

podle l'Hospitalova pravidla je limita prvního výrazu v závorce nekonečno,
c) ∞, píšeme

$$\frac{4}{x\sqrt{x}} + \ln x = \frac{1}{x\sqrt{x}}\Big(4 + \frac{\ln x}{x^{-\frac{3}{2}}}\Big)\,;$$

podle l'Hospitalova pravidla je limita druhého výrazu v závorce nula,
d) 1, píšeme $x^x = e^{x\ln x}$ a výsledek je důsledkem $x\ln x\to 0$ pro $x\to 0+$,
e) e, f) e^{-2}, g) 0, h) $-\frac{1}{2}$, i) $-\frac{1}{2}$.

3.3. Průběh funkce

3.3.1. Vyšetřete průběh funkce, v inflexních bodech – pokud souřadnice bodu, v němž má funkce inflexi, je snadno vyjádřitelná – spočítejte obecnou rovnici tečny (grafy jsou na konci sekce):

a) $f(x) = (x+3)^2(x-3)$, b) $f(x) = \dfrac{4x}{x^2+1}$, c) $f(x) = \dfrac{6x^2}{x^2+1}$,

d) $f(x) = \dfrac{(x+1)^2}{(x-1)^2}$, e) $g(x) = \left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^2$, f) $f(x) = \dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$,

g) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-a^2}$, $a>0$, h) $f(x) = (x-3)\sqrt{x}$, i) $f(x) = \dfrac{x-2}{\sqrt{x^2+1}}$,

j) $f(x) = x^2e^{-x}$, k) $m(x) = \dfrac{1}{1-e^x}$, l) $p(x) = \dfrac{e^x+1}{e^x-1}$,

m) $f(x) = e^{\frac{x+1}{x}}$, n) $f(x) = \dfrac{e^x}{x-a}$, $a \in R$, o) $f(x) = ax - \ln x$, $a>0$,

p) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, q) $f(x) = 5x^2\ln x$, r) $h(x) = \ln\left(1-\dfrac{x^2}{a^2}\right), a>0$.

3.3.2. Použijte pouze první derivaci a načrtněte graf funkce $f(x) = 2\sin x + \cos 2x$. Využijte periodicity funkce. V tištěném grafu odhadněte polohu inflexních bodů a jejich x-ových souřadnic. Potom tyto hodnoty spočtěte a výsledky porovnejte. (Graf je na konci sekce.)

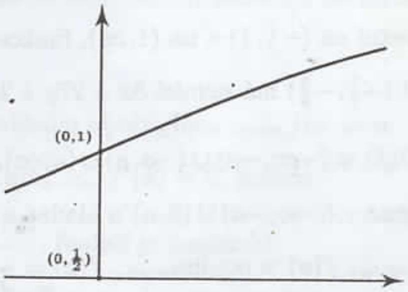
3.3.3. Ukažte, že funkce f a g v úlohách 3.3.1.d a 3.3.1.e splňují $g(x) = f(-x)$ pro $x \in D(g)$. Odvoďte graf a vlastnosti funkce g z grafu a vlastností funkce f.

3.3.4. Ukažte, že funkce m a p v úlohách 3.3.1.k a 3.3.1.l splňují $p(x) = 1 - 2m(x)$ pro $x \in D(p)$. Odvoďte vlastnosti funkce p z vlastností funkce m.

3.3.5. Na obrázku je část grafu funkce

$$f(x) = \frac{x^2+2x+3}{x^2+3}$$

pro hodnoty proměnné x vzaté z jistého (vám zatajeného) okolí bodu $x=0$. Na ose x je vzdálenost bodu $x=1$ od počátku X_m milimetrů a na ose y je vzdálenost bodu $y=1$ od počátku Y_m milimetrů. Kolik je poměr X_m/Y_m, když víte, že je vyjádřitelný jako poměr dvou malých celých čísel?



Řešení.

3.3.1. a) $D(f) = (-\infty,\infty)$, funkce se rovná nule v bodech $x=-3$ a $x=3$, je záporná na $(-\infty,-3)\cup(-3,3)$, kladná na $(3,\infty)$, $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$, $f'(x) = 3(x+3)(x-1)$, funkce roste na $(-\infty,-3\rangle$ a na $\langle 1,\infty)$, klesá na $\langle -3,1\rangle$, $f''(x) = 6(x+1)$, funkce je konkávní na $(-\infty,-1\rangle$, konvexní na $\langle -1,\infty)$, funkce má inflexi v bodě $x=-1$, rovnice tečny v inflexním bodě $(-1,-16)$ je $12x+y+28=0$,

b) $D(f) = (-\infty,\infty)$, lichá funkce, funkce je záporná (resp. kladná) na $(-\infty,0)$ (resp. $(0,\infty)$), $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$, $f'(x) = \dfrac{4(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$, funkce klesá na $(-\infty,-1\rangle$ a na $\langle 1,\infty)$, roste na $\langle -1,1\rangle$, $f''(x) = \dfrac{8x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$, funkce je konkávní na $(-\infty,-\sqrt{3}\rangle$ a na $\langle 0,\sqrt{3}\rangle$ konvexní na $\langle -\sqrt{3},0\rangle$ a na $\langle\sqrt{3},\infty)$, funkce má inflexi v bodech $x=-\sqrt{3}$, $x=0$, $x=\sqrt{3}$, tečny v příslušných inflexních bodech mají postupně tyto rovnice $x+2y+3\sqrt{3}=0$, $y=4x$, $x+2y-3\sqrt{3}=0$,

c) $D(f) = (-\infty, \infty)$, nezáporná sudá funkce, která se rovná nule pouze v bodě $x = 0$, $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 6$, $f'(x) = \dfrac{12x}{(x^2+1)^2}$, funkce klesá na $(-\infty, 0\rangle$, roste na $\langle 0, \infty)$, $f''(x) = \dfrac{12(1-3x^2)}{(x^2+1)^3}$, funkce je konkávní na $(-\infty, -\frac{1}{3}\sqrt{3}\rangle$ a na $\langle \frac{1}{3}\sqrt{3}, \infty)$, konvexní na $\langle -\frac{1}{3}\sqrt{3}, \frac{1}{3}\sqrt{3}\rangle$, funkce má inflexi v bodech $x = -\frac{1}{3}\sqrt{3}$ a $x = \frac{1}{3}\sqrt{3}$, rovnice tečny v příslušných inflexních bodech jsou $9\sqrt{3}x + 4y + 3 = 0$ a $9\sqrt{3}x - 4y - 3 = 0$,

d) $D(f) = (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$, nezáporná funkce, která se rovná nule pouze v bodě $x = -1$, $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 1$, $\lim_{x\to 1} f(x) = \infty$, $f'(x) = \dfrac{-4(x+1)}{(x-1)^3}$, funkce klesá na $(-\infty, -1\rangle$ a na $(1, \infty)$, roste na $\langle -1, 1)$, $f''(x) = \dfrac{8(x+2)}{(x-1)^4}$, funkce je konkávní na $(-\infty, -2\rangle$, konvexní na $\langle -2, 1)$ a na $(1, \infty)$, funkce má inflexi v bodě $x = -2$ a rovnice tečny v bodě $(-2, \frac{1}{9})$ má rovnici $4x + 27y + 5 = 0$,

e) $D(g) = (-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$, nezáporná funkce, která se rovná nule pouze v bodě $x = 1$, $\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = 1$, $\lim_{x\to -1} g(x) = \infty$, $g'(x) = \dfrac{4(x-1)}{(x+1)^3}$, funkce roste na $(-\infty, -1)$ a na $\langle 1, \infty)$, klesá na $(-1, 1\rangle$, $g''(x) = \dfrac{-8(x-2)}{(x+1)^4}$, funkce je konvexní na $(-\infty, -1)$ a na $(-1, 2\rangle$, konkávní na $\langle 2, \infty)$, funkce má inflexi v bodě $x = 2$ a rovnice tečny v inflexním bodě $(2, \frac{1}{9})$ má rovnici $4x - 27y - 5 = 0$,

f) $D(f) = (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$, funkce se rovná nule pouze pro $x = \frac{1}{2}$, je záporná v $(-\infty, \frac{1}{2})$, kladná v $(\frac{1}{2}, 1) \cup (1, \infty)$, $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x\to 1} f(x) = \infty$, $f'(x) = \dfrac{-2x}{(x-1)^3}$, funkce klesá na $(-\infty, 0\rangle$ a na $(1, \infty)$, roste na $\langle 0, 1)$, minimum f je $f(0) = -1$, $f''(x) = \dfrac{2(2x+1)}{(x-1)^4}$, funkce je konkávní na $(-\infty, -\frac{1}{2}\rangle$, konvexní na $\langle -\frac{1}{2}, 1)$ a na $(1, \infty)$, funkce má inflexi v bodě $x = -\frac{1}{2}$ a rovnice tečny v inflexním bodě $(-\frac{1}{2}, -\frac{8}{9})$ má rovnici $8x + 27y + 28 = 0$,

g) $D(f) = (-\infty, -a) \cup (-a, a) \cup (a, \infty)$, lichá funkce, která se rovná nule pouze v bodě $x = 0$, funkce je záporná v $(-\infty, -a) \cup (0, a)$ a kladná v $(-a, 0) \cup (a, \infty)$, $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$, $\lim_{x\to -a-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to -a+} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to a-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to a+} f(x) = \infty$, přímka $y = x$ je asymptotou v obou nevlastních bodech $\pm\infty$, $f'(x) = \dfrac{x^2(x^2-3a^2)}{(x^2-a^2)^2}$, funkce roste na $(-\infty, -\sqrt{3}a\rangle$ a na $\langle \sqrt{3}a, \infty)$, klesá na $\langle -\sqrt{3}a, -a)$, na $(-a, a)$ a na $(a, \sqrt{3}a\rangle$, $f(\sqrt{3}a) = -f(-\sqrt{3}a) = \frac{3}{2}\sqrt{3}a$, $f''(x) = \dfrac{2a^2x(x^2+3a^2)}{(x^2-a^2)^3}$, funkce je konkávní na $(-\infty, -a)$ a na $\langle 0, a)$, konvexní na $(-a, 0\rangle$ a na (a, ∞), funkce má inflexi v bodě $x = 0$ a tečnou v inflexním bodě $(0, 0)$ je osa x.

h) $D(f) = \langle 0, \infty)$, funkce se rovná nule pouze v bodech $x = 0$ a $x = 3$, je záporná na $(0, 3)$ a kladná na $(3, \infty)$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, pro $x \in (0, \infty)$ je $f'(x) = \dfrac{3(x-1)}{2\sqrt{x}}$, funkce klesá na $\langle 0, 1\rangle$, roste na $\langle 1, \infty)$, minimum je $f(1) = -2$, pro $x \in (0, \infty)$ je $f''(x) = \dfrac{3(x+1)}{4x\sqrt{x}}$, funkce je konvexní na $\langle 0, \infty)$,

i) $D(f) = (-\infty, \infty)$, funkce má hodnotu nula pouze pro $x = 2$, je kladná na $(2, \infty)$ a záporná na $(-\infty, 2)$, $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm 1$, $f'(x) = \dfrac{2x+1}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$, funkce klesá na $(-\infty, -\frac{1}{2}\rangle$, roste na $\langle -\frac{1}{2}, \infty)$, minimum je $f(-\frac{1}{2}) = -\sqrt{5}$, $f''(x) = \dfrac{2-3x-4x^2}{(x^2+1)^{\frac{5}{2}}}$, funkce má inflexi ve dvou bodech:

$x_1 = \frac{1}{8}(-3-\sqrt{41}) \doteq -1.2$, $x_2 = \frac{1}{8}(-3+\sqrt{41}) \doteq 0.4$, je konkávní na $(-\infty, x_1\rangle$ a na $\langle x_2, \infty)$ a konvexní na $\langle x_1, x_2\rangle$,

j) $D(f) = (-\infty, \infty)$, nezáporná funkce, která se rovná nule pouze v bodě $x = 0$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, $f'(x) = x(2-x)e^{-x}$, funkce klesá na $(-\infty, 0\rangle$ a na $\langle 2, \infty)$, roste na $\langle 0, 2\rangle$, $f''(x) = (x^2-4x+2)e^{-x}$, funkce má inflexi ve dvou bodech: $x_1 = (2-\sqrt{2}) \doteq 0.6$, $x_2 = (2+\sqrt{2}) \doteq 3.4$, je konvexní na $(-\infty, x_1\rangle$ a na $\langle x_2, \infty)$ a konkávní na $\langle x_1, x_2\rangle$,

k) $D(m) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, v žádném bodě není funkce rovna nule, funkce je kladná na $(-\infty, 0)$ – je ovšem hned vidět, že na tomto intervalu je větší než 1 –, funkce je záporná na $(0, \infty)$, $\lim_{x\to-\infty} m(x) = 1$, $\lim_{x\to\infty} m(x) = 0$, $\lim_{x\to0-} m(x) = \infty$, $\lim_{x\to0+} m(x) = -\infty$, $m'(x) = \dfrac{e^x}{(e^x-1)^2}$, funkce roste na $(-\infty, 0)$ a na $(0, \infty)$, $m''(x) = \dfrac{-(e^x+1)e^x}{(e^x-1)^3} \equiv \dfrac{(1+e^x)e^x}{(1-e^x)^3}$, v žádném bodě funkce nemá inflexi, je konvexní na $(-\infty, 0)$ a konkávní na $(0, \infty)$, křivka $y = m(x)$ je středově symetrická vzhledem k bodu $(0, \frac{1}{2})$,

l) $D(p) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, lichá funkce, záporná na $(-\infty, 0)$, kladná na $(0, \infty)$ – je vidět, že v absolutní hodnotě jsou hodnoty funkce větší než 1 –, v žádném bodě definičního oboru není funkce rovna nule, $\lim_{x\to\pm\infty} p(x) = \pm1$, $\lim_{x\to0-} p(x) = -\infty$, $\lim_{x\to0+} p(x) = \infty$, $p'(x) = \dfrac{-2e^x}{(e^x-1)^2}$, funkce klesá na $(-\infty, 0)$ a na $(0, \infty)$, $p''(x) = \dfrac{2(e^x+1)e^x}{(e^x-1)^3}$, funkce je konkávní na $(-\infty, 0)$, konvexní na $(0, \infty)$, funkce v žádném bodě nemá inflexi,

m) $D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, funkce kladná ve všech bodech definičního oboru, $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = e$, $\lim_{x\to0-} f(x) = 0$, $\lim_{x\to0+} f(x) = \infty$, $f'(x) = \dfrac{-e^{\frac{x+1}{x}}}{x^2} \equiv \dfrac{-f(x)}{x^2}$, $\lim_{x\to0-} f'(x) = 0$, funkce klesá na $(-\infty, 0)$ a na $(0, \infty)$, $f''(x) = \dfrac{(2x+1)e^{\frac{x+1}{x}}}{x^4} \equiv \dfrac{(2x+1)f(x)}{x^4}$, funkce je konkávní na $(-\infty, -\frac{1}{2}\rangle$, konvexní na $\langle -\frac{1}{2}, 0)$ a na $(0, \infty)$, funkce má inflexi bodě $x = -\frac{1}{2}$ a rovnice tečny v bodě $(-\frac{1}{2}, e^{-1}) \approx (-\frac{1}{2}, 0.4)$ je $4x + ey + 1 = 0$, poněvadž $f(x) = e \cdot e^{\frac{1}{x}}$, lze s funkcí zadanou pracovat jako s násobkem funkce h, $h(x) = e^{\frac{1}{x}}$,

n) $D(f) = (-\infty, a) \cup (a, \infty)$, funkce je záporná na $(-\infty, a)$, kladná na (a, ∞), v žádném bodě definičního oboru není funkce rovna nule, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to a-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to a+} f(x) = \infty$, $f'(x) = \dfrac{(x-a-1)e^x}{(x-a)^2}$, funkce klesá na $(-\infty, a)$ a na $(a, a+1\rangle$, roste na $\langle a+1, \infty)$, $f(a+1) = e^{a+1}$, $f''(x) = \dfrac{((x-a-1)^2+1)e^x}{(x-a)^3}$, funkce je konkávní na $(-\infty, a)$, konvexní na (a, ∞), funkce v žádném bodě nemá inflexi,

o) $D(f) = (0, \infty)$, $\lim_{x\to0+} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $f'(x) = \dfrac{ax-1}{x}$, funkce klesá na $(0, \frac{1}{a}\rangle$, roste na $\langle \frac{1}{a}, \infty)$, minimum funkce je $f(\frac{1}{a}) = 1 + \ln a$, $f''(x) = \dfrac{1}{x^2}$, funkce je konvexní na $(0, \infty)$, funkce v žádném bodě nemá inflexi,

p) $D(f) = (0,\infty)$, funkce má hodnotu nula pouze pro $x = 1$, je záporná na $(0,1)$ a kladná na $(1,\infty)$, $\lim_{x\to 0+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, $f'(x) = \dfrac{1-\ln x}{x^2}$, funkce roste na $(0,\mathrm{e})$, klesá na $\langle \mathrm{e},\infty)$, maximum funkce je $f(\mathrm{e}) = \dfrac{1}{\mathrm{e}} \doteq 0.4$, $f''(x) = \dfrac{2\ln x - 3}{x^3}$, funkce je konkávní na $(0,\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}\rangle$, konvexní na $\langle \mathrm{e}^{\frac{3}{2}},\infty)$, funkce má inflexi v bodě $x = \mathrm{e}^{\frac{3}{2}}$, rovnice tečny v inflexním bodě $(\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}, \frac{3}{2}\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}) \approx (4.5, 0.3)$ je $x + 2\mathrm{e}^3 y - 4\mathrm{e}^{\frac{3}{2}} = 0$,

q) $D(f) = (0,\infty)$, funkce má hodnotu nula pouze pro $x = 1$, je záporná na $(0,1)$ a kladná na $(1,\infty)$, $\lim_{x\to 0+} f(x) = 0$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $f'(x) = 5x(2\ln x + 1)$, funkce klesá na $(0,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\rangle \approx (0, 0.6)$, roste na $\langle \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}},\infty)$, minimum funkce je $f(\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}) = \dfrac{-5}{2\mathrm{e}} \doteq -0.9$, $\lim_{x\to 0+} f'(x) = 0$, $f''(x) = 5(2\ln x + 3)$, funkce je konkávní na $(0,\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}\rangle$, konvexní na $\langle \mathrm{e}^{-\frac{3}{2}},\infty)$, funkce má inflexi v bodě $x = \mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}$, rovnice tečny v inflexním bodě $(\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}, -\frac{15}{2}\mathrm{e}^{-3}) \approx (0.2, 0.4)$ je $20\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}x + 2\mathrm{e}^3 y - 5 = 0$,

r) $D(h) = (-a,a)$, sudá a nekladná funkce, která se rovná nule pouze v bodě $x = 0$, $\lim_{x\to -a+} h(x) = -\infty$, $\lim_{x\to a-} h(x) = -\infty$, $h'(x) = \dfrac{2x}{x^2-a^2} \equiv \dfrac{-2x}{a^2-x^2}$, funkce roste na $(-a,0\rangle$, klesá na $\langle 0,a)$, $h''(x) = \dfrac{-2(x^2+a^2)}{(x^2-a^2)^2}$, funkce je konkávní na $(-a,a)$, v žádném bodě nemá inflexi.

3.3.2. Funkce $x \to 2\sin x + \cos 2x$ je definována pro všechna reálná čísla a je periodická s periodou 2π, proto stačí vyšetřit vlastnosti funkce na nějakém intervalu délky 2π. Zvolili jsme interval $\langle 0, 2\pi\rangle$. Poněvadž $f'(x) = 2\cos x - 2\sin 2x \equiv 2\cos x(1 - 2\sin x)$, je derivace je nulová pro tyto body z intervalu $\langle 0, 2\pi\rangle$: $x = \frac{1}{6}\pi$, $x = \frac{1}{2}\pi$, $x = \frac{5}{6}\pi$, $x = \frac{3}{2}\pi$. Hodnoty funkce v těchto bodech jsou $f(\frac{1}{6}\pi) = f(\frac{5}{6}\pi) = \frac{3}{2}$, $f(\frac{1}{2}\pi) = 1$, $f(\frac{3}{2}\pi) = -3$, funkce roste na $\langle 0, \frac{1}{6}\pi\rangle$, na $\langle \frac{1}{2}\pi, \frac{5}{6}\pi\rangle$ a na $\langle \frac{3}{2}\pi, 2\pi\rangle$, klesá na $\langle \frac{1}{6}\pi, \frac{1}{2}\pi\rangle$ a na $\langle \frac{5}{6}\pi, \frac{3}{2}\pi\rangle$. Pro začátek a konec grafu na $\langle 0, 2\pi\rangle$ využijeme hodnoty $f'(0) = f'(2\pi) = 2$. Poněvadž $f''(x) = -2(\sin x + 2\cos 2x) \equiv 2(4\sin^2 x - \sin x - 2)$, body inflexe splňují $\sin x = \frac{1}{8}(1 \pm \sqrt{33})$, odtud se získají tyto body inflexe z intervalu $\langle 0, 2\pi\rangle$: $x_1 \doteq 1$, $x_2 \doteq 2.1$, $x_3 \doteq 3.8$, $x_4 \doteq 5.6$. Křivka $y = 2\sin x + \cos 2x$, $x \in (-\infty,\infty)$, je symetrická vzhledem k osám představovaným přímkami $x = \frac{1}{2}\pi$ a $x = \frac{3}{2}\pi$.

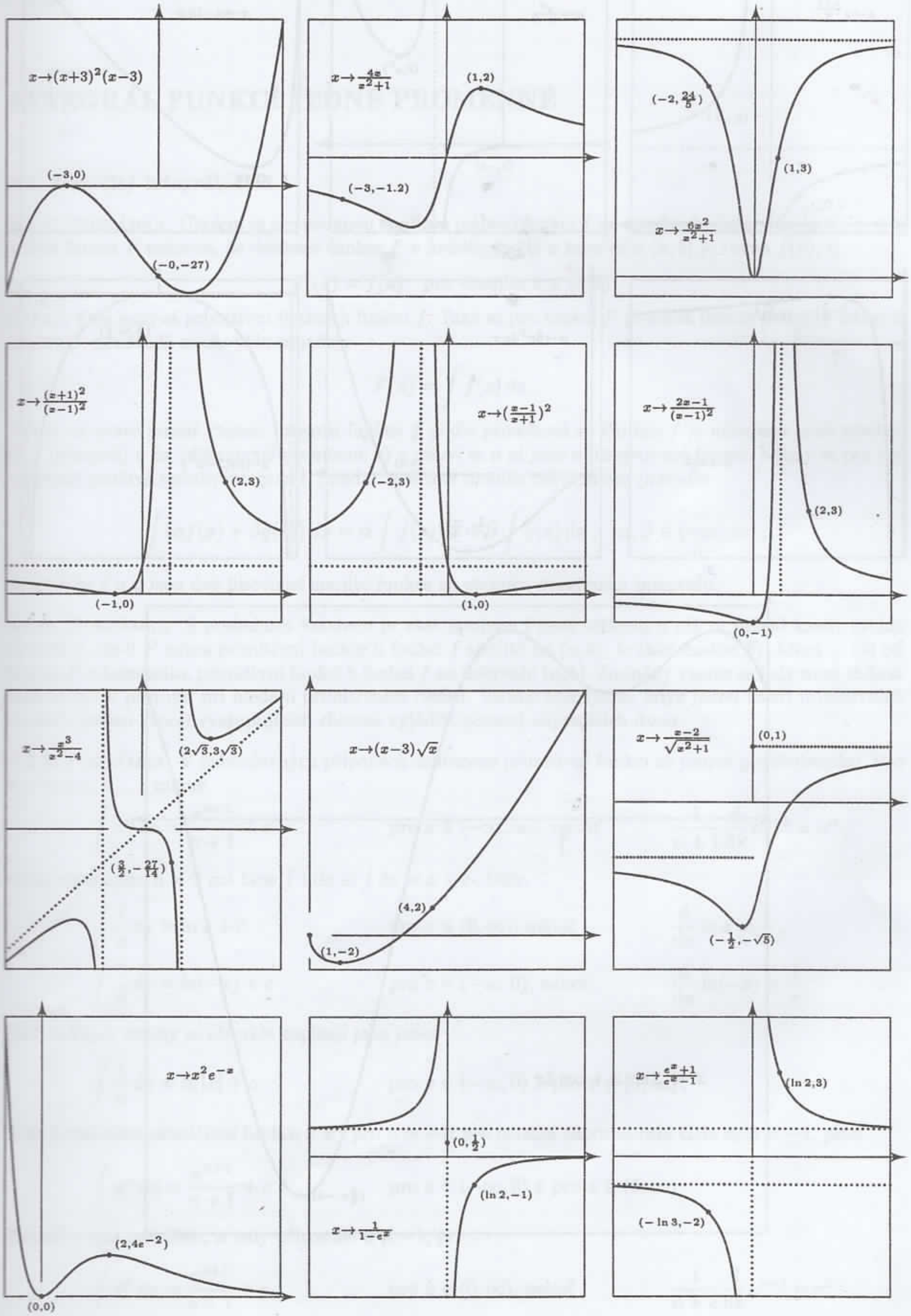
3.3.3. $g'(x) = -f'(-x)$, $g''(x) = f''(-x)$. **3.3.4.** $p'(x) = -2m'(x)$, $p''(x) = -2m''(x)$.

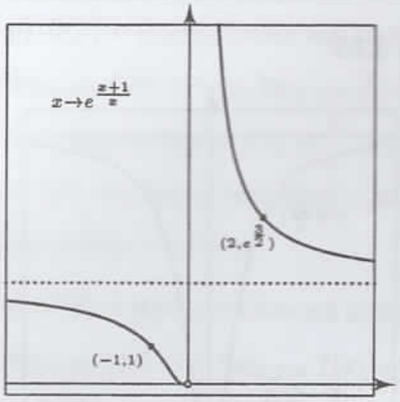
3.3.5. $\dfrac{X_m}{Y_m} = \dfrac{3}{2}$. Zjistíme, že $f'(0) = \frac{2}{3}$. Proto nakreslíme do obrázku tečnu v bodě $(0,1)$ a na tečně odměříme přírůstek Δy, který odpovídá přírůstku Δx. Poněvadž musí platit

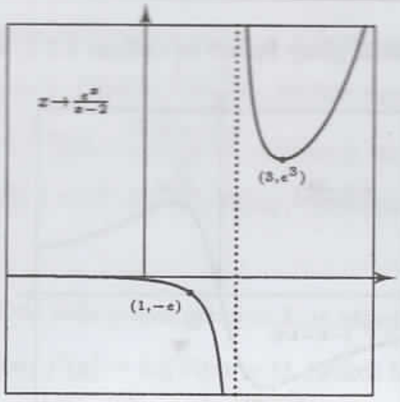
$$\frac{\Delta y}{Y_m} : \frac{\Delta x}{X_m} = \frac{2}{3},$$

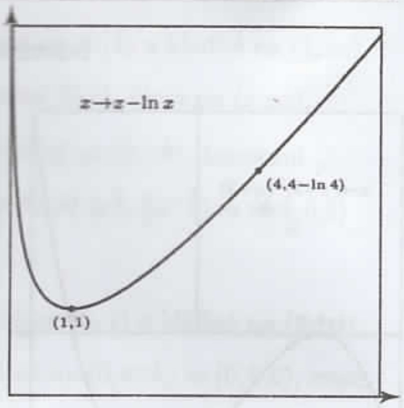
máme vztah pro výpočet X_m/Y_m.

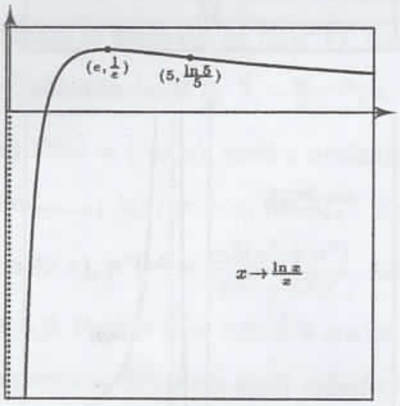
Schematické grafy funkcí ze cvičení 3.3.1. a 3.3.2.

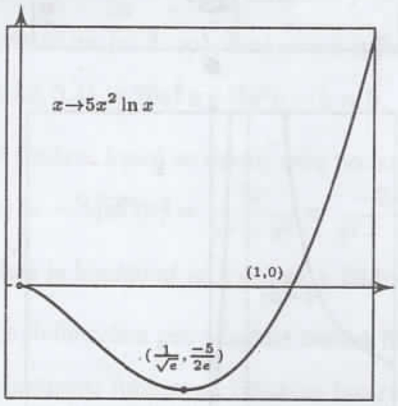


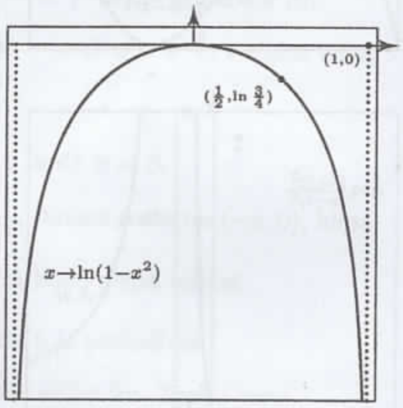

$x \to e^{\frac{x+1}{x}}$
$(2, e^{\frac{3}{2}})$
$(-1,1)$

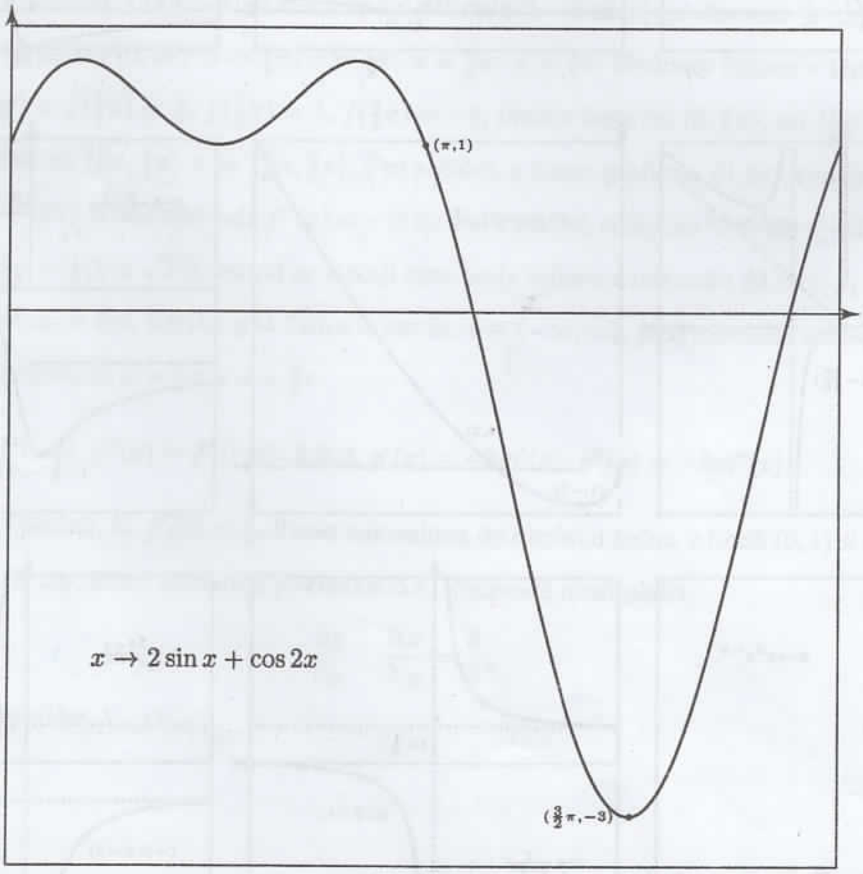

$x \to \frac{e^x}{x-2}$
$(3, e^3)$
$(1, -e)$


$x \to x - \ln x$
$(4, 4-\ln 4)$
$(1,1)$


$(e, \frac{1}{e})$
$(5, \frac{\ln 5}{5})$
$x \to \frac{\ln x}{x}$


$x \to 5x^2 \ln x$
$(1,0)$
$(\frac{1}{\sqrt{e}}, \frac{-5}{2e})$


$(1,0)$
$(\frac{1}{2}, \ln \frac{3}{4})$
$x \to \ln(1-x^2)$


$(\pi,1)$
$x \to 2\sin x + \cos 2x$
$(\frac{3}{2}\pi, -3)$

INTEGRÁL FUNKCÍ JEDNÉ PROMĚNNÉ

4.1. Neurčitý integrál, část I

4.1.1. Poznámka. Úkolem je pro zadanou spojitou reálnou funkci f na otevřeném intervalu (a, b), $a < b$, nalézt funkci F takovou, že derivace funkce F v každém bodě x intervalu (a, b) je rovna $f(x)$, tj.

$$F'(x) = f(x) \quad \text{pro všechna } x \in (a, b)\,.$$

Funkce F se nazývá primitivní funkce k funkci f. Také se pro funkci F používá termín neurčitý integrál funkce f, poněvadž se obvykle označuje

$$F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Výraz na pravé straně čteme: Integrál funkce f podle proměnné x. Funkce f je uzavřena mezi symboly $\int$ (integrál) a $\mathrm{d}x$ (diferenciál proměnné x) a mluví se o ní jako o integrované funkci. Někdy se pro její označení používá termín integrand. Snadno uvěříme tomuto základnímu pravidlu

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))\,\mathrm{d}x = \alpha \int f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int g(x)\,\mathrm{d}x\,, \quad \alpha, \beta \in (-\infty, \infty)\,,$$

ve kterém f a g jsou dvě libovolné spojité funkce na stejném otevřeném intervalu.

4.1.2. Poznámka. S posledním vztahem je však spojena i jistá těžkost, s níž se ovšem každý rychle vypořádá. Je-li F jedna primitivní funkce k funkci f spojité na (a, b), je také funkce F_1, která se liší od funkce F o konstantu, primitivní funkcí k funkci f na intervalu (a, b). Zmíněný vzorec se tedy musí chápat jako návod k postupu při hledání primitivních funkcí. Vzorec použijeme, když jednu ze tří primitivních funkcí v tomto vzorci vystupujících chceme vyjádřit pomocí zbývajících dvou.

4.1.3. Poznámka. V jednoduchých případech dostanene primitivní funkci ze vzorce pro derivování. Pro $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$, máme

$$\int x^n\,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \qquad \text{pro } x \in (-\infty, \infty), \text{ neboť} \qquad \frac{1}{n+1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^{n+1} = x^n\,,$$

tento vzorec pro $n = 0$ má tvar $\int 1\,\mathrm{d}x \equiv \int \mathrm{d}x = x + c$. Dále,

$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln x + c \qquad \text{pro } x \in (0, \infty), \text{ neboť} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln x = \frac{1}{x}\,,$$

$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln(-x) + c \qquad \text{pro } x \in (-\infty, 0), \text{ neboť} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln(-x) = \frac{1}{x}\,;$$

poslední dva vztahy se obvykle zapisují jako jeden

$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + c \qquad \text{pro } x \in (-\infty, 0) \text{ a pro } x \in (0, \infty)\,.$$

Tím je nalezena primitivní funkce k x^n pro $n = -1$; pro ostatní záporná celá čísla n, $n < -1$, platí

$$\int x^n\,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \qquad \text{pro } x \in (-\infty, 0) \text{ a pro } x \in (0, \infty)\,.$$

Pokud a není celé číslo, a tedy přirozeně $a \neq -1$, je

$$\int x^a\,\mathrm{d}x = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c \qquad \text{pro } x \in (0, \infty), \text{ neboť} \qquad \frac{1}{a+1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^{a+1} = x^a\,.$$

Dále

$$\int e^x\,dx = e^x + c \qquad \text{pro } x \in (-\infty,\infty), \text{ neboť} \qquad \frac{d}{dx}e^x = e^x\,,$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + c \qquad \text{pro } x \in (-\infty,\infty), \text{ neboť} \qquad \frac{d}{dx}\sin x = \cos x\,,$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + c \qquad \text{pro } x \in (-\infty,\infty), \text{ neboť} \qquad \frac{d}{dx}\cos x = -\sin x\,,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + c \qquad \text{pro } x \in (-1,1), \text{ neboť} \qquad \frac{d}{dx}\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,,$$

ale je možné také psát

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\arccos x + c \qquad \text{pro } x \in (-1,1), \text{ neboť} \qquad \frac{d}{dx}\arccos x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\,.$$

I zde jsou dvě možnosti:

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg} x + c \qquad \text{pro } x \in (-\infty,\infty), \text{ neboť} \qquad \frac{d}{dx}\operatorname{arctg} x = \frac{1}{1+x^2}\,,$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arccotg} x + c \qquad \text{pro } x \in (-\infty,\infty), \text{ neboť} \qquad \frac{d}{dx}\operatorname{arccotg} x = \frac{-1}{1+x^2}\,.$$

4.1.4. PŘÍKLAD. Ověřte, že

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\operatorname{cotg} x + c$$

na každém otevřeném intervalu, který neobsahuje bod x takový, že $x = k\pi$ pro nějaké $k \in Z$. Dále ukažte, že

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x + c$$

na každém otevřeném intervalu, který neobsahuje bod x takový, že $x = \frac{1}{2}(2k+1)\pi$ pro nějaké $k \in Z$.

4.1.5. Spočítejte

a) $\displaystyle\int \left(x^4 - \frac{3}{x^3} - \frac{4-x^4}{x^2}\right) dx\,,$ b) $\displaystyle\int \frac{x^{\frac{1}{4}} + 2x^2 - e^{\frac{1}{3}\ln x}}{\sqrt{x}}\,dx\,,$ c) $\displaystyle\int (1+u+\sqrt{u})^2\,du\,.$

4.1.6. PŘÍKLAD. Někdy je třeba nejprve upravit výraz, který se má integrovat. Například

$$\int \operatorname{tg}^2 w\,dw = \int \frac{1-\cos^2 w}{\cos^2 w}\,dw = \int \frac{1}{\cos^2 w}\,dw - \int dw = \operatorname{tg} w - w + c,$$

na intervalech, na kterých je definovaná funkce tg.

4.1.7. POZNÁMKA. Konstantu c, kterou na každém intervalu můžeme k vybrané primitivní funkci přičíst, nebudeme zpravidla dále uvádět. Ukažte, že každé dvě primitivní funkce na intervalu se liší o konstantu.

4.1.8. Spočítejte

a) $\displaystyle\int \frac{e^{-x}-2}{e^{-x}}\,dx\,,$ b) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x}\,dx\,,$ c) $\displaystyle\int \frac{2 - x^2e^x - x}{x^2}\,dx\,.$

4.1.9. POZNÁMKA. V mnoha jednodušších případech primitivní funkci prostě uhodneme (a později uvidíme, že k výsledku se dá dopracovat i formálním postupem – substitucí) a derivováním se přesvědčíme, že odhad je správný. Například,

a) $\displaystyle\int \cos 2x\,dx = \frac{1}{2}\sin 2x + c$ na $(-\infty,\infty)$, b) $\displaystyle\int e^{-3x}\,dx = -\frac{1}{3}e^{-3x} + c$ na $(-\infty,\infty)$,

c) $\displaystyle\int \sin(3x-2)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}\cos(3x-2)$ na intervalu $(-\infty,\infty)$,

d) $\displaystyle\int \frac{1}{x+3}\,\mathrm{d}x = \ln|x+3|$ na intervalu $(-\infty,-3)$ a na intervalu $(-3,\infty)$.

4.1.10. POZNÁMKA. Primitivní funkci dokážeme uhodnout i ve složitějších případech, kdy integrand je roven – snad až na numerický faktor – výrazu, v němž lze rozeznat součin funkcí tvaru $f(g(x))\,g'(x)$. Jestliže najdeme funkci $F(x)$, která splňuje $F'(x) = f(x)$, vidíme, že

$$\int f(g(x))\,g'(x)\,\mathrm{d}x = F(g(x)) + c\,, \qquad (*)$$

neboť vzorec pro derivaci složené funkce dává $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(g(x)) = F'(g(x))\,g'(x) = f(g(x))\,g'(x)$. Přirozeně, aby složené funkce vůbec byly definovány, je třeba si při obecné formulaci představit, že existuje otevřený interval I takový, že

$$H(g) \subset I \subset D(F) \equiv D(f)\,.$$

4.1.11. PŘÍKLAD. Na intervalu $(-1,\infty)$ lze psát

$$\int x^2\,\sqrt{x^3+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int (x^3+1)^{\frac12}\,3x^2\,\mathrm{d}x = \frac{2}{9}(x^3+1)^{\frac32} + c\,,$$

poněvadž jsme vzali $f(x) = x^{\frac12}$ a $g(x) = x^3+1$.

4.1.12. Spočítejte

a) $\displaystyle\int xe^{x^2}\,\mathrm{d}x\,,$ b) $\displaystyle\int e^x\cos e^x\,\mathrm{d}x\,,$ c) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x\,.$

Řešení. **4.1.5. a)** $\frac15 x^5 + \frac{3}{2x^2} + \frac4x + \frac13 x^3 + c$ na intervalech $(0,\infty)$ a $(-\infty,0)$, **b)** $\frac43 x^{\frac34} + \frac45 x^{\frac52} - \frac65 x^{\frac56} + c$ na $(0,\infty)$, **c)** $u + \frac32 u^2 + \frac13 u^3 + \frac43 u^{\frac32} + \frac45 u^{\frac52} + c$ na $(0,\infty)$. **4.1.8. a)** $x - 2e^x$ na intervalu $(-\infty,\infty)$, **b)** $\operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x$ na intervalech, které jsou posunutím intervalu $(0,\frac12\pi)$ o $k\pi/2$, $k\in Z$, **c)** $-(\frac2x + e^x + \ln|x|)$ na $(-\infty,0)$ a na $(0,\infty)$. **4.1.12. a)** $\frac12 e^{x^2}$ na $(-\infty,\infty)$, **b)** $\sin e^x$ na $(-\infty,\infty)$, **c)** $\frac12\ln(x^2+1)$ na $(-\infty,\infty)$.

4.1.13. PŘÍKLAD. **Substituce v neurčitém integrálu.** Formální kabát výše uvedeného postupu se nazývá substituce a spočívá v náhradě proměnné integrandu proměnnou jinou, ve které je integrand buď jednodušší, nebo je typu, u kterého existuje jasný návod jak postupovat dále. Obvykle novou proměnnou zavedeme za výraz, v němž vidíme derivaci vnitřní funkce zbývající části výrazu, který máme integrovat. Například si všimneme, že v integrálu

$$\int x^2\sqrt[4]{8-x^3}\,\mathrm{d}x$$

se x^2 až na konstantu shoduje s $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(8-x^3)$. Proto zavedeme novou proměnnou y vztahem $y = 8-x^3$. Spočítáme diferenciály obou stran. Dostaneme vztah $\mathrm{d}y = -3x^2\,\mathrm{d}x$, který při záměně proměnné x za proměnnou y využijeme pro náhradu diferenciálu $\mathrm{d}x$ za diferenciál $\mathrm{d}y$. Postupně potom dostáváme (na intervalu $(-\infty,2)$ pro proměnnou x a na $(0,\infty)$ pro proměnou y)

$$\int x^2\sqrt[4]{8-x^3}\,\mathrm{d}x = -\frac13\int y^{\frac14}\,\mathrm{d}y = -\frac{4}{15}y^{\frac54} + c = -\frac{4}{15}(8-x^3)^{\frac54} + c\,,$$

neboť součástí výpočtu je také návrat k původní proměnné x.

4.1.14. Spočítejte

a) $\displaystyle\int \frac{1}{3x-2}\,\mathrm{d}x\,,$ b) $\displaystyle\int \sin^3 x\cos x\,\mathrm{d}x\,,$ c) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{2x^2+3}}\,\mathrm{d}x\,,$

d) $\displaystyle\int (u+3)^2\,\mathrm{d}u\,,$ e) $\displaystyle\int \big(6(t-4)^5 + 4(3-2t)^3\big)\,\mathrm{d}t\,,$ f) $\displaystyle\int \sin x\cos x\,\mathrm{d}x\,.$

4.1.15. POZNÁMKA. Jestliže funkce f je nenulová na intervalu (a,b) a má v každém bodě tohoto intervalu derivaci, přesvědčíme se snadno derivováním, že na tomto intervalu platí vztah

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|f(x)| + c.$$

Pokud zavedeme novou proměnnou y vztahem $y = f(x)$, tj. pro diferenciály dostaneme $\mathrm{d}y = f'(x)\,\mathrm{d}x$, můžeme snadno výsledek odvodit pomocí substituce – ne pouze ověřit derivováním.

4.1.16. PŘÍKLAD. Proto máme

$$\int \frac{x^3}{x^4+2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int \frac{4x^3}{x^4+2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\ln(x^4+2) + c \quad \text{pro} \quad x \in (-\infty,\infty).$$

4.1.17. Podobně spočítejte

a) $\displaystyle\int \frac{1}{4x+3}\,\mathrm{d}x$, b) $\displaystyle\int \frac{\sin 2x}{2+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$, c) $\displaystyle\int \frac{x}{4x^2+5}\,\mathrm{d}x$,

d) $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2+2x+3}\,\mathrm{d}x$, e) $\displaystyle\int \operatorname{tg} x\,\mathrm{d}x$, f) $\displaystyle\int \frac{x+e^x}{2e^x+x^2}\,\mathrm{d}x$.

4.1.18. PŘÍKLAD. Integrál

$$\int \sin^p x \cos^q x\,\mathrm{d}x\,,$$

v němž p a q jsou celá čísla taková, že $p+q$ je liché číslo, zkoušíme jednou ze substitucí

$$u = \sin x\,,\ v = \cos x$$

převést na integrál, který goniometrické funkce neobsahuje.

V následujícím výpočtu se integrand nejprve mírně upraví a potom se použije substituce $v = \cos x$ ($\mathrm{d}v = -\sin x\,\mathrm{d}x$). Postupně dostáváme

$$\int \sin^3 x\,\mathrm{d}x = \int (1-\cos^2 x)\sin x\,\mathrm{d}x = -\int (1-v^2)\,\mathrm{d}v = \tfrac{1}{3}v^3 - v + c = \tfrac{1}{3}\cos^3 x - \cos x + c\,.$$

4.1.19. Podobně si počínejte v těchto úlohách:

a) $\displaystyle\int \cos^3 x\,\mathrm{d}x$, b) $\displaystyle\int \cos^5 x\,\mathrm{d}x$, c) $\displaystyle\int \sin^2 x\cos^3 x\,\mathrm{d}x$.

Řešení. **4.1.14. a)** $\frac{1}{3}\ln|3x-2|$ na $(-\infty,\frac{2}{3})$ a na $(\frac{2}{3},\infty)$, **b)** $\frac{1}{4}\sin^4 x$ na $(-\infty,\infty)$, **c)** $\frac{1}{2}\sqrt{2x^2+3}$ na $(-\infty,\infty)$, **d)** $\frac{1}{3}(u+3)^3$ na $(-\infty,\infty)$, **e)** $(t-4)^6 - \frac{1}{2}(2t-3)^4$ na $(-\infty,\infty)$, **f)** $\frac{1}{2}\sin^2 x$ na $(-\infty,\infty)$. **4.1.17. a)** $\frac{1}{4}\ln|4x+3|$ na $(-\infty,-\frac{3}{4})$ a na $(-\frac{3}{4},\infty)$, **b)** $\ln(2+\sin^2 x)$ na $(-\infty,\infty)$, **c)** $\frac{1}{8}\ln(4x^2+5)$ na $(-\infty,\infty)$, **d)** $\ln\sqrt{x^2+2x+3}$ na $(-\infty,\infty)$, **e)** $-\ln|\cos x|$ na intervalech, na kterých je hodnota $\cos x$ nenulová, **f)** $\frac{1}{2}\ln(2e^x+x^2) \equiv \ln\sqrt{2e^x+x^2}$ na $(-\infty,\infty)$. **4.1.19. a)** $\sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x$ na $(-\infty,\infty)$, **b)** $\sin x - \frac{2}{3}\sin^3 x + \frac{1}{5}\sin^5 x$ na $(-\infty,\infty)$, **c)** $\frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{1}{5}\sin^5 x$ na $(-\infty,\infty)$.

4.1.20. PŘÍKLAD. **Integrace per partes v neurčitém integrálu.** Pro dvě funkce f a g, které na intervalu (a,b) mají derivace, podle pravidla pro derivování součinu funkcí platí $f\,g' = (f\,g)' - f'\,g$. Tento výraz, vyjádřený v termínech primitivních funkcí (či neurčitých integrálů), dává

$$\int f(x)\,g'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)\,g(x) - \int f'(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x\,. \qquad (*)$$

Tohoto vztahu lze použít k postupu (označovaného jako integrace per partes), kterým se integrand zpravidla zjednodušuje.

Zvolíme-li $f(x) = x$, $g'(x) = e^x$, je $f'(x) = 1$, $g(x) = e^x$ (konstanta c ve funkci g je vynechána) a můžeme (ve shodě se vztahem 4.1.20.(*)) postupně psát

$$\int xe^x \, dx = xe^x - \int 1 \cdot e^x \, dx = xe^x - e^x + c = (x-1)e^x + c$$

na intervalu $(-\infty, \infty)$.

4.1.21. Jak se změní výpočet, když v předcházejícím postupu konstantu c u funkce g nevynecháme a vezmeme $g(x) = e^x + c$?

4.1.22. Postup vyjádřený vzorcem 4.1.20.(*) lze uplatnit v případech, kdy integrand je součinem dvou funkcí, z nichž jedna se derivováním zjednodušuje a ke druhé (relativně snadno) najdeme primitivní funkci. Čekáme, že integrál, k němuž dojdeme, bude jednodušší, než integrál, kterým jsme začali. Tento postup uplatněte u těchto úloh:

a) $\displaystyle\int x \sin x \, dx$, b) $\displaystyle\int (x-1)\cos 2x \, dx$, c) $\displaystyle\int (2x-5)e^{-2x} \, dx$.

4.1.23. PŘÍKLAD. Někdy je třeba uplatnit integraci per partes vícekrát. Například

$$\int x^2 \cos x \, dx = x^2 \sin x - 2\int x \sin x \, dx = x^2 \sin x + 2\Big(x\cos x - \int \cos x \, dx\Big)$$
$$= x^2 \sin x + 2x\cos x - 2\sin x + c = (x^2 - 2)\sin x + 2x \cos x + c$$

na intervalu $(-\infty, \infty)$.

4.1.24. Tyto úlohy se dají řešit vícenásobným použitím integrace per partes:

a) $\displaystyle\int x^2 e^x \, dx$, b) $\displaystyle\int (x-1)^2 \sin x \, dx$, c) $\displaystyle\int x^2 \ln^2 x \, dx$.

4.1.25. PŘÍKLAD. Někdy je postup založen na umělém obratu. Zde za jednu z funkcí vezmeme konstatní funkci rovnou jedné; máme

$$\int \ln x \, dx \equiv \int 1 \cdot \ln x \, dx = x \ln x - \int dx = x(\ln x - 1) + c$$

na intervalu $(0, \infty)$.

4.1.26. Podobně postupujete v těchto úlohách:

a) $\displaystyle\int \operatorname{arctg} x \, dx$, b) $\displaystyle\int \arcsin x \, dx$, c) $\displaystyle\int \ln^2 x \, dx$,

d) $\displaystyle\int \ln(1+x^2) \, dx$, e) $\displaystyle\int \arccos x \, dx$, f) $\displaystyle\int \arcsin^2 x \, dx$.

Řešení. **4.1.21.** Postup se komplikuje, konstanta c ale vypadne a výsledek je týž.
4.1.22. **a)** $-x\cos x + \sin x$ na $(-\infty, \infty)$, **b)** $\frac{1}{2}(x-1)\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x$ na $(-\infty, \infty)$, **c)** $(2-x)e^{-2x}$ na $(-\infty, \infty)$. **4.1.24.** **a)** $(x^2 - 2x + 2)e^x$ na $(-\infty, \infty)$,
b) $(1 + 2x - x^2)\cos x + 2(x-1)\sin x$ na $(-\infty, \infty)$, **c)** $\frac{1}{27}x^3(9\ln^2 x - 6\ln x + 2)$ na $(0, \infty)$.
4.1.26. **a)** $x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)$ na $(-\infty, \infty)$, **b)** $\sqrt{1-x^2} + x \arcsin x$ na $(-1, 1)$,
c) $x(\ln^2 x - 2\ln x + 2)$ na $(0, \infty)$, **d)** $x\ln(1+x^2) - 2x + 2\operatorname{arctg} x$ na $(-\infty, \infty)$,
e) $x \arccos x - \sqrt{1-x^2}$ na $(-1, 1)$, **f)** $x \arcsin^2 x + 2\sqrt{1-x^2}\arcsin x - 2x$ na $(-1, 1)$.

4.1.27. PŘÍKLAD. **Ještě jednou substituce v neurčitém integrálu.** Vztah 4.1.10.(∗) je totožný se vztahem

$$\int f(g(x))\,g'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(y)\,\mathrm{d}y\,, \tag{$*$}$$

který chápeme tak, že se vpravo do primitivní funkce $\int f(y)\,\mathrm{d}y$ (která je funkcí proměnné y) dosadí za proměnnou y funkce $g(x)$. Zatím jsme při integrování používali vztah (∗) ve směru zleva doprava. Ukážeme, že pro některé typy integrálů je výhodné použít vztah (∗) ve směru zprava doleva. Přirozeně musíme potom do funkce, která vyjadřuje integrál vlevo a která je funkcí proměnné x, na místo proměnné x dosadit vyjádření proměnné x pomocí proměnné y. Poněvadž $y = g(x)$, je pro prostou funkci g možno psát $x = g^{-1}(y)$. Zkrátka, vypočítáme – pokud to je možné – proměnnou x pomocí proměnné y.

Za proměnnou y v následujícím integrálu dosadíme x^2, tj. $y = x^2$. Pro diferenciály to znamená $\mathrm{d}y = 2x\,\mathrm{d}x$; omezíme-li se na kladná x, postupně dostáváme

$$\begin{aligned}\int e^{\sqrt{y}}\,\mathrm{d}y &= \int e^{\sqrt{x^2}}2x\,\mathrm{d}x = 2\int e^x x\,\mathrm{d}x = 2\Big(xe^x - \int e^x\,\mathrm{d}x\Big) = \\ &= 2(xe^x - e^x) + c = 2(x-1)e^x + c = 2(\sqrt{y}-1)e^{\sqrt{y}} + c\end{aligned}$$

na intervalu $(0,\infty)$. Na integrál, který jsme dostali po substituci, jsme uplatnili integraci per partes.

4.1.28. Podobně řešte:

a) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,\mathrm{d}x\,,$ b) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+9}\,\mathrm{d}x\,,$ c) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{4x-x^2}}\,\mathrm{d}x\,,$

d) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+4x+13}\,\mathrm{d}x\,,$ e) $\displaystyle\int \cos\sqrt{x}\,\mathrm{d}x\,,$ f) $\displaystyle\int \operatorname{arctg}\sqrt{x}\,\mathrm{d}x\,,$

g) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-6x+13}\,\mathrm{d}x\,,$ h) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{7+6x-x^2}}\,\mathrm{d}x\,,$ i) $\displaystyle\int \sin\sqrt{x-1}\,\mathrm{d}x\,.$

4.1.29. Zvolte vhodný postup a vypočítejte:

a) $\displaystyle\int \frac{x+1}{e^x}\,\mathrm{d}x\,,$ b) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{cotg}^4 x}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x\,,$ c) $\displaystyle\int \frac{x+3}{2x^2+1}\,\mathrm{d}x\,,$

d) $\displaystyle\int \operatorname{cotg}^2 x\,\mathrm{d}x\,,$ e) $\displaystyle\int \frac{3x+2}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x\,,$ f) $\displaystyle\int \frac{6+5x}{x^2}\,\mathrm{d}x\,,$

g) $\displaystyle\int \ln(x-3)\,\mathrm{d}x\,,$ h) $\displaystyle\int \frac{x^2}{4x^6+1}\,\mathrm{d}x\,,$ i) $\displaystyle\int (x-5)^7 x\,\mathrm{d}x\,,$

j) $\displaystyle\int \frac{x}{2x+3}\,\mathrm{d}x\,,$ k) $\displaystyle\int \frac{4x^2}{2x^2+5}\,\mathrm{d}x\,,$ l) $\displaystyle\int \frac{x}{(x+2)^3}\,\mathrm{d}x\,.$

Řešení. 4.1.28. a) $\arcsin\frac{1}{2}x$ na $(-2,2)$, **b)** $\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{1}{3}x$ na $(-\infty,\infty)$, **c)** $\arcsin\frac{x-2}{2}$ na $(0,4)$, **d)** $\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{3}$ na $(-\infty,\infty)$, **e)** $2(\sqrt{x}\sin\sqrt{x}+\cos\sqrt{x})$ na $(0,\infty)$, **f)** $(1+x)\operatorname{arctg}\sqrt{x}-\sqrt{x}$ na $(0,\infty)$, **g)** $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x-3}{2}$ na $(-\infty,\infty)$, **h)** $\arcsin\frac{x-3}{4}$ na $(-1,7)$, **i)** $2(\sin\sqrt{x-1}-\sqrt{x-1}\cos\sqrt{x-1})$ na $(1,\infty)$.

4.1.29. a) $-\dfrac{(x+2)}{e^x} \equiv -(x+2)e^{-x}$ na $(-\infty,\infty)$, **b)** $-\frac{1}{5}\operatorname{cotg}^5 x$ na $(0,\pi)$ a na intervalech, které se dostanou posunutím o $k\pi$, $k\in Z$, **c)** $\frac{1}{4}\ln(2x^2+1)+\frac{3}{2}\sqrt{2}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}x)$ na $(-\infty,\infty)$, **d)** $-(x+\operatorname{cotg}x)$ na $(0,\pi)$ a na intervalech, které se dostanou posunutím o $k\pi$, $k\in Z$, **e)** $2(x+2)\sqrt{x}$ na $(0,\infty)$, **f)** $5\ln|x|-\frac{6}{x}$ na $(-\infty,0)$ a na $(0,\infty)$, **g)** $(x-3)\ln(x-3)-x$ na $(3,\infty)$, **h)** $\frac{1}{6}\operatorname{arctg}(2x^3)$ na $(-\infty,\infty)$, **i)** $\frac{1}{72}(x-5)^8(8x+5)$ na $(-\infty,\infty)$, **j)** $\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}\ln|2x+3|$ na $(-\infty,-\frac{3}{2})$ a na $(-\frac{3}{2},\infty)$, **k)** $2x-\sqrt{10}\operatorname{arctg}(\sqrt{\frac{2}{5}}x)$ na $(-\infty,\infty)$, **l)** $\dfrac{-(x+1)}{(x+2)^2}$ na $(-\infty,-2)$ a na $(-2,\infty)$.

4.2. Neurčitý integrál, část II

4.2.1. PŘÍKLAD. Často se podaří převést integraci na integrování funkce, která je podílem dvou polynomů. Pokud stupeň polynomu v čitateli není menší než stupeň polynomu ve jmenovateli, musí se začít dělením polynomů. To se někdy dá obejít obratným přestavěním vhodných výrazů v čitateli, například

$$\int \frac{x^2}{x^2+1}\,dx = \int \frac{(x^2+1)-1}{x^2+1} = \int \left(1-\frac{1}{x^2+1}\right)dx = x - \operatorname{arctg} x + c$$

na intervalu $(-\infty,\infty)$.

4.2.2. PŘÍKLAD. Poněvadž dělením polynomů se rychle zjistí, že

$$3x^3-14x-7=(3x^2-6x-2)(x+2)-3\,,$$

můžeme na na intervalech $(-\infty,-2)$ a $(-2,\infty)$ postupovat takto:

$$\int \frac{3x^3-14x-7}{x+2}\,dx = \int \left(3x^2-6x-2-\frac{3}{x+2}\right)dx = x^3-3x^2-2x-3\ln|x+2|+c\,.$$

4.2.3. POZNÁMKA. Z mnoha případů, které potom mohou nastat, když máme nalézt primitivní funkci k podílu dvou polynomů, u nichž je stupeň polynomu v čitateli menší než stupeň polynomu ve jmenovateli, vybereme pouze nejjednodušší – všechny kořeny polynomu ve jmenovateli jsou reálné a navzájem různé. V tomto případě se dá dokázat, že pro vhodně zvolená čísla $A_1,\dots,A_n$ platí

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\sum_{j=1}^{n}\frac{A_j}{x-\alpha_j}$$

pro všechna čísla x různá od kořenů jmenovatele. Přitom n je stupeň polynomu Q ve jmenovateli (stupeň polynomu P je tedy menší než n) a čísla α_j jsou kořeny jmenovatele.

Jako příklad toho, jak je možné čísla A_j nalézt, vezmeme relaci

$$\frac{12x-6}{x(x-1)(x+2)}=\frac{A_1}{x+2}+\frac{A_2}{x}+\frac{A_3}{x-1}\,.$$

Vynásobíme ji polynomem $x(x-1)(x+2)$ a dostaneme vztah mezi polynomy

$$12x-6=A_1x(x-1)+A_2(x-1)(x+2)+A_3x(x+2)\,. \qquad (*)$$

Ukážeme dvě cesty k získání hodnot koeficientů A_1, A_2, A_3:

a) Roznásobíme výrazy na pravé straně a porovnáme koeficienty u mocnin x^2, $x^1\equiv x$ a $x^0\equiv 1$. Dostaneme tyto tři vztahy pro A_1, A_2 a A_3:

$$\begin{aligned} x^2 &: & A_1+A_2+A_3 &= 0,\\ x^1 &: & -A_1+A_2+2A_3 &= 12,\\ x^0 &: & -2A_2 &= -6. \end{aligned}$$

Řešení této soustavy lineárních rovnic je $A_1=-5$, $A_2=3$, $A_3=2$. Proto

$$\int \frac{12x-6}{x(x-1)(x+2)}\,dx = \int\left(\frac{-5}{x+2}+\frac{3}{x}+\frac{2}{x-1}\right)dx = -5\ln|x+2|+3\ln|x|+2\ln|x-1|+c$$

na každém z intervalů $(-\infty,-2)$, $(-2,0)$, $(0,1)$ a $(1,\infty)$.

b) Jednodušší je patrně tento postup. Do vztahu $(*)$ postupně dosadíme kořeny polynomu Q. Dosadíme-li kořen α_j, dostaneme vztah, v němž se objevuje pouze jedno z hledaných čísel, A_j. Ostatní jsou násobena nulou, a proto se v rovnici pro určení A_j neobjeví. Okamžitě dostaneme

$$\begin{aligned} x &= -2: & 6A_1 &= -30, \text{ proto } A_1 = -5,\\ x &= 0: & -2A_2 &= -6, \text{ proto } A_2 = 3,\\ x &= 1: & 3A_3 &= 6, \text{ proto } A_3 = 2; \end{aligned}$$

stejný výsledek jako výše.

4.2.4. Najděte primitivní funkce

a) $\displaystyle\int \frac{x^2+5x+5}{(x+2)(x+3)}\,dx$, b) $\displaystyle\int \frac{x^4+4}{x^2-4}\,dx$, c) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-3x}\,dx$,

d) $\displaystyle\int \frac{t^5}{t-1}\,dt$, e) $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x(x^2-1)}\,dx$, f) $\displaystyle\int \frac{(a+b)u}{(u-a)(u+b)}\,du$, $a,b>0$.

g) $\displaystyle\int \frac{1}{x(1+\sqrt{x})}\,dx$, h) $\displaystyle\int \frac{1}{a+e^x}\,dx, a>0$, i) $\displaystyle\int \frac{e^x+1}{e^x+2}\,dx$,

j) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{6+\cos x\,(1-\cos x)}\,dx$, k) $\displaystyle\int \frac{(1+\sin x)\cos x}{(3+\sin x)(2+\sin x)}\,dx$.

Řešení. **4.2.4. a)** $x+\ln\left|\frac{x+3}{x+2}\right|$ na každém ze tří intervalů $(-\infty,-3)$, $(-3,-2)$, $(-2,\infty)$, **b)** $\frac13 x^3+4x+5\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|$ na $(-\infty,-2)$, $(-2,2)$, $(2,\infty)$, **c)** $\frac13\ln\left|\frac{x-3}{x}\right|$ na $(-\infty,0)$, $(0,3)$, $(3,\infty)$, **d)** $\frac15 t^5+\frac14 t^4+\frac13 t^3+\frac12 t^2+t+\ln|t-1|$ na $(-\infty,1)$, $(1,\infty)$, **e)** $\ln\left|\frac{x^2-1}{x}\right|$ na čtyřech intervalech $(-\infty,-1)$, $(-1,0)$, $(0,1)$, $(1,\infty)$, **f)** $\ln\left(|u-a|^a|u+b|^b\right)$na $(-\infty,-b)$, $(-b,a)$, (a,∞), **g)** $\ln\frac{x}{(1+\sqrt{x})^2}$ na $(0,\infty)$, **h)** $\frac1a\left(x-\ln(a+e^x)\right)$ na $(-\infty,\infty)$, **i)** $\frac12\left(x+\ln(e^x+2)\right)$ na $(-\infty,\infty)$, **j)** $\frac15\ln\frac{3-\cos x}{2+\cos x}$ na $(-\infty,\infty)$, **k)** $\ln\frac{(3+\sin x)^2}{2+\sin x}$ na $(-\infty,\infty)$.

4.2.5. PŘÍKLAD. Spočítáme primitivní funkci k funkci $\varphi\to\frac{1}{\cos\varphi}$. Tato funkce se použije při popisu Mercatorova zobrazení sféry do roviny. Poněvadž proměnná φ odpovídá zeměpisné šířce, stačí se omezit na $\varphi\in(-\frac12\pi,\frac12\pi)$. Postupujeme takto (substituce: $y=\sin\varphi$, $dy=\cos\varphi\,d\varphi$, $y\in(-1,1)$):

$$\int\frac{1}{\cos\varphi}\,d\varphi=\int\frac{\cos\varphi}{\cos^2\varphi}\,d\varphi=\int\frac{\cos\varphi}{1-\sin^2\varphi}\,d\varphi=\int\frac{1}{1-y^2}\,dy\,.$$

Jednou z metod nahoře uvedených zjistíme, že čísla A, B v rozkladu

$$\frac{1}{1-y^2}=\frac{A}{y+1}+\frac{B}{y-1}$$

splňují $A=\frac12$, $B=-\frac12$; proto

$$\int\frac{1}{1-y^2}\,dy=\frac12\int\frac{1}{y+1}\,d\varphi-\frac12\int\frac{1}{y-1}\,d\varphi=\frac12\ln\left|\frac{y+1}{y-1}\right|+c\,.$$

Zaměníme y za původní proměnnou φ a máme

$$\int\frac{1}{\cos\varphi}\,d\varphi=\frac12\ln\frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi}+c\quad\text{pro}\quad\varphi\in\left(-\tfrac12\pi,\tfrac12\pi\right).$$

4.2.6. Využijte vztahů

$$\sin\varphi=-\cos\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right),\ 1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2},\ 1+\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}$$

a ukažte, že platí

$$\int\frac{1}{\cos\varphi}\,d\varphi=\ln\operatorname{tg}\left(\tfrac12\varphi+\tfrac14\pi\right)+c\quad\text{pro}\quad\varphi\in\left(-\tfrac12\pi,\tfrac12\pi\right).\tag{$*$}$$

4.2.7. Ke stejnému výsledku se dá dostat i jinými cestami. Ukážeme dvě z nich a přitom procvičíme další integrační postupy. Zavedeme novou proměnnou $y=\varphi+\frac12\pi$. Potom je $y\in(0,\pi)$ a máme

$$\int\frac{1}{\cos\varphi}\,d\varphi=\int\frac{1}{\cos(y-\frac12\pi)}\,dy=\int\frac{1}{\sin y}\,dy=\frac12\int\frac{1}{\sin\frac{y}{2}\cos\frac{y}{2}}\,dy=\frac12\int\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{y}{2}\cos^2\frac{y}{2}}\,dy\,.$$

Jestliže zavedeme ještě další proměnnou z vztahem $z = \operatorname{tg}\frac{y}{2}$, je $z \in (0,\infty)$, a proto lze psát

$$\frac{1}{2}\int \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{y}{2}\cos^2\frac{y}{2}}\,\mathrm{d}y = \int \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z = \ln z + c\,.$$

Návratem k původní proměnné dostaneme vztah 4.2.6.(∗).

4.2.8. Vyjádření goniometrických funkcí pomocí funkce tg je univerzální způsob – někdy však zbytečně komplikovaný – jak při integraci postupovat. V poslední úloze lze proto postupovat také takto: (substituce $\varphi = 2u$, tedy $u \in (-\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi)$)

$$\int \frac{1}{\cos\varphi}\,\mathrm{d}\varphi = 2\int \frac{1}{\cos 2u}\,\mathrm{d}u = 2\int \frac{1}{\cos^2 u - \sin^2 u}\,\mathrm{d}u = 2\int \frac{1}{(1-\operatorname{tg}^2 u)\cos^2 u}\,\mathrm{d}u\,.$$

Jestliže použijeme ještě další proměnné w dané vztahem $w = \operatorname{tg} u$ (potom je $w \in (-1,1)$), převedeme poslední integrál na

$$2\int \frac{1}{1-w^2}\,\mathrm{d}w = \int\Big(\frac{1}{w+1} - \frac{1}{w-1}\Big)\,\mathrm{d}w = \ln\Big|\frac{w+1}{w-1}\Big| + c = \ln\frac{1+w}{1-w} + c = \ln\frac{1+\operatorname{tg} u}{1-\operatorname{tg} u} + c\,.$$

Poněvadž $1 = \operatorname{tg}\frac{1}{4}\pi$, poslední výraz se upraví na tvar 4.2.6.(∗) užitím vzorce

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}\,.$$

4.2.9. POZNÁMKA. Vztahů $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$, $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$ se doporučuje použít pro úpravu některých výrazů obsahujících druhé mocniny funkcí cos a sin. Použitím prvního vztahu dostaneme

$$\int \cos^2 x\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\int (1+\cos 2x)\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\big(x + \tfrac{1}{2}\sin 2x\big) + c \equiv \tfrac{1}{2}\big(x + \sin x\cos x\big) + c\,.$$

Lze však postupovat i jinak – méně obratně. Per partes dává

$$\int \cos^2 x\,\mathrm{d}x = \int \cos x\cos x\,\mathrm{d}x = \begin{pmatrix} f(x) = \cos x \\ g'(x) = \cos x \end{pmatrix} = \cos x\sin x + \int \sin^2 x\,\mathrm{d}x$$

$$= \cos x\sin x + \int (1-\cos^2 x)\mathrm{d}x = \cos x\sin x + x - \int \cos^2 x\,\mathrm{d}x\,.$$

Odtud pro hledanou primitivní funkci získáme vztah

$$2\int \cos^2 x\,\mathrm{d}x = x + \cos x\sin x\,.$$

Dostaneme stejný výsledek jako výše. Oba vyložené přístupy použijte při odvozování vztahu

$$\int \sin^2 x\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{4}(2x - \sin 2x) + c\,.$$

4.2.10. POZNÁMKA. Užijeme-li integrace per partes, máme

$$\int e^x\cos x\,\mathrm{d}x = \begin{pmatrix} f(x) = e^x \\ g'(x) = \cos x \end{pmatrix} = e^x\sin x - \int e^x\sin x\,\mathrm{d}x\,.$$

Na integrál $\int e^x\sin x\,\mathrm{d}x$ uplatníme opět integraci per partes, dostaneme

$$\int e^x\sin x\,\mathrm{d}x = \begin{pmatrix} f(x) = e^x \\ g'(x) = \sin x \end{pmatrix} = -e^x\cos x + \int e^x\cos x\,\mathrm{d}x\,.$$

Dosadíme tento výsledek do prvního vztahu, tím dostaneme

$$\int e^x \cos x \,dx = e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x \,dx .$$

To je rovnice pro hledanou primitivní funkci; dostaneme z ní tento výsledek:

$$\int e^x \cos x \,dx = \tfrac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x) + c \quad \text{pro} \quad x \in (-\infty, \infty) .$$

Podobně odvoďte, že

$$\int e^x \sin x \,dx = \tfrac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + c \quad \text{na} \quad (-\infty, \infty) .$$

4.2.11. POZNÁMKA. Při hledání primitivní funkce lze získat dva výsledky, o kterých není na první pohled patrné, že se liší o konstantu. Například (substituce $2x = u$)

$$\int \sin 2x \,dx = -\tfrac{1}{2} \cos 2x + c ,$$

ale také (substituce $\sin x = w$)

$$\int \sin 2x \,dx = 2 \int \sin x \cos x \,dx = \sin^2 x + c \quad \text{na} \quad (-\infty, \infty).$$

Poněvadž $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$, lze i přímým výpočtem snadno ukázat, že se dvě uvedené primitivní funkce liší o konstantu:

$$-\tfrac{1}{2} \cos 2x + c = -\tfrac{1}{2}(1 - 2\sin^2 x) + c = \sin^2 x + (c - \tfrac{1}{2}) .$$

Podobně lze pro libovolnou kladnou konstantu a a pro $x \in (0, \infty)$ psát tyto dva výsledky (vezmeme-li substituci $ax = y$ pro výpočet druhé primitivní funkce):

$$\int \frac{1}{x} \,dx = \ln x + c ,$$

$$\int \frac{1}{x} \,dx = \ln(ax) + c . \quad \left(\text{Neboť } \int \frac{1}{x} \,dx = \int \frac{a}{ax} \,dx = \int \frac{1}{y} \,dy = \ln(ax) + c .\right)$$

Vysvětlete, proč se tyto dvě primitivní funkce na intervalu $(0, \infty)$ liší opravdu pouze o konstantu.

4.2.12. POZNÁMKA. Substituce nejsou určeny jednoznačně. Například substituce $1 + e^x = w$ dává

$$\int e^x \sqrt{1 + e^x} \,dx = \int w^{\frac{1}{2}} \,dw = \tfrac{2}{3} w^{\frac{3}{2}} + c = \tfrac{2}{3}(1 + e^x)^{\frac{3}{2}} + c \quad \text{na} \quad (-\infty, \infty) .$$

Užijeme-li však substituce $\sqrt{1 + e^x} = y$ (tj. $y^2 = 1 + e^x$, $2y\,dy = e^x \,dx$), dostaneme totéž, neboť

$$\int e^x \sqrt{1 + e^x} \,dx = 2 \int y^2 \,dy = \tfrac{2}{3} y^3 + c = \tfrac{2}{3}(1 + e^x)^{\frac{3}{2}} + c .$$

Podobně

$$\int \sin^2 x \cos x \,dx = \tfrac{1}{3} \sin^3 x + c .$$

To vidíme hned, když jdeme cestou doporučované substituce $\sin x = w$. Ke stejnému výsledku vede i poněkud nestandardní a nešikovná substituce $\sin^2 x = z$. Máme totiž ($dz = 2 \sin x \cos x \,dx$)

$$\int \sin^2 x \cos x \,dx = \tfrac{1}{2} \int \sqrt{z} \,dz = \tfrac{1}{3} z^{\frac{3}{2}} + c = \tfrac{1}{3} \sin^3 x + c .$$

4.2.13. Následující úlohy nejsou seřazeny podle obtížnosti. Slouží k tomu, abyste si ověřili, že už dokážete vybrat vhodnou metodu z těch, které byly probrány. Jakmile je správná metoda vybrána, nalezení primitivní funkce už žádnou těžkost nepředstavuje. Najděte:

a) $\displaystyle\int \frac{z}{z+1}\,\mathrm{d}z$, b) $\displaystyle\int \frac{1}{e^{2x-3}}\,\mathrm{d}x$, c) $\displaystyle\int t(t+1)^7\,\mathrm{d}t$,

d) $\displaystyle\int \cos^2 x \sin x\,\mathrm{d}x$, e) $\displaystyle\int \sin^5 x \cos x\,\mathrm{d}x$, f) $\displaystyle\int \sqrt{w-3}\,\mathrm{d}w$,

g) $\displaystyle\int \sin^5 x\,\mathrm{d}x$, h) $\displaystyle\int \cos^3 x \sin^2 x\,\mathrm{d}x$, i) $\displaystyle\int \cos^{-2} x \sin x\,\mathrm{d}x$,

j) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$, k) $\displaystyle\int \frac{x+5}{(x+3)(x+2)(x-1)}\,\mathrm{d}x$, l) $\displaystyle\int \frac{1}{1+2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$,

m) $\displaystyle\int \frac{x^3}{x^4+2}\,\mathrm{d}x$, n) $\displaystyle\int \operatorname{cotg} x\,\mathrm{d}x$, o) $\displaystyle\int \operatorname{tg} 2x\,\mathrm{d}x$,

p) $\displaystyle\int \frac{x^3}{x^8+2}\,\mathrm{d}x$, q) $\displaystyle\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$, r) $\displaystyle\int \frac{\sin 2x}{3+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$,

s) $\displaystyle\int \sqrt{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$, t) $\displaystyle\int \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$, u) $\displaystyle\int \frac{x+1}{\sqrt{x-2}}\,\mathrm{d}x$,

v) $\displaystyle\int \frac{1}{x(1+\ln^2 x)}\,\mathrm{d}x$, w) $\displaystyle\int \frac{x^2+4}{x-2}\,\mathrm{d}x$, x) $\displaystyle\int \frac{x-1}{x^2-x-6}\,\mathrm{d}x$.

4.2.14. Také zde najděte vhodný postup, jehož použitím spočítáte

a) $\displaystyle\int x \operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x$, b) $\displaystyle\int (b-ax)\,e^{-x}\,\mathrm{d}x$, c) $\displaystyle\int \operatorname{tg}^2 x \sin x\,\mathrm{d}x$.

d) $\displaystyle\int x \ln x\,\mathrm{d}x$, e) $\displaystyle\int x^2 \ln^3 x\,\mathrm{d}x$, f) $\displaystyle\int \frac{x}{1+e^{-x^2}}\,\mathrm{d}x$,

g) $\displaystyle\int x^2 e^{-x}\,\mathrm{d}x$, h) $\displaystyle\int (x^3-1)\sin x\,\mathrm{d}x$, i) $\displaystyle\int x\sqrt{x+2}\,\mathrm{d}x$,

j) $\displaystyle\int \frac{x}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$, k) $\displaystyle\int \frac{x-1}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$, l) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}}\,\mathrm{d}x$.

Řešení. **4.2.13.** **a)** $z-\ln|z+1|$ na intervalu $(-\infty,-1)$ a na intervalu $(-1,\infty)$, **b)** $-\frac{1}{2}e^{3-2x}$ na $(-\infty,\infty)$, **c)** $\frac{1}{72}(t+1)^8(8t-1)$ na $(-\infty,\infty)$, **d)** $-\frac{1}{3}\cos^3 x$ na $(-\infty,\infty)$, **e)** $\frac{1}{6}\sin^6 x$ na $(-\infty,\infty)$, **f)** $\frac{2}{3}(w-3)^{\frac{3}{2}}$ na $(3,\infty)$, **g)** $-\frac{1}{5}\cos^5 x+\frac{2}{3}\cos^3 x-\cos x$ na $(-\infty,\infty)$, **h)** $\frac{1}{3}\sin^3 x-\frac{1}{5}\sin^5 x$ na $(-\infty,\infty)$, **i)** $\cos^{-1} x$ na $(-\frac{1}{2}\pi,\frac{1}{2}\pi)$ a na intervalech, které se z něho dostanou posunutím o $k\pi$, $k\in Z$, **j)** $\frac{1}{2}\ln^2 x$ na $(0,\infty)$, **k)** $\frac{1}{2}\ln\frac{|(x-1)(x+3)|}{(x+2)^2}$ na $(-\infty,-3)$, $(-3,-2)$, $(-2,1)$ a na $(1,\infty)$, **l)** $\sqrt{x}-\frac{1}{2}\ln(1+2\sqrt{x})$ na $(0,\infty)$, **m)** $\frac{1}{4}\ln(x^4+2)$ na $(-\infty,\infty)$, **n)** $\ln|\sin x|$ na $(0,\pi)$ a na každém intervalu, který se z něho dostane posunutím o $k\pi$, $k\in Z$, **o)** $-\frac{1}{2}\ln|\cos 2x|$ na $(-\frac{1}{4}\pi,\frac{1}{4}\pi)$ a na každém intervalu, který se z něho dostane posunutím o $\frac{1}{2}k\pi$, $k\in Z$, **p)** $\frac{\sqrt{2}}{8}\operatorname{arctg}(\frac{1}{\sqrt{2}}x^4)$ na $(-\infty,\infty)$, **q)** $2x-\operatorname{tg} x$ na $(-\frac{1}{2}\pi,\frac{1}{2}\pi)$ a na každém intervalu, který se z něho dostane posunutím o $k\pi$, $k\in Z$, **r)** $-\ln(3+\cos^2 x)$ na $(-\infty,\infty)$, **s)** $\frac{4}{15}(1+\sqrt{x})^{\frac{3}{2}}(3\sqrt{x}-2)$ na $(0,\infty)$, **t)** $-x+4\sqrt{x}-4\ln(1+\sqrt{x})$ na $(0,\infty)$, **u)** $\frac{2}{3}(x+7)\sqrt{x-2}$ na $(2,\infty)$, **v)** $\operatorname{arctg}\ln x$ na $(0,\infty)$, **w)** $\frac{1}{2}x^2+2x+8\ln|x-2|$ na $(-\infty,2)$ a na $(2,\infty)$, **x)** $\frac{1}{5}\ln(|x-3|^2|x+2|^3)$ na $(-\infty,-2),(-2,3)$ a na $(3,\infty)$.

4.2.14. **a)** $\frac{1}{2}((x^2+1)\operatorname{arctg} x-x)$ na $(-\infty,\infty)$, **b)** $\frac{1}{2}(a(x+1)-b)\,e^{-x}$ na $(-\infty,\infty)$, **c)** $\cos x+1/\cos x$ na $(-\frac{1}{2}\pi,\frac{1}{2}\pi)$ a na intervalech, které z tohoto intervalu dostaneme posunutím o $k\pi$, $k\in Z$, **d)** $\frac{1}{4}x^2(2\ln x-1)$ na $(0,\infty)$, **e)** $\frac{1}{27}x^3(9\ln^3 x-9\ln^2 x+6\ln x-2)$ na $(0,\infty)$, **f)** $\frac{1}{2}\ln(1+e^{x^2})$ na $(-\infty,\infty)$, **g)** $-(x^2+2x+2)e^{-x}$ na $(-\infty,\infty)$, **h)** $(-x^3+6x+1)\cos x+3(x^2-2)\sin x$ na $(-\infty,\infty)$, **i)** $\frac{2}{15}(3x-4)(x+2)^{\frac{3}{2}}$ na $(-2,\infty)$, **j)** $x\operatorname{tg} x+\ln|\cos x|$ na intervalu $(-\frac{1}{2}\pi,\frac{1}{2}\pi)$ a na intervalech, které se z něho dostanou posunutím o $k\pi$, $k\in Z$, **k)** $(1-x)\operatorname{cotg} x+\ln|\sin x|$ na intervalu $(0,\pi)$ a na intervalech, které se z něho dostanou posunutím o $k\pi$, $k\in Z$, **l)** $\arcsin\frac{x-1}{2}$ na $(-1,3)$.

4.2.15. Píšeme-li místo jedničky $\cos^2 x + \sin^2 x$, snadno odvodíme, že

$$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x\,, \quad \frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x} \equiv 1 + \operatorname{cotg}^2 x$$

na intervalech, jejichž rozsah si snadno uvědomíme. Využijte uvedené vztahy při určení těchto primitivních funkcí:

a) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^4 x}\,\mathrm{d}x\,,$ b) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^4 x}\,\mathrm{d}x\,,$ c) $\displaystyle\int \operatorname{tg}^3 x\,\mathrm{d}x\,.$

4.2.16. POZNÁMKA. Někdy je třeba ještě získaný výsledek upravit. Jestliže a je pevná kladná konstanta, můžeme na intervalu $x \in (-\frac{b}{a}, \infty)$ psát (substituce $ax + b = y$, $y \in (0, \infty)$, $a\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}y$):

$$\int \frac{x}{\sqrt{ax+b}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a^2}\int \frac{y-b}{\sqrt{y}}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{a^2}\int \left(y^{\frac{1}{2}} - by^{-\frac{1}{2}}\right)\mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{a^2}\left(\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} - 2by^{\frac{1}{2}}\right) + c$$

(v tomto místě se lze vrátit k proměnné x a výpočet ukončit; je však lépe vytknout odmocninu a primitivní funkci upravit)

$$= \frac{2}{3a^2}(y - 3b)\,y^{\frac{1}{2}} + c$$

$$= \frac{2}{3a^2}(ax - 2b)\sqrt{ax+b} + c\,.$$

4.2.17. Výsledek se upraví vytknutím faktoru s vhodným racionálním exponentem. Najděte:

a) $\displaystyle\int x\sqrt{1-2x}\,\mathrm{d}x\,,$ b) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{2x+1}}\,\mathrm{d}x\,,$ c) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{3-2x}}\,\mathrm{d}x\,.$

4.2.18. A závěrem ještě několik úloh, u nichž je třeba volit vhodnou metodu:

a) $\displaystyle\int 5^x\,\mathrm{d}x\,,$ b) $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x^2-1}\,\mathrm{d}x\,,$ c) $\displaystyle\int \frac{x^2-1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x\,,$

d) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt[3]{3x^2+4}}\,\mathrm{d}x\,,$ e) $\displaystyle\int \frac{x^3}{x-1}\,\mathrm{d}x\,,$ f) $\displaystyle\int x\sin 2x\,\mathrm{d}x\,,$

g) $\displaystyle\int \frac{1}{4\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}\,\mathrm{d}x\,,$ h) $\displaystyle\int \frac{2(1-x)}{(x+2)^4}\,\mathrm{d}x\,,$ i) $\displaystyle\int \frac{1}{4\cos^2 x + \sin^2 x}\,\mathrm{d}x\,.$

4.2.19. POZNÁMKA. V poslední úloze jsme nalezli primitivní funkci pouze na intervalech, ve kterých neleží žádný bod $x = \frac{1}{2}k\pi$, $k \in Z$, přestože integrand je funkce spojitá na $(-\infty, \infty)$, kde proto také musí existovat primitivní funkce. To ukazuje, že věci mohou být složitější, než se na první pohled jeví. Na to, abychom ukázali jak postupovat, však bohužel místo nemáme.

Řešení. **4.2.15. a)** $\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg} x$ na intervalech, v nichž je funkce tg definována, **b)** $-\frac{1}{3}(\operatorname{cotg}^3 x + \operatorname{cotg} x)$ na intervalech, v nichž je funkce cotg definována, **c)** (substituce $y = \operatorname{tg} x$) $\frac{1}{2}(\operatorname{tg}^2 x - \ln(1 + \operatorname{tg}^2 x)) \equiv \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x + \ln|\cos x|$ na intervalech, kde je $\cos x \neq 0$.
4.2.17. a) $-\frac{1}{15}(3x+1)(1-2x)^{\frac{3}{2}}$ na $(-\infty, \frac{1}{2})$, **b)** $\frac{1}{3}(x-1)(2x+1)^{\frac{1}{2}}$ na $(-\frac{1}{2}, \infty)$, **c)** $-\frac{1}{3}(x+3)\sqrt{3-2x}$ na $(-\infty, \frac{3}{2})$. **4.2.18. a)** $\frac{1}{\ln 5}5^x$ na $(-\infty, \infty)$, **b)** $x + \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$ na $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$, **c)** $x - 2\operatorname{arctg} x$ na $(-\infty, \infty)$, **d)** $\frac{1}{4}(3x^2+4)^{\frac{2}{3}}$ na $(-\infty, \infty)$, **e)** $\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + \ln|x-1|$ na $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$, **f)** $-\frac{1}{2}x\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x$ na $(-\infty, \infty)$, **g)** $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(2\mathrm{e}^x)$ na $(-\infty, \infty)$, **h)** $\frac{x}{(x+2)^3}$ na $(-\infty, -2) \cup (-2, \infty)$, **i)** $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(\frac{1}{2}\operatorname{tg} x)$ na intervalu $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ a na intervalech, které se z něho dostanou posunutím o $k\pi$, $k \in Z$.

4.3. Určitý integrál

4.3.1. POZNÁMKA. Je dána spojitá funkce f na intervalu $\langle a,b\rangle$, $-\infty < a < b < \infty$. Označíme $\mathcal{P}$ libovolnou skupinu složenou z lichého počtu bodů, které se dělí do dvou podskupin tak, že první skupina obsahuje $m+1$ bodů $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_m$ a druhá obsahuje m bodů $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$; přitom požadujeme, aby platilo

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{m-1} < x_m = b\,,$$

$$x_{k-1} \le \xi_k \le x_k\,, k = 1, \ldots, m\,.$$

Základní dělení intervalu $\langle a,b\rangle$ nemusí být pravidelné, délky $x_k - x_{k-1}$ intervalů $\langle x_{k-1}, x_k\rangle$ se nemusí pro různá k shodovat. Největší z čísel $x_k - x_{k-1}$, $k = 1, \ldots, m$, charakterizuje jemnost rozdělení intervalu $\langle a,b\rangle$ na podintervaly, označíme ho $d(\mathcal{P})$. Ke každé popsané skupině bodů $\mathcal{P}$ přiřadíme číslo $s(f,\mathcal{P})$, které je definováno takto:

$$s(f,\mathcal{P}) = \sum_{k=1}^{m} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\,.$$

Určitým integrálem (spojité) funkce f na intervalu $\langle a,b\rangle$ nazveme číslo s, pro které platí

$$\forall\epsilon > 0\ \exists\delta > 0\ :\ d(\mathcal{P}) < \delta \implies |s(f,\mathcal{P}) - s| < \epsilon\,.$$

Takové číslo existuje; nazýváme ho (určitým) integrálem funkce f od a do b a značíme je

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Shrnuto: pro každou posloupnost výše popsaných skupin bodů $\mathcal{P}_n$ platí:

$$\text{jestliže } \lim_{n\to\infty} d(f,\mathcal{P}_n) \to 0\,, \quad \text{potom } s(f,\mathcal{P}_n) \to \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

4.3.2. Dokažte, že pro konstantní funkci f, která je pro všechna $x \in \langle a,b\rangle$ rovna konstantě c, platí

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = c(b-a)\,.$$

4.3.3. PŘÍKLAD. Uvedeme tři volby skupiny $\mathcal{P}$. Všechny budou mít stejné pravidelné dělení intervalu $\langle a,b\rangle$ body x_k; lišit se budou pouze ve volbě ξ_k. Pro přirozené číslo n označíme $h = (b-a)/n$ a $x_k = a + kh$, $k = 0, 1, \ldots, n$. Pro body ξ_k, $k = 1, \ldots, n$, bereme jednu z možností:

$$\begin{aligned} \alpha)&\quad \xi_k = x_{k-1}\,,\\ \beta)&\quad \xi_k = x_k\,,\\ \gamma)&\quad \xi_k = \tfrac{1}{2}(x_{k-1} + x_k)\,. \end{aligned}$$

Zvolíme možnost β) a užijeme vzorce pro součet aritmetické posloupnosti k tomu, abychom dokázali, že $\int_0^b x\,\mathrm{d}x = b^2/2$. Pro libovolné přirozené číslo n vezmeme $h = \frac{b}{n}$ jako délku kroku, kterým pokročíme od jednoho bodu x_{k-1} k následujícímu bodu x_k. To znamená, že $x_k = hk$, $\xi_k = x_k$. Tento výběr bodů x_k, ξ_k označíme $\mathcal{P}_n$. Dostaneme pro něj

$$s(x,\mathcal{P}_n) = \sum_{k=1}^{n} x_k h = h^2 \sum_{k=1}^{n} k = h^2 \frac{n(n+1)}{2} = \frac{(hn)^2}{2}\frac{n+1}{n} = \frac{b^2}{2}\frac{n+1}{n}\,.$$

Limitním přechodem pro $n \to \infty$ dostáváme výsledek $\int_0^b x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}b^2$. Zopakujte pro případy α) a γ).

4.3.4. Poněvadž $s(f+g,\mathcal{P}) = s(f,\mathcal{P}) + s(g,\mathcal{P})$, dostaneme limitním přechodem tento vztah mezi integrály:

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$$

Z jakého vztahu se limitním přechodem dostane

$$\int_a^b \alpha f(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx$$

pro každé číslo α? Dva výše zmíněné vztahy vedou k tomuto závěru:

zobrazení $f \longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx$ je lineárním zobrazením prostoru $C(\langle a,b\rangle)$ do R,

kde symbolem $C(\langle a,b\rangle)$ je označen vektorový prostor funkcí spojitých na intervalu $\langle a,b\rangle$.

4.3.5. Limitním přechodem také vysvětlíme následující vztah, který platí pro každou funkci spojitou na $\langle a,c\rangle$, $a<c$. Je-li b libovolné číslo ležící mezi a a c, je

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx.$$

4.3.6. Je zatím definován $\int_a^b f(x)\,dx$ pro $a<b$. Pro $b=a$ je samozřejmě $\int_a^b f(x)\,dx = 0$. Zbývá se vypořádat s případem $\int_a^b f(x)\,dx$, v němž je $a>b$. Ten se vyřeší tak, že (zatím neznámému) výrazu na levé straně přiřadíme hodnotu, kterou má výraz stojící na pravé straně vztahu

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx \quad \text{pokud } a>b.$$

Poněvadž v integrálu na pravé straně je horní mez větší než dolní, víme, co výraz na pravé straně znamená. Zjednodušte tyto součty integrálů

a) $\int_0^2 f(x)\,dx + \int_2^4 f(x)\,dx + \int_4^3 f(x)\,dx$, b) $\int_0^4 f(x)\,dx + \int_4^3 f(x)\,dx + \int_3^0 f(x)\,dx$,

c) $\int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^4 f(x)\,dx + \int_2^0 f(x)\,dx$, d) $\int_1^{-1} f(x)\,dx + \int_{-1}^3 f(x)\,dx + \int_0^3 f(x)\,dx$.

4.3.7. Z definice určitého integrálu vyplývá, že

$$\text{jakmile } f(x) \le g(x) \text{ pro } \forall x \in \langle a,b\rangle, \text{ potom } \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx.$$

Speciálně, je-li f spojitá a nezáporná na intervalu $\langle a,b\rangle$, potom $\int_a^b f(x)\,dx \ge 0$. Dokonce, je-li v jednom bodě intervalu $\langle a,b\rangle$ hodnota nezáporné spojité funkce f kladná, je $\int_a^b f(x)\,dx > 0$. Jak uspořádáme podle velikosti integrály

$$\int_0^{\frac12\pi} x\,dx\,, \quad \int_0^{\frac12\pi} \sin x\,dx\,, \quad \int_0^{\frac12\pi} \frac{2x}{\pi}\,dx\ ?$$

4.3.8. Užijte předcházející úlohu a dokažte, že

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Najděte příklady funkcí, pro které neplatí rovnost.

Řešení. **4.3.2.** Poněvadž $\sum_{k=1}^m (x_k - x_{k-1}) = b-a$, je pro každou skupinu bodů $\mathcal{P}$ možné napsat $s(\mathcal{P}) = \sum_{k=1}^m f(\xi_k)(x_k-x_{k-1}) = c\sum_{k=1}^m (x_k-x_{k-1}) = c(b-a)$. **4.3.6. a)** $\int_0^3 f(x)\,dx$, **b)** $\int_0^0 f(x)\,dx = 0$, **c)** $\int_2^4 f(x)\,dx$, **d)** $\int_0^1 f(x)\,dx + 2\int_1^3 f(x)\,dx$. **4.3.7.** Je to klesající posloupnost kladných čísel.

4.3.9. PŘÍKLAD. **Substituce v určitém integrálu.** Při substituci v určitém integrálu můžeme postupovat takto: v závorce někde uprostřed výpočtu si připravíme přechod od proměnné x k nové proměnné u; přitom také odpovídajícím způsobem změníme meze, například

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^2 x \sin x \,\mathrm{d}x = \begin{pmatrix} \cos x = u \\ -\sin x \,\mathrm{d}x = \mathrm{d}u \\ x = 0 \;: u = 1 \\ x = \frac{\pi}{2} \;: u = 0 \end{pmatrix} = -\int_1^0 u^2 \,\mathrm{d}u = \int_0^1 u^2 \,\mathrm{d}u = \tfrac{1}{3}\Big[u^3\Big]_0^1 = \tfrac{1}{3}.$$

4.3.10. Dokažte použitím substituce, že pro každé $k = 1, 2, \ldots$ platí

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^k x \,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^k x \,\mathrm{d}x .$$

4.3.11. PŘÍKLAD. **Per partes v určitém integrálu.** Také při užití metody per partes v určitém integrálu můžeme hned přecházet k číselným hodnotám; například

$$\int_0^1 x\, e^{-x} \mathrm{d}x = -\Big[x\, e^{-x}\Big]_0^1 + \int_0^1 e^{-x} \,\mathrm{d}x = -e^{-1} - \Big[e^{-x}\Big]_0^1 = 1 - \frac{2}{e} = \frac{e-2}{e}.$$

4.3.12. Dokažte, že pro funkci f spojitou na intervalu $\langle -a, 0\rangle$, $a > 0$, je

$$\int_{-a}^0 f(x) \,\mathrm{d}x = \int_0^a f(-x) \,\mathrm{d}x .$$

4.3.13. Dokažte, že pro funkci f spojitou a lichou na intervalu $\langle -a, a\rangle$, $a > 0$, je

$$\int_{-a}^a f(x) \,\mathrm{d}x = 0$$

4.3.14. Dokažte, že pro funkci f spojitou a sudou na intervalu $\langle -a, a\rangle$, $a > 0$, je

$$\int_{-a}^a f(x) \,\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x) \,\mathrm{d}x .$$

4.3.15. Spočítejte

a) $\displaystyle\int_0^1 (x - x^2) \,\mathrm{d}x$, b) $\displaystyle\int_0^\pi \sin x \,\mathrm{d}x$, c) $\displaystyle\int_{-\pi}^\pi \sin x \,\mathrm{d}x$,

d) $\displaystyle\int_0^\pi \sin^2 x \,\mathrm{d}x$, e) $\displaystyle\int_0^1 e^{-x} \,\mathrm{d}x$, f) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{4}\pi} \operatorname{tg} x \,\mathrm{d}x$,

g) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^3 x \cos x \,\mathrm{d}x$, h) $\displaystyle\int_0^\pi \sin^3 x \,\mathrm{d}x$, i) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^3 x \,\mathrm{d}x$,

j) $\displaystyle\int_0^1 x e^x \,\mathrm{d}x$, k) $\displaystyle\int_{-1}^0 x e^x \,\mathrm{d}x$, l) $\displaystyle\int_{-1}^1 x e^x \,\mathrm{d}x$,

m) $\displaystyle\int_0^1 x e^{1-x} \,\mathrm{d}x$, n) $\displaystyle\int_{-1}^1 x(e^x + e^{-x}) \,\mathrm{d}x$, o) $\displaystyle\int_1^2 \ln x \,\mathrm{d}x$.

p) $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{x}{(x+2)^3} \,\mathrm{d}x$, q) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{(x+2)^3} \,\mathrm{d}x$, r) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{(x^3+1)^2} \,\mathrm{d}x$.

Řešení. **4.3.10.** Použijeme substituce $y = \frac{1}{2}\pi - x$. **4.3.15. a)** $\frac{1}{6}$, **b)** 2, **c)** 0, **d)** $\frac{1}{2}\pi$, **e)** $(e-1)/e$, **f)** $\frac{1}{2}\ln 2$, **g)** $\frac{1}{4}$, **h)** $\frac{4}{3}$, **i)** $\frac{2}{3}$, **j)** 1, **k)** $(2-e)/e$, **l)** $2/e$, **m)** $e-2$, **n)** 0, neboť integrujeme lichou funkci přes interval, který je symetricky umístěn vzhledem k bodu 0, **o)** $2\ln 2 - 1$, **p)** $-\frac{1}{4}$, **q)** $\frac{1}{36}$, **r)** $\frac{1}{6}$.

4.3.16. Integrál

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

spočítejte užitím primitivní funkce. Potom předstírejte, že jste primitivní funkci zapomněli, a užijte substituce $x = \operatorname{tg} w$.

4.3.17. Někdy je jednodušší počítat určitý integrál substitucí, při které se meze mění, než nalézt primitivní funkci a integrál vyčíslit jako rozdíl její hodnoty v horní a dolní mezi. Například při výpočtu určitého integrálu, který dává obsah P čtvrtiny kruhu poloměru R, $R > 0$, můžeme postupovat takto:

$$P = \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2}\,dx = \begin{pmatrix} x = R\sin\varphi \\ dx = R\cos\varphi\,d\varphi \\ x = 0\ : \varphi = 0 \\ x = R\ : \varphi = \frac{1}{2}\pi \end{pmatrix} = R^2 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^2\varphi\,d\varphi = \tfrac{1}{2}R^2 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} (1+\cos 2\varphi)\,d\varphi = \tfrac{1}{4}\pi R^2.$$

Odsud vyplývá, že obsah kruhu je $4P = \pi R^2$.

Primitivní funkci dokážeme ovšem také nalézt. Ukážeme to pro případ $R = 1$. Použijeme integraci per partes a postupně dostáváme

$$\begin{aligned}\int \sqrt{1-x^2}\,dx &= x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \\ &= x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{1-(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \\ &= x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx - \int \sqrt{1-x^2}\,dx\,.\end{aligned}$$

První integrál na pravé straně poslední rovnosti známe; máme rovnici, ze které hledanou primitivní funkci vypočítáme. Výsledkem je, pro $x \in (-1, 1)$,

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \tfrac{1}{2}\big(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x\big) + c\,. \qquad (*)$$

a) Použijte tento výsledek a jednoduchou substitucí najděte $\int \sqrt{R^2 - x^2}\,dx$.

b) Použijte substituci $x = \sin\varphi$ k výpočtu integrálu $\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$.

4.3.18. V těchto úlohách můžeme sice umocnit dvojčlen v integrandu a potom integrovat, lepší však je začít substitucí, po které polynom v integrandu obsahuje menší počet členů; spočítejte

a) $\int_0^1 8x(x^2+1)^3\,dx$, b) $\int_1^2 u(u-1)^5\,du$, c) $\int_0^A t(A-t)^3\,dt$.

4.3.19. Spočítejte

a) $\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{25-x^2}}\,dx$, b) $\int_{-3}^3 \frac{x}{\sqrt{25-x^2}}\,dx$, c) $\int_0^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx$,

d) $\int_1^2 x\ln x\,dx$, e) $\int_{-1}^1 xe^{-x}\,dx$, f) $\int_{-3}^3 \sqrt{9-x^2}\,dx$,

g) $\int_1^2 x^2\ln x\,dx$, h) $\int_0^1 x\operatorname{arctg} x\,dx$, i) $\int_0^\pi x^2\sin x\,dx$,

j) $\int_3^4 x\sqrt{25-x^2}\,dx$, k) $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} 2x\cos 2x\,dx$, l) $\int_0^{\frac{1}{4}\pi} \sin^2 x\cos^3 x\,dx$,

m) $\int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{1+2e^x}\,dx$, n) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\cos^2 x}\,dx$, o) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}}\,dx$.

4.3.20. Ukažte, že pro funkci f spojitou na $(-\infty,\infty)$ a pro libovolná čísla a, b, c platí:

a) $\displaystyle\int_{a+c}^{b+c} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x+c)\,\mathrm{d}x$, b) $\displaystyle\int_{3a}^{3b} f(x)\,\mathrm{d}x = 3\int_a^b f(3x)\,\mathrm{d}x$,

c) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = h\int_0^1 f(a+ht)\,\mathrm{d}t$, kde h je dáno vztahem $h = b - a$.

4.3.21. Ukažte, že pro funkci f, která má příslušné derivace spojité na $(-\infty,\infty)$, a pro libovolnou trojici čísel a, b, h, $h \neq 0$, platí:

a) $\displaystyle\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x = f(b) - f(a)$, b) $\displaystyle\int_a^b f''(x)\,\mathrm{d}x = f'(b) - f'(a)$,

c) $\displaystyle\int_0^1 f'(a+ht)\,\mathrm{d}t = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$, d) $\displaystyle\int_a^b f'(3x)\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{3}\big(f(3b) - f(3a)\big)$.

4.3.22. Ověřte bez jakéhokoliv výpočtu, že každý z těchto integrálů je záporný:

a) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \Big(1 - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\Big)\,\mathrm{d}x$, b) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x}{(x+2)^3}\,\mathrm{d}x$,

c) $\displaystyle\int_0^{\pi} x\cos x\,\mathrm{d}x$, d) $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} e^{-x}\sin x\,\mathrm{d}x$.

4.3.23. Dokažte, že pro každé kladné číslo a a každou spojitou a sudou funkci f platí

$$\int_{-a}^{a} \frac{f(x)}{e^x+1}\,\mathrm{d}x = \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Potom spočítejte

$$\int_{-\frac{1}{6}\pi}^{\frac{1}{6}\pi} \frac{\cos x}{e^x+1}\,\mathrm{d}x\,.$$

Řešení. **4.3.16.** $\frac{1}{4}\pi$. **4.3.17. a)** Substitucí $x = Rz$ přejdeme k $R^2\int\sqrt{1-z^2}\,\mathrm{d}z$; uplatníme 4.3.17.(*), vrátíme se k původní proměnné x a upravíme; výsledek je

$$\int\sqrt{R^2-x^2}\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\Big(x\sqrt{R^2-x^2} + R^2\arcsin\frac{x}{R}\Big) + c\,,$$

b) substitucí přejdeme k $\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\sin^2\varphi\cos^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi$; tento integrál je roven $\frac{1}{4}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\sin^2 2\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{16}\pi$.

4.3.18. a) 15, **b)** $\frac{13}{42}$, **c)** $\frac{1}{20}A^5$.

4.3.19. a) 1, **b)** 0, **c)** $2(2-\ln 3)$, **d)** $2\ln 2 - \frac{3}{4}$, **e)** $\frac{-2}{e}$, **f)** $\frac{9}{2}\pi$, **g)** $\frac{1}{9}(24\ln 2 - 7)$, **h)** $\frac{1}{4}(\pi - 2)$, **i)** $\pi^2 - 4$, **j)** $\frac{37}{3}$, **k)** -1, **l)** $\frac{7\sqrt{2}}{120}$, **m)** $\frac{1}{2}\ln\frac{5}{3}$, **n)** $\frac{1}{3}\pi\sqrt{3} - \ln 2$, **o)** $\frac{1}{6}\pi\sqrt{6} + 2\sqrt{2} - 4$. **4.3.23.** $\frac{1}{2}$.

Funkce horní meze určitého integrálu.

4.3.24. Pro funkci f spojitou na otevřeném intervalu I definujeme novou funkci F na intervalu I tímto způsobem: pevně vybereme libovolný bod $a \in I$ a v bodě x intervalu I funkci F přiřadíme hodnotu

$$F(x) = \int_a^x f(\xi)\,\mathrm{d}\xi\,.$$

Je jasné, že $F(a) = 0$. Ukážeme, že funkce F má derivaci v každém bodě intervalu I, tj.

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}(x) = f(x) \quad \text{pro} \quad \forall x \in I\,.$$

To je velmi důležitý výsledek. Bude dokázán, jakmile se podaří ověřit, že

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} - f(x) = 0\,.$$

Pro libovolná čísla $x, x+h$ z intervalu I můžeme výraz, který se limituje, upravit takto:

$$\frac{1}{h}\big(F(x+h)-F(x)\big) - f(x) = \frac{1}{h}\Big(\int_a^{x+h} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi - \int_a^x f(\xi)\,\mathrm{d}\xi\Big) - f(x) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} \big(f(\xi)-f(x)\big)\,\mathrm{d}\xi\,. \quad (*)$$

Nyní naznačíme, proč poslední člen v této řadě výrazů má limitu nula. Omezíme se na $h > 0$. Vzhledem ke spojitosti funkce f lze pro každé $\epsilon > 0$ nalézt $h > 0$ takové, že

$$\forall\, \xi \in \langle x, x+h\rangle \Rightarrow |f(\xi) - f(x)| < \epsilon\,.$$

Proto poslední výraz se dá odhadnout takto

$$\Big|\frac{1}{h}\int_x^{x+h} \big(f(\xi)-f(x)\big)\,\mathrm{d}\xi\Big| \le \frac{1}{h}\int_x^{x+h} |f(\xi)-f(x)|\,\mathrm{d}\xi \le \epsilon\,.$$

To ukazuje, že výraz $(*)$ má limitu nula. Platí tedy pro každou funkci f spojitou na otevřeném intervalu I, že

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(\xi)\,\mathrm{d}\xi = f(x)$$

v každém bodě $x \in I$.

4.3.25. Poznámka. Funkce F definovaná v předcházejícím cvičení je tedy primitivní funkcí k funkci f na intervalu I. Pro každé dva prvky a, b intervalu I platí

$$\int_a^b f(\xi)\,\mathrm{d}\xi = F(b) - F(a)\,.$$

Poněvadž každé dvě primitivní funkce k funkci f na intervalu I se liší o konstantu, poslední vztah vysvětluje, proč hodnota určitého integrálu je rovna přírůstku primitivní funkce na integračním intervalu.

4.3.26. Pro funkci f spojitou na otevřeném intervalu I ukažte, že platí $(a \in I)$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_x^a f(\xi)\,\mathrm{d}\xi = -f(x)$$

v každém bodě $x \in I$.

4.3.27. Pro právě narozeného jedince je pravděpodobnost dožití se věku x popsána funkcí

$$p(x) = e^{-\int_0^x \mu(\xi)\,\mathrm{d}\xi}\,,$$

kde μ je kladná funkce na intervalu $(0,\omega)$; $\omega > 0$ je kladná konstanta, která odpovídá maximálnímu věku. Ukažte, že $p(0) = 1$ a že p je klesající funkce. Dále ověřte, že

$$\frac{p'(x)}{p(x)} = -\mu(x)\,.$$

4.3.28. Dokažte výpočtem, že pro funkci f spojitou a lichou (resp. sudou) na $(-\infty,\infty)$, je funkce

$$F(x) = \int_0^x f(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

sudá (resp. lichá) na $(-\infty,\infty)$. Užijte jednoho z těchto tvrzení a dokažte, že funkce $x \to \ln(x+\sqrt{x^2+1})$ je lichá na $(-\infty,\infty)$.

4.4. Nevlastní integrál

4.4.1. Napište, co znamená, že tyto integrály konvergují ($-\infty < a < b < \infty$):

a) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ pro funkci f spojitou na intervalu $\langle a, b)$,

b) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ pro funkci f spojitou na intervalu $(a, b\rangle$,

c) $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$ pro funkci f spojitou na intervalu $\langle a, \infty)$,

d) $\displaystyle\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$ pro funkci f spojitou na intervalu $(-\infty, b\rangle$,

e) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx$ pro funkci f spojitou na intervalu $(-\infty, \infty)$.

4.4.2. PŘÍKLAD. Při výpočtu nevlastních integrálů počítáme limity. Píšeme třeba

$$\int_0^\infty (x+1)e^{-x}\,dx = \lim_{\xi\to\infty}\left(\left[-(x+1)e^{-x}\right]_0^\xi + \int_0^\xi e^{-x}\,dx\right) = \lim_{\xi\to\infty}\left(\left[-(x+1)e^{-x}\right]_0^\xi - \left[e^{-x}\right]_0^\xi\right) = 2.$$

4.4.3. Zjistěte, zda integrál je konvergentní nebo divergentní. Pokud je konvergentní, najděte jeho hodnotu:

a) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$, b) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx$, c) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$,

d) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^4}\,dx$, e) $\displaystyle\int_a^\infty \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\,dx$ pro $a > 0$, f) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx$,

g) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-\alpha x}\,dx$ pro $\alpha > 0$, h) $\displaystyle\int_\alpha^\infty x e^{-\alpha x}\,dx$ pro $\alpha > 0$, i) $\displaystyle\int_0^\infty x^2 e^{-x}\,dx$.

4.4.4. Zjistěte, zda integrál je konvergentní nebo divergentní. Pokud je konvergentní, najděte jeho hodnotu:

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$, b) $\displaystyle\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$, c) $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{x\sqrt{x}}\,dx$,

d) $\displaystyle\int_0^1 \ln x\,dx$, e) $\displaystyle\int_0^e x\ln x\,dx$, f) $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,dx$,

g) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{2-x}}\,dx$, h) $\displaystyle\int_1^5 \frac{1}{\sqrt{5-x}}\,dx$, i) $\displaystyle\int_1^5 \frac{1}{(5-x)\sqrt{5-x}}\,dx$.

Řešení.

4.4.1. a) $\displaystyle\lim_{\xi\to b-}\int_a^\xi f(x)\,dx$ existuje a je vlastní, b) $\displaystyle\lim_{\xi\to a+}\int_\xi^b f(x)\,dx$ existuje a je vlastní,

c) $\displaystyle\lim_{\xi\to\infty}\int_a^\xi f(x)\,dx$ existuje a je vlastní, d) $\displaystyle\lim_{\xi\to-\infty}\int_\xi^b f(x)\,dx$ existuje a je vlastní,

e) pro libovolné číslo a konvergují tyto dva integrály: $\displaystyle\int_{-\infty}^a f(x)\,dx$, $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$.

4.4.3. a) $\frac{1}{2}$, b) divergentní, c) divergentní, d) $\frac{1}{3}$, e) $\frac{2}{\sqrt{a}}$, f) $\frac{1}{2}\pi$, g) $\frac{1}{\alpha}$, h) $\frac{\alpha^2+1}{\alpha^2}e^{-\alpha^2}$, i) 2.

4.4.4. a) divergentní, b) 4, c) divergentní, d) -1, e) $\frac{1}{4}e^2$, f) $2\sqrt{2}$, g) 2, h) 4, i) divergentní.

4.4.5. Užijte větu o substituci a ukažte, že

$$\int_2^\infty \frac{1}{x^2-x}\,dx = \int_1^\infty \frac{1}{x^2+x}\,dx\,.$$

Potom jeden z integrálů spočítejte.

4.4.6. Použijte substituce $x = \operatorname{tg} u$ a spočítejte

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2+1}\,dx\,.$$

Potom výsledek ověřte přímým výpočtem pomocí primitivní funkce.

4.4.7. Jsou dány dvě funkce f a g spojité na intervalu $\langle a,\infty)$ a číslo $b \geq a$ takové, že

$$0 \leq f(x) \leq g(x) \quad \text{pro všechny body} \quad x \in \langle b,\infty)\,.$$

Potom platí:

jestliže $\int_a^\infty f(x)\,dx$ je divergentní, potom je také $\int_a^\infty g(x)\,dx$ divergentní,

jestliže $\int_a^\infty g(x)\,dx$ je konvergentní, potom je také $\int_a^\infty f(x)\,dx$ konvergentní.

Z těchto dvou tvrzení vyberte jedno a s jeho pomocí rozhodněte, zda integrál je konvergentní nebo divergentní (hodnotu integrálu nepočítejte):

a) $\displaystyle\int_0^\infty \left(5+\frac{\operatorname{arctg} x}{x}\right)dx$, b) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{4+3\sin 2x}{x^2+5}\,dx$, c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x^7+2}\,dx$,

d) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2+1}{x+e^x}\,dx$, e) $\displaystyle\int_0^\infty e^{x+\sqrt{x}}\,dx$, f) $\displaystyle\int_1^\infty \ln x\,dx$.

4.4.8. Je dána funkce f spojitá na intervalu $\langle a,\infty)$ a číslo $b \geq a$ takové, že integrál $\int_b^\infty |f(x)|\,dx$ je konvergentní. Potom konverguje také $\int_a^\infty f(x)\,dx$. Ukažte, že tyto nevlastní integrály konvergují:

a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^2+1}\,dx$, b) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin x}{x\sqrt{x}}\,dx$, c) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}\sin x\,dx$.

4.4.9. Použijte integraci per partes a ukažte, že nevlastní integrál

$$\int_1^\infty \frac{\cos x}{x}\,dx$$

konverguje.

Řešení. **4.4.5.** $\ln 2$. **4.4.6.** $\frac{1}{4}\pi$. **4.4.7. a)** je divergentní; například srovnáním s divergentním integrálem $\int_0^\infty 1\,dx$, **b)** konverguje; srovnáváme s konvergentním integrálem $\int_1^\infty \frac{7}{x^2}\,dx$, **c)** konverguje; srovnáváme s konvergentním integrálem $\int_1^\infty \frac{1}{x^7}\,dx$, **d)** je konvergentní; například srovnáním s konvergentním integrálem $\int_1^\infty 2x^2e^{-x}\,dx$, **e)** diverguje; srovnáváme s divergentním integrálem $\int_0^\infty e^0\,dx \equiv \int_0^\infty 1\,dx$, **f)** diverguje; srovnáváme s divergentním integrálem $\int_e^\infty \ln e\,dx \equiv \int_0^\infty 1\,dx$. **4.4.9.** Integrace per partes ukazuje, že

$$\int_1^\infty \frac{\cos x}{x}\,dx = \left[\frac{\sin x}{x}\right]_1^\infty + \int_1^\infty \frac{\sin x}{x^2}\,dx = -\sin 1 + \int_1^\infty \frac{\sin x}{x^2}\,dx\,.$$

Poslední integrál je konvergentní. Proto i zadaný integrál je konvergentní.

4.5. Užití určitého integrálu

Střední hodnota

4.5.1. Střední hodnotou funkce f na intervalu $\langle a, b\rangle$, $a < b$, je míněna hodnota

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

a) Ukažte, že pro konstantní funkci je střední hodnota rovna hodnotě funkce.

b) Spočítejte střední hodnotu funkce $f(t) = A\sin\omega t$ (A, ω jsou kladné konstanty) na intervalu $\langle 0, T\rangle$, kde T je perioda funkce f.

c) Spočítejte odmocninu ze střední hodnoty kvadrátu funkce $f(t) = A\sin\omega t$ na intervalu $\langle 0, T\rangle$, kde T je perioda funkce f.

4.5.2. Při sledování populace strukturované podle věku x nazveme populační hustotou funkci $P(x)$ takovou, že integrál $\int_{x_1}^{x_2} P(x)\,\mathrm{d}x$ odpovídá počtu jedinců v populaci, jejichž věk x leží v intervalu $\langle x_1, x_2\rangle$, $x_1 < x_2$.

a) Jak vyjádříme velikost celé populace (zahrneme všechny věkové skupiny)?

b) Jak vyjádříme průměrný věk v populaci?

c) Jak vyjádříme průměrný věk skupiny vymezené věkovým intervalem $\langle x_1, x_2\rangle$, $x_1 < x_2$?

d) Jaká je pravděpodobnost, že věk náhodně vybraného jedince padne do intervalu $\langle x_1, x_2\rangle$?

e) Popište distribuční funkci F pravděpodobnosti z předcházející úlohy.

4.5.3. Závislost produkce na čase popíšeme funkcí $p(t)$, kde čas je zachycen proměnnou t. Celková produkce mezi časy t_1 a t_2, $t_1 < t_2$, je dána výrazem

$$\int_{t_1}^{t_2} p(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

a) Vyjádřete průměrnou produkci v období $\langle t_1, t_2\rangle$, $t_1 < t_2$.

b) Produkce p_0 v čase $t = 0$ klesá s časem lineárně tak, že v čase $t = 2$ je poloviční. Napište funkci $p(t)$ a integrací spočítejte průměrnou produkci mezi časy $t = 0$ a $t = 2$?

c) Produkce p_0 v čase $t = 0$ klesá s časem podle vztahu $p(t) = p_0(1 - \frac{1}{8}t^2)$. V čase $t = 2$ máme tedy poloviční produkci v porovnání s produkcí v čase $t = 0$. Jaká je průměrná produkce mezi časy $t = 0$ a $t = 2$?

d) Produkce p_0 v čase $t = 0$ klesá s časem podle vztahu $p(t) = p_0 2^{-\frac{t}{2}}$. V čase $t = 2$ máme tedy poloviční produkci v porovnání s produkcí v čase $t = 0$. Jaká je průměrná produkce mezi časy $t = 0$ a $t = 2$?

e) Vysvětlete, proč je průměrná produkce nejvyšší v úloze c) a nejnižší v úloze d). Odpovídají tomu hodnoty derivace $p'(0)$?

Vztah mezi zrychlením, rychlostí a dráhou

4.5.4. Rychlost vozidla v časovém intervalu $\langle t_1, t_2\rangle$ je popsána funkcí $v(t)$. Jakým výrazem je dána střední hodnota rychlosti vozidla mezi časy t_1 a t_2? Jakým výrazem je popsána dráha $s(t)$ vozidla mezi časy t_1 a t_2? Odpovídá střední hodnota rychlosti tak zvané „průměrné“ rychlosti, kterou jsme zvyklí počítat podle vztahu $(s(t_2) - s(t_1))/(t_2 - t_1)$?

4.5.5. Vyjádřete rychlost $v(t)$ a dráhu $s(t)$ v čase t rovnoměrně zrychleného pohybu se zrychlením a na časovém intervalu $\langle t_1, t_2\rangle$, $t_1 < t_2$. Vyjádřete střední (průměrnou) rychlost na tomto časovém intervalu.

4.5.6. Těleso se začne pohybovat z klidu (v čase $t = 0$) se zrychlením $a(t) = A - \alpha t$, kde A, α jsou kladné konstanty. Jaký je vztah pro rychlost $v(t)$ pohybu v čase t? Jakou dráhu $s(t)$ těleso urazí do okamžiku, v němž je jeho rychlost nulová? Udělejte rozměrovou analýzu výsledku!

4.5.7. Jak vysoko vystoupí těleso vržené na Zemi svisle vzhůru rychlostí v_0 (g je tíhové zrychlení)?

4.5.8. Šikmý vrh na rovině. Jak daleko na rovině doletí těleso vržené pod úhlem α rychlostí v (g je tíhové zrychlení)? Sledujte rychlost ve dvou směrech: v_y ve směru svislém a v_x ve směru vodorovném. Pro jaký úhel α doletí nejdále?

Obsah obrazců v rovině

4.5.9. PŘÍKLAD. Jestliže pro dvě spojité funkce f a g platí

$$g(x) \le f(x) \text{ pro všechna čísla } x \in \langle a, b\rangle\,, \qquad (*)$$

potom obsah rovinného obrazce tvořeného body $(x, y) \in E^2$, které splňují

$$\left\{(x, y)\,:\, x \in \langle a, b\rangle\,,\, g(x) \le y \le f(x)\right\}$$

je roven

$$\int_a^b (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x\,.$$

Poněvadž křivky $y = x^2$ a $y = \sqrt{x}$ mají dva společné body $(0, 0)$ a $(1, 1)$, volíme $g(x) = x^2$ a $f(x) = \sqrt{x}$. Potom funkce f a g splňují $(*)$ na intervalu $\langle 0, 1\rangle$ a obsah obrazce omezeného křivkami $y = x^2$ a $y = \sqrt{x}$ je proto roven

$$\int_0^1 \left(\sqrt{x} - x^2\right) \mathrm{d}x = \tfrac{1}{3}\,.$$

4.5.10. Najděte obsah obrazce omezeného křivkami:

a) $y = 1 - x^2\,,\; y = -2x^2\,,\; x = 0\,,\; x = 2\,,$

b) $y = 2x^2 - x - 2\,,\; y = 4 + 2x - x^2\,,$

c) $y = 2x + 1\,,\; y = 3 + x - x^2\,,$

d) $y = x^2 + x - 3\,,\; 2x - y + 3 = 0\,.$

4.5.11. Najděte obsah obrazce omezeného osou x a křivkami:

a) $y = 2 - \sqrt{x}\,,\; x = 9\,,$

b) $y = \ln x\,,\; x = 2e\,.$

4.5.12. Spočítejte obsah obrazce v E^2 tvořeného body $\{(x, y) \mid 0 \le x \le 2\,,\, 0 \le y \le 1 + |x^4 - 1|\}$.

4.5.13. Napište rovnici tečny funkce $f(x) = 2 + \ln(x + 1)$ v bodě s x-ovou souřadnicí $x = 0$. Spočítejte obsah obrazce omezeného popsanou tečnou a křivkou $y = x^2$.

4.5.14. Najděte obsah obrazce omezeného křivkou $y = 4 - x^2$, tečnou k této křivce v bodě $(1, ?)$ a přímkou $x = 3$.

Délka křivky

4.5.15. Vysvětlete, proč má vzorec pro délku křivky $y = f(x)$, $x \in \langle a, b\rangle$, tvar

$$\int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\,\mathrm{d}x\,.$$

a) Spočítejte délku úsečky, která spojuje body $A = (x_1, y_1)\,,\; B = (x_2, y_2)\,.$ Pro jednoduchost předpokládáme, že $x_1 < x_2\,.$

b) Spočítejte délku křivky $y = \ln x$, $x \in \langle \frac{3}{4}, \sqrt{3}\rangle\,.$

c) Spočítejte délku křivky $y = \frac{1}{2}x^2$ mezi body se souřadnicemi $x = -1$ a $x = 1\,.$ Potřebnou primitivní funkci naleznete v úloze 3.1.5.a.

d) Spočítejte délku čtvrtiny kružnice poloměru R.

Objemy a povrchy těles

4.5.16. Cavalieriho princip. Jestliže hodnota $S(x)$ je rovna obsahu řezu tělesa rovinou kolmou na osu x, potom objem tělesa vyťatého dvěma rovinami kolmými na osu x, které protínají osu x v bodech se souřadnicemi $x = a$, $x = b$, $a < b$, se rovná

$$\int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x.$$

a) Spočítejte objem koule o poloměru R.

b) Spočítejte objem obou částí koule poloměru R, na které je koule rozdělena rovinou, jejíž vzdálenost od středu koule je rovna polovině poloměru R. Správnost výpočtu ověřte sečtením obou výsledků.

4.5.17. Vysvětlete, proč má vzorec pro obsah plochy, která vznikne rotací křivky $y = f(x)$, $x \in \langle a, b\rangle$, kolem osy x tvar

$$2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,\mathrm{d}x.$$

Spočítejte povrch koule o poloměru R.

4.5.18. Z koule poloměru R je rovinou oddělena kulová úseč výšky v. Jaký je její objem V? Jaký je obsah S jejího pláště?

4.5.19. Použijte výsledek předcházejícího cvičení a odvoďte vzorec pro obsah S pláště kulové vrstvy výšky v vyříznuté z koule poloměru R. Je na tomto vzorci něco překvapujícího?

4.5.20. Paraboloid vznikne rotací symetrické části paraboly kolem osy. Spočítejte objem V paraboloidu s výškou v a poloměrem základny r. Spočítejte obsah S pláště takového paraboloidu.

4.5.21. Napište rovnici elipsoidu v E^3 (v proměnných x, y, z), který vznikne rotací elipsy

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

kolem osy x. Spočítejte jeho objem V. Obsah plochy v obecném případě nespočítáte.

4.5.22. Napište rovnici hyperboloidu v E^3 (v proměnných x, y, z), který vznikne rotací hyperboly

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

kolem osy x. Spočítejte objem tělesa, které je omezeno popsanou plochou a rovinami $x = 0$ a $x = 3a$.

Na závěr

4.5.23. Odvoďte obsah S kruhu poloměru R ze vzorce pro délku kružnice tak, že kruh rozdělíte na „velmi úzká" mezikruží.

4.5.24. Odvoďte objem V koule poloměru R ze vzorce pro obsah povrchu kulové plochy (sféry) tak, že kouli rozdělíte na „velmi tenké" kulové „slupky".

4.5.25. Vodní tok má půlkruhový průřez poloměru R. Rychlost toku je největší na hladině uprostřed, kde má hodnotu v, a klesá kvadraticky s tím, jak se přibližujeme stěně koryta. Rychlost na stěně je nulová. Spočítejte průtok Q. Jaký je podíl tohoto průtoku Q a průtoku Q_H za podmínky, že rychlost v průřezu toku je homogenní (všude stejná) a rovna v?

Řešení.

4.5.1. b) $T = \frac{2\pi}{\omega}$, střední hodnota je $\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt = \frac{A\omega}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \sin\omega t\,dt = \frac{A}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin z\,dz = 0$.
c) Střední hodnota kvadrátu funkce je $\frac{1}{T}\int_0^T f^2(t)\,dt = \frac{A^2\omega}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \sin^2\omega t\,dt = \frac{A^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin^2 z\,dz = \frac{A^2}{2}$.
Odmocnina z tohoto výrazu je $\frac{A\sqrt{2}}{2}$ (ve fyzice se nazývá efektivní hodnota veličiny popsané funkcí f; napětí nebo proud jsou vhodné příklady).

4.5.2. a) $\int_0^\omega P(x)\,dx$, kde ω je maximální věk, tj. věk, pro který platí: $x > \omega \Rightarrow P(x) = 0$.

b) $\dfrac{\int_0^\omega xP(x)\,dx}{\int_0^\omega P(x)\,dx}$. c) $\dfrac{\int_{x_1}^{x_2} xP(x)\,dx}{\int_{x_1}^{x_2} P(x)\,dx}$. d) $\dfrac{\int_{x_1}^{x_2} P(x)\,dx}{\int_0^\omega P(x)\,dx}$. e) $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < 0, \\ \dfrac{\int_0^x P(\xi)\,d\xi}{\int_0^\omega P(\xi)\,d\xi} & \text{pro } x \in (0,\omega), \\ 1 & \text{pro } x > \omega. \end{cases}$

4.5.3. a) $\frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2} p(t)\,dt$. b) $p(t) = p_0(1-\frac{1}{4}t)$, $\frac{3}{4}p_0$. c) $\frac{5}{6}p_0 \doteq 0.83p_0$. d) $\frac{1}{2\ln 2}p_0 \doteq 0.72p_0$. e) Grafy funkcí popisujících produkci spojují dva stejné body. Graf je konkávní v případě c), lineární v b) a konvexní v případě d).

4.5.4. Střední hodnota rychlosti: $\frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt$. Dráha v čase t: $s(t) = s(t_1) + \int_{t_1}^t v(\tau)\,d\tau$. Ano, poněvadž podle předcházejícího vzorce je $s(t_2) - s(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt$.

4.5.5. $v(t) = v(t_1) + a(t-t_1)$, $s(t) = s(t_1) + \int_{t_1}^t v(\tau)\,d\tau = s(t_1) + v(t_1)(t-t_1) + \frac{1}{2}a(t-t_1)^2$. Střední (průměrná) rychlost je $v(t_1) + \frac{1}{2}a(t_2-t_1)$.

4.5.6. $v(t) = \frac{1}{2}(2A-\alpha t)t$, rychlost je rovna nule v čase $t = \frac{2A}{\alpha}$; $s(t) = \int_0^t v(\tau)\,d\tau = \frac{1}{2}At^2 - \frac{1}{6}\alpha t^3$; uražená dráha je $s(\frac{2A}{\alpha}) = \frac{2A^3}{3\alpha^2}$; rozměry konstant A, α jsou $[A] = \mathrm{ms}^{-2}$, $[\alpha] = \mathrm{ms}^{-3}$.

4.5.7. $v(t) = v_0 - gt$, rychlost je rovna nule v čase $t = \frac{v_0}{g}$; $s(t) = \int_0^t v(t)\,dt = v_0t - \frac{1}{2}gt^2$; výška výstupu je proto $s(\frac{v_0}{g}) = \frac{v_0^2}{2g}$.

4.5.8. $v_x = v\cos\alpha$, $v_y = v\sin\alpha$, proto rychlost ve svislém směru v čase t je $v(t) = v_y - gt$ a dráha s_y ve svislém směru je $s_y(t) = v_yt - \frac{1}{2}gt^2$. Odsud zjistíme, že těleso se v čase $t = \frac{2v_y}{g}$ vrátí do vodorovné roviny, z níž bylo vrženo. Poněvadž dráha $s_x(t)$ za čas t ve směru vodorovném je $s_x(t) = \int_0^t v_x\,dt = v_xt$, dostaneme dosazením času pro délku vrhu hodnotu $\frac{v^2\sin 2\alpha}{g}$.

4.5.10. a) $\frac{14}{3}$, b) $\frac{27}{2}$, c) $\frac{9}{2}$, d) $\frac{125}{6}$. **4.5.11.** a) $\frac{8}{3}$, b) $1 + 2e\ln 2$.

4.5.12. 8. **4.5.13.** $\frac{9}{2}$. **4.5.14.** $\frac{8}{3}$. **4.5.15.** b) $\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\ln 3$. c) $\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2})$. d) $f(x) = \sqrt{R^2-x^2}$, $x \in \langle 0, R\rangle$; při integraci použijte substituci $x = R\sin\varphi$, $\varphi \in \langle 0, \frac{1}{2}\pi\rangle$.

4.5.16. a) $\pi\displaystyle\int_{-R}^R (R^2-x^2)\,dx = \frac{4}{3}\pi R^3$. b) $\pi\displaystyle\int_{\frac{R}{2}}^R (R^2-x^2)\,dx = \frac{5}{24}\pi R^3$, $\pi\displaystyle\int_{-R}^{\frac{R}{2}} (R^2-x^2)\,dx = \frac{9}{8}\pi R^3$.

4.5.17. $4\pi R^2$. **4.5.18.** $V = \frac{1}{3}\pi v^2(3R-v)$, $S = 2\pi Rv$. **4.5.19.** $S = 2\pi Rv$. Vzorec nezávisí na tom, kde jsou v kouli řezy vedeny, ale pouze na vzdálenosti v rovin, které kulovou vrstvu vymezují.

4.5.20. $V = \frac{1}{2}\pi r^2 v$, $S = \frac{\pi r}{6v^2}\left((r^2+4v^2)^{\frac{3}{2}} - r^3\right)$.

4.5.21. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2+z^2}{b^2} = 1$, $V = \frac{4}{3}\pi ab^2$. **4.5.22.** $\frac{y^2+z^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$, $V = 12\pi ab^2$.

4.5.23. $S = \int_0^R 2\pi r\,dr = \pi R^2$. **4.5.24.** $V = \int_0^R 4\pi r^2\,dr = \frac{4}{3}\pi R^3$. **4.5.25.** $Q = \frac{1}{4}\pi R^2 v$, $Q : Q_H = \frac{1}{2}$.

4.6. Integrály v pravděpodobnosti

4.6.1. Buď X spojitá náhodná veličina s hodnotami v intervalu $(-\infty, \infty)$. Funkci f nazveme **hustotou pravděpodobnosti** spojité náhodné veličiny X (stručně hustotou náhodné veličiny X), když se dá hodnotou $f(\xi)\,\delta$ „velmi dobře" vystihnout pravděpodobnost, s jakou náhodná veličina X nabývá hodnot z „malého" intervalu $(\xi - \frac{1}{2}\delta, \xi + \frac{1}{2}\delta)$. V mlhavých termínech se dá říci, že aproximace této pravděpodobnosti je tím lepší, čím je délka zmíněného intervalu – tedy δ – menší. Rozdělením intervalu, v němž se hodnota náhodné veličiny má pohybovat, dospějeme limitním procesem k vyjádření pravděpodobnosti $P(a < X < b)$, s jakou náhodná veličina X nabývá hodnot z konečného intervalu (a, b), $a < X < b$. Tato pravděpodobnost se vyjádří integrálem

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(\xi)\,\mathrm{d}\xi\,.$$

Proto pro hodnotu **distribuční funkce** $F(x)$, která vyjadřuje pravděpodobnost, že hodnota náhodné veličiny X je menší než x, platí

$$F(x) \equiv P(X < x) = \int_{-\infty}^{x} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi\,.$$

Pokud pro danou náhodnou veličinu existuje hustota, je $P(X = a) = P(x = b) = 0$, a proto všechny následující výrazy mají stejnou hodnotu: $P(a < X \le b)$, $P(a \le X < b)$, $P(a \le X \le b)$, $P(a < X < b)$.

Napište výraz, který ukazuje, jak se liší $P(x - \frac{1}{2}\delta < X < x + \frac{1}{2}\delta)$ od své aproximace $f(x)\,\delta$, $\delta > 0$, jestliže hustota pravděpodobnosti náhodné veličiny X je popsána funkcí f.

4.6.2. Napište vyjádření střední hodnoty μ a rozptylu (variance) σ^2 náhodné veličiny X, pro kterou existuje hustota f.

4.6.3. Jak bude vypadat hustota f pravděpodobnosti náhodné veličiny X, která se stejnou pravděpodobností nabývá hodnoty pouze z intervalu (a, b), $a < b$? Jak vypadá distribuční funkce F náhodné veličiny X? Spočítejte střední hodnotu a rozptyl X.

4.6.4. Jak zvolit κ, aby funkce

$$f(x) = \frac{\kappa}{e^x + e^{-x}}$$

byla hustotou pravděpodobnosti náhodné veličiny s hodnotami v $(-\infty, \infty)$? Spočítejte příslušnou distribuční funkci.

4.6.5. Obecné momenty náhodné veličiny X s reálnými hodnotami a hustotou f jsou definovány vztahy

$$m_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Dokažte, že pro rozptyl (varianci) platí $\sigma^2 = m_2 - m_1^2$.

4.6.6. Buď X náhodná veličina s hodnotami v $(-\infty, \infty)$ a hustotou f. Její střední hodnotu označíme μ a rozptyl σ^2. Buď α kladná konstanta.

a) Určete koeficient κ tak, aby funkce $f_\alpha(x) = \kappa f(\frac{x}{\alpha})$ byla hustotou nějaké náhodné veličiny X_α.

b) Spočítejte střední hodnotu μ_α a rozptyl σ_α^2 náhodné veličiny X_α.

c) Funkce f_α je hustotou náhodné veličiny αX. Srovnejte se cvičením 4.6.22.

Řešení. **4.6.1.** $\displaystyle\int_{x-\frac{1}{2}\delta}^{x+\frac{1}{2}\delta} \big(f(\xi) - f(x)\big)\,\mathrm{d}\xi$. **4.6.2.** $\displaystyle\mu = \int_{-\infty}^{\infty} \xi f(\xi)\,\mathrm{d}\xi$, $\displaystyle\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (\xi - \mu)^2 f(\xi)\,\mathrm{d}\xi$.

4.6.3.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \le a\,, \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{pro } x \in (a,b)\,, \\ 1 & \text{pro } x \ge b\,. \end{cases} \qquad \mu = \frac{a+b}{2}\,,\ \sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}\,.$$

4.6.4. $\kappa = \frac{2}{\pi}$. $F(x) = \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}(e^x)$. **4.6.6.** **a)** $\kappa = \frac{1}{\alpha}$. **b)** $\mu_\alpha = \alpha\mu$, $\sigma_A^2 = \alpha^2\sigma^2$.

Exponenciální rozdělení pravděpodobnosti

4.6.7. V čase $t = 0$ máme fungující (elektronické) zařízení, náhodná veličina X popisuje životnost takového zařízení. Pravděpodobnost, že zařízení selže až po uplynutí času t, se označuje $P(t < X)$. Pravděpodobnost, že zařízení selže v časovém intervalu (t_1, t_2), je $P(t_1 < X < t_2)$. Budeme se zabývat vlastnostmi náhodné veličiny X, když za její hustotu vezmeme tuto funkci s parametrem λ, $\lambda > 0$:

$$f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & \text{pro } t > 0\,, \\ 0 & \text{pro } t \le 0\,. \end{cases} \qquad (*)$$

Vyřešte tyto úlohy s právě definovanou hustotou f ($t > t_1 \ge 0$):

a) $P(X < t) = P(0 < X < t) = 1 - e^{-\lambda t}$, b) $P(t < X) = \int_t^\infty \lambda e^{-\lambda \tau}\, d\tau = e^{-\lambda t}$,

c) $P(t_1 < X < t) = e^{-\lambda t_1} - e^{-\lambda t}$, d) $P(0 < X) = 1$,

e) střední hodnota μ náhodné veličiny X je rovna $\mu = \int_0^\infty t f(t)\, dt = \dfrac{1}{\lambda}$,

f) rozptyl σ^2 náhodné veličiny X je roven $\sigma^2 = \int_0^\infty (t - \mu)^2 f(t)\, dt = \dfrac{1}{\lambda^2}$.

g) Kolik je $\lim\limits_{t \to 0+} \dfrac{d}{dt} P(X < t)$? Nakreslete graf $t \to P(X < t)$.

4.6.8. POZNÁMKA. Pravděpodobnost toho, že zařízení, které fungovalo v čase T, neselže ještě po další dobu t (podmíněná pravděpodobnost - náhodný jev spočívá v tom, že zařízení funguje po dobu $T + t$ ovšem za podmínky, že fungovalo po dobu T), je dána vztahem (který je třeba trochu rozmyslet)

$$\frac{P(T + t < X)}{P(T < X)}\,.$$

Podle předcházejícího výsledku víme, že $P(t < X) = e^{-\lambda t}$, lze proto psát

$$\frac{P(T + t < X)}{P(T < X)} = \frac{e^{-\lambda(T+t)}}{e^{-\lambda T}} = e^{-\lambda t}\,.$$

Výsledek ukazuje, že důsledkem volby hustoty f podle vztahu 4.6.7.(∗) je, že životnost má tuto vlastnost: jestliže zařízení v jistém okamžiku funguje, je z hlediska další životnosti stejně dobré jako zařízení nové.

4.6.9. POZNÁMKA. V předcházejících cvičeních jsme počítali integrály

$$\int_0^\infty t^k e^{-\lambda t}\, dt$$

pro $k = 1, 2$. K jejich výpočtu jsme použili integraci per partes. Věc lze zjednodušit užitím obratu, který vychází z jednoduchého vztahu

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}\, dt = \frac{1}{\lambda}\,,$$

který platí pro všechna $\lambda \in (0, \infty)$. Tento vztah derivujeme podle λ. Vlevo přesuneme derivaci za integrační znamení (to není samozřejmá operace, vynechat její ospravedlnění by si studenti matematiky dovolit nemohli; my se tím však zabývat nemůžeme). Násobíme -1 a jako výsledek dostaneme relaci

$$\int_0^\infty t e^{-\lambda t}\, dt = \frac{1}{\lambda^2}\,.$$

Můžeme derivovat podle λ dále a dostaneme, že pro každé kladné λ a každé přirozené číslo k platí

$$\int_0^\infty t^k e^{-\lambda t}\, dt = \frac{k!}{\lambda^{k+1}}\,. \qquad (*)$$

4.6.10. Odvoďte vztah pro k-tý obecný moment m_k náhodné veličiny X. Potom znovu spočítejte rozptyl.

4.6.11. Náhodná veličina Y popisuje dobu životnosti dvou zařízení. Prvního, jehož životnost je popsána hustotou 4.6.7.(∗) s $\lambda = \lambda_1$, a druhého, jehož životnost je popsána hustotou 4.6.7.(∗) s $\lambda = \lambda_2$ (střední délka života prvního zařízení je tedy $1/\lambda_1$ a druhého je $1/\lambda_2$). Náhodný jev spočívá v tom, že používáme jedno zařízení po celou dobu, co funguje, a potom používáme druhé zařízení až do doby, kdy přestane pracovat. Náhodná veličina Y popisuje celkovou dobu do selhání druhého zařízení.

a) Ukažte, že hustota $g(t)$ náhodné veličiny Y je pro $t \leq 0$ rovna nule a pro $t > 0$ je dána vztahem

$$g(t) = \lambda_1 \lambda_2 \int_0^t e^{-\lambda_1 \tau} e^{-\lambda_2 (t-\tau)} \, \mathrm{d}\tau .$$

b) Spočítejte hustotu $g(t)$ pravděpodobnosti náhodné veličiny Y pro případ $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

c) Ověřte, že $\int_0^\infty g(t)\,\mathrm{d}t = 1$.

d) Spočítejte cvičení b) a c) pro případ stejných hodnot λ_1 a λ_2, píšeme $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$.

e) Jestliže životnost prvního zařízení je vyjádřena náhodnou veličinou X_1, životnost druhého zařízení náhodnou veličinou X_2, potom náhodná veličina Y je součtem dvou náhodných veličin X_1 a X_2, $Y = X_1 + X_2$.

4.6.12. Pokud za hustoty pravděpodobnosti v předcházející úloze vezmeme obecné funkce f_1 a f_2 (nulové pro $t < 0$), má výraz pro hustotu náhodné veličiny Y tvar

$$g(t) = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) \, \mathrm{d}\tau .$$

Ukažte, že g se dá zapsat také takto:

$$g(t) = \int_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau) \, \mathrm{d}\tau .$$

4.6.13. Ověřte, že vzhledem k tomu, že funkce f_1, f_2 jsou rovny nule pro $t < 0$, je možné integrovat přes interval $(-\infty, \infty)$ a psát výraz, který není komplikován přítomností konečných mezí v integrálu

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t-\tau) f_2(\tau) \, \mathrm{d}\tau .$$

Integrály tohoto typu se nazývají **konvoluční integrály**.

Řešení. **4.6.7. g)** λ. **4.6.10.** Vztah 4.6.9.(∗) násobíme λ, dostaneme $m_k = \dfrac{k!}{\lambda^k}$. Poněvadž můžeme použít vztahu $\sigma^2 = m_2 - m_1^2$, dříve odvozený vztah $\sigma^2 = \dfrac{1}{\lambda^2}$ dostaneme okamžitě dosazením.

4.6.11. b) $g(t) = \dfrac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} (e^{-\lambda_2 t} - e^{-\lambda_1 t})$. **d)** $g(t) = \lambda^2 t e^{-\lambda t}$.

4.6.12. Substituce nové proměnné u pomocí vztahu $u = t - \tau$.

Normální rozdělení pravděpodobnosti

4.6.14. POZNÁMKA. Hustota $f_{\mu,\sigma}$ normálního rozdělení náhodné veličiny X se střední hodnotou μ a rozptylem σ^2, $\sigma > 0$, je

$$f_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Hustotu normovaného (standardizovaného) normálního rozdělení (normální rozdělení s $\mu = 0$ a $\sigma = 1$) označíme φ, tj.

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Potom pro distribuční funkci normálního rozdělení se střední hodnotou μ a rozptylem σ^2 platí

$$P(X < x) = \int_{-\infty}^{x} f_{\mu,\sigma}(\xi)\,\mathrm{d}\xi \equiv \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(\xi-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}\xi .$$

Označme Φ distribuční funkci normovaného (standardizovaného) normálního rozdělení

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \varphi(\xi)\,\mathrm{d}\xi \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{\xi^2}{2}}\,\mathrm{d}\xi .$$

4.6.15. Ukážeme, že

$$P(X < x) = \int_{-\infty}^{x} f_{\mu,\sigma}(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \Phi\Big(\frac{x-\mu}{\sigma}\Big).$$

Substitucí v prvním integrálu nahradíme proměnnou ξ proměnnou η podle vztahu $\xi = \mu + \sigma\eta$. To znamená $\mathrm{d}\xi = \sigma \mathrm{d}\eta$, dolní meze jsou pro obě proměnné rovny $-\infty$ a horní mez, jež je x pro proměnnou ξ, přejde na hodnotu $(x-\mu)/\sigma$ pro proměnnou η. Proto

$$P(X < x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(\xi-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}} e^{-\frac{\eta^2}{2}}\,\mathrm{d}\eta = \Phi\Big(\frac{x-\mu}{\sigma}\Big).$$

4.6.16. Ukažte, že Φ je rostoucí funkce na intervalu $(-\infty, \infty)$, jejíž limita v bodě $-\infty$ je rovna nule. Poněvadž Φ má být distribuční funkcí rozdělení pravděpodobnosti, musí také platit

$$\lim_{x\to\infty} \Phi(x) = 1 .$$

Tím se budeme zabývat v následujícím cvičení.

4.6.17. Ukážeme, že

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x = 1 .$$

Poněvadž primitivní funkci není možné vyjádřit pomocí elementárních funkcí, budeme postupovat jinak. Hodnotu integrálu označíme I. Je to kladné číslo, poněvadž integrovaná funkce je kladná na celém integračním oboru. Integrál, který vyjadřuje I, můžeme zapsat dvěma způsoby, které se liší pouze označením proměnné. Tedy

$$I = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}\,\mathrm{d}y .$$

Proto jejich součin je roven

$$I^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y ,$$

což znamená, že se integruje přes celou rovinu. Integruje se funkce dvou proměnných $(x, y) \to e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$, která má stejnou hodnotu $e^{-\frac{r^2}{2}}$ pro všechny body, které leží na kružnici poloměru r se středem v počátku. Když tuto hodnotu vezmeme na mezikruží vnitřního poloměru r a vnějšího poloměru $r + \mathrm{d}r$, dostaneme k celkové hodnotě integrálu příspěvek $2\pi r e^{-\frac{r^2}{2}}\,\mathrm{d}r$. Rovinu – celý integrační obor – vyčerpáme tak, že proměnnou r necháme probíhat interval $(0,\infty)$. Tím se nahoře uvedený dvojný integrál pro I^2 převede na tvar

$$I^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty 2\pi r e^{-\frac{r^2}{2}}\,\mathrm{d}r = \int_0^\infty r e^{-\frac{r^2}{2}}\,\mathrm{d}r = 1\,.$$

Poněvadž hodnota I nemůže být záporná, máme $I = 1$.

4.6.18. Ukážeme, že střední hodnota rozdělení pravděpodobnosti s hustotou $f_{\mu,\sigma}$ je rovna μ a rozptyl je roven σ^2 – tak jak čekáme. Jde o tyto rovnosti:

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty x e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}x = \mu\,,\quad \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty (x-\mu)^2 e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}x = \sigma^2\,.$$

Substituci $x = \mu + \sigma y$ uplatníme na oba integrály. První převedeme na

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty (\mu+\sigma y)e^{-\frac{y^2}{2}}\,\mathrm{d}y\,,$$

který se roztrhne na dva. První dává μ a druhý – jakožto integrál z liché funkce – je roven nule. Druhý integrál přejde stejnou substitucí na

$$\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty y^2 e^{-\frac{y^2}{2}}\,\mathrm{d}y\,,$$

který je roven σ^2, poněvadž se užitím integrace per partes dokáže, že

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty y^2 e^{-\frac{y^2}{2}}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{y^2}{2}}\,\mathrm{d}y = 1\,.$$

4.6.19. Ukažte, že pro distribuční funkci Φ normovaného normálního rozdělení platí:

a) $\Phi(0) = \frac{1}{2}$. b) $\Phi(x) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \Phi(-x)$.

To ukazuje, že graf distribuční funkce Φ je symetrický vzhledem k bodu $(0,\frac{1}{2})$.

c) Pro všechna x je $\Phi(x) = 1 - \Phi(-x)$, a proto tabulky funkce Φ uvádějí hodnoty pouze pro $x > 0$.

d) Kolik je hodnota derivace funkce Φ v nule? e) Nakreslete průběh funkce Φ.

4.6.20. Ukažte, že pro normální rozdělení se střední hodnotou μ a rozptylem σ^2, $\sigma > 0$, platí:

a) $P(a < X < b) = \Phi\Big(\dfrac{b-\mu}{\sigma}\Big) - \Phi\Big(\dfrac{a-\mu}{\sigma}\Big)$. b) $P(|X-\mu| < 3\sigma) = 2\Phi(3) - 1$.

c) $P(|X-\mu| < a) = 2\Phi\Big(\dfrac{a}{\sigma}\Big) - 1$. d) $P(|X-\mu| > a) = 2\Big(1 - \Phi\Big(\dfrac{a}{\sigma}\Big)\Big)$.

4.6.21. Jako výše odvoďte, že $P(|X-\mu| > k\sigma) = 2(1-\Phi(k))$ pro $k > 0$. Pro $k = 3$ se mluví o pravidlu tří sigma. Platí, že $2(1-\Phi(3)) \doteq 0{,}0027$. Poněvadž primitivní funkci pro výpočet $\Phi(3)$ nenajdeme, je třeba tuto hodnotu získat pomocí vhodného numerického výpočtu. Tento výpočet je v dnešní době, kdy počítač je téměř na každém stole, věcí vhodného programu (Excel stačí). V době, kdy tomu tak nebylo, se hodnoty funkce Φ čerpaly z tabulek. Byly také odvozeny přibližné vztahy, s jejichž pomocí se hodnoty funkce Φ dají získat nepříliš pracně s pomocí kalkulačky. Jeden z nich uvedeme. Funkce definovaná vztahem [Abramowitz, Stegun, vztah 26.2.18, strana 932]

$$P(x) = 1 - \tfrac{1}{2}\big(1 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4\big)^{-4}\,,$$

v němž konstanty mají hodnoty

$$c_1 = 0.196854\,,\ c_2 = 0.115194\,,\ c_3 = 0.000344\,,\ c_4 = 0.019527\,,$$

se dá vzít za dobrou aproximaci funkce Φ, poněvadž platí

$$|\Phi(x) - P(x)| < 2.5\cdot 10^{-4} \quad \text{pro všechna} \quad x \in (-\infty,\infty)\,.$$

Spočítejte na kalkulačce $\Phi(3)$. Polynom pro výpočet $P(x)$ uspořádejte takto (Hornerovo schéma):

$$(((c_4x + c_3)x + c_2)x + c_1)x + 1$$

a postupujte zevnitř ven – začnete c_4x a jedničku přičtete až v poslední operaci.

4.6.22. Ukažte, že má-li náhodná veličina X s normálním rozdělením střední hodnotu μ a rozptyl σ^2, potom náhodná veličina $Y = \alpha X + \beta$ s libovolnými konstantami α a $\beta > 0$, má normální rozdělení se střední hodnotu $\alpha\mu + \beta$ a rozptylem $\alpha^2\sigma^2$. Srovnejte se cvičením 4.6.6.

4.6.23. Ze vztahů nahoře uvedených vidíme, že pro každé kladné číslo σ platí

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\, dx = \sigma .$$

Derivujeme podle σ obě strany rovnosti, násobíme σ^3 a máme

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\, dx = \sigma^3 . \tag{$*$}$$

Dosadíme $\sigma = 1$ a dostaneme výsledek, k němuž jsme ve 4.6.18. museli použít integraci per partes. Odvoďte vztahy pro momenty náhodné veličiny s hustotou $f_{0,\sigma}$ – normálního rozdělení s nulovou střední hodnotu –, tj. spočítejte integrály

$$m_k = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^k e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\, dx .$$

Řešení. **4.6.19.** **a)** Integrand v definici funkce Φ je funkce sudá. Proto integrál přes $(-\infty, 0)$ je roven interálu přes $(0, \infty)$, a každý z nich se proto musí rovnat $\frac{1}{2}$. **b)** Vztah bude dokázán, jakmile se zjistí, že $\Phi(x) + \Phi(-x) = 1$. V integrálu, který dává $\Phi(-x)$, použijeme substituce $\xi = -y$, kterou se integrál přes interval $(-\infty, -x)$ převede na integrál přes (x, ∞). Proto můžeme psát

$$\Phi(x) + \Phi(-x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{\xi^2}{2}}\, d\xi + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x}^{\infty} e^{-\frac{\xi^2}{2}}\, d\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\xi^2}{2}}\, d\xi = 1 .$$

Tím jsme vztah dokázali. **d)** $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

4.6.20. **a)** $P(a < X < b) = P(X < b) - P(X \le a)$; což je rozdíl distibuční funkce v hodnotách b a a.

4.6.21. Přibližná hodnota po zaokrouhlení na pět desetinných míst je 0.99842. Přesná hodnota zaokrouhlená na pět desetinných míst je 0.99865. Rozdíl je 0.00023, což je ve shodě se shora uvedeným odhadem přesnosti aproximace.

4.6.22. Tvrzení vyplývá z této série rovností:

$$\begin{aligned} P(Y < x) = P(\alpha X + \beta < x) &= P\Big(X < \frac{x-\beta}{\alpha}\Big) \\ &= \Phi\left(\frac{\frac{x-\beta}{\alpha} - \mu}{\sigma}\right) \\ &= \Phi\Big(\frac{x - (\alpha\mu + \beta)}{\alpha\sigma}\Big) . \end{aligned}$$

4.6.23. Pro k liché integrujeme lichou funkci, proto dostaneme $m_k = 0$. Pro sudé kladné indexy, vyjádřené ve tvaru $2k$, k kladné, se výsledek dostaneme tak, že vztah $(*)$ postupně derivujeme podle σ a násobíme σ^3. Pro $k > 1$ zjistíme, že

$$m_{2k} = 1 \cdot 3 \cdot \ \ldots \ \cdot (2k-1)\, \sigma^{2k} = \frac{(2k)!}{2^k k!} \sigma^{2k} .$$

Výraz za posledním rovnítkem má smysl i pro $k = 0$ a $k = 1$. Dává $m_0 = 1$ a $m_2 = \sigma^2$.

FUNKCE DVOU PROMĚNNÝCH

5.1. Funkce dvou proměnných; základní pojmy

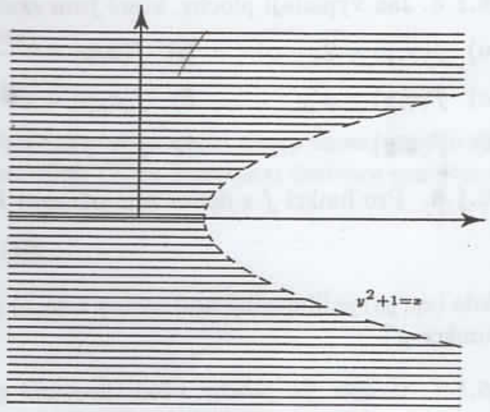
5.1.1. PŘÍKLAD. Definiční obor funkce dvou proměnných je podmnožina E^2. Pro funkci

$$f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{y^2-x+1}}$$

je definiční obor roven množině

$$D(f)=\{(x,y)\in E^2 \mid y^2+1>x\}\ .$$

Jestliže chceme množinu $D(f)$ graficky zachytit, kreslíme obrazec v rovině. Část patřící do $D(f)$ šrafujeme. Pokud části omezující křivky, které tvoří hranici obrazce, patří (resp. nepatří) do definičního oboru, kreslíme tyto části plnou (resp. přerušovanou) čarou.



5.1.2. Najděte a načrtněte definiční obor a zjistěte, zda funkce je na $D(f)$ omezená shora a zdola:

a) $f(x,y)=\ln(y+x^2-1)$, b) $f(x,y)=\sqrt{4-x^2-y}$, c) $f(x,y)=\dfrac{1}{x^2+xy+y^2}$,

d) $f(x,y)=\dfrac{\sqrt{y+1}}{\sqrt{x-2}}$, e) $f(x,y)=\sqrt{\dfrac{y+1}{x-2}}$, f) $f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{y+2x^2+8x}}$,

g) $f(x,y)=\ln(36-4x^2-9y^2)$, h) $f(x,y)=\sqrt{y-(x+1)^3}$, i) $f(x,y)=\sqrt{4-x^2}+\sqrt{y}$,

j) $f(x,y)=\sqrt{(x+1)^3-y}+\dfrac{1}{\sqrt{y}}$, k) $f(x,y)=\sqrt{x}+\sqrt{4-x^2-y^2}$.

Řešení.

5.1.2. a) funkce není omezená na $D(f)=\{(x,y)\in E^2 \mid y>1-x^2\}$,

b) funkce je omezená zdola a není omezená shora na $D(f)=\{(x,y)\in E^2 \mid y\le 4-x^2\}$,

c) funkce je omezená zdola a není omezená shora na $D(f)=\{(x,y)\in E^2 \mid (x,y)\neq(0,0)\}$,

d) funkce je omezená zdola a není omezená shora na $D(f)=\{(x,y)\in E^2 \mid x>2\ \wedge\ y\ge -1\}$,

e) funkce je omezená zdola a není omezená shora na definičním oboru (jehož zápis je poněkud nepřehledný) $D(f)=\{(x,y)\in E^2 \mid x>2\ \wedge\ y\ge -1\}\cup\{(x,y)\in E^2 \mid x<2\ \wedge\ y\le -1\}$,

f) funkce je omezená zdola a není omezená shora na $D(f)=\{(x,y)\in E^2 \mid y>8-2(x+2)^2\}$,

g) funkce je omezená shora a není omezená zdola na $D(f)=\{(x,y)\in E^2 \mid \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}<1\}$,

h) funkce je omezená zdola a není omezená shora na $D(f)=\{(x,y)\in E^2 \mid y\ge (x+1)^3\}$,

i) funkce je omezená zdola a není omezená shora na $D(f)=\{(x,y)\in E^2 \mid -2\le x\le 2\wedge 0\le y\}$,

j) funkce je omezená zdola a není omezená shora
na $D(f)=\{(x,y)\in E^2 \mid x>-1\ \wedge\ 0<y\le (x+1)^3\}$,

k) funkce je omezená zdola a je taky omezená shora na $D(f)=\{(x,y)\in E^2 \mid x^2+y^2\le 4\wedge x\ge 0\}$.

5.1.3. Na přímce p_1: $x_1 = t$, $x_2 = t$ a na přímce p_2: $x_1 = t$, $x_2 = -t$ sledujte pro t z prstencového okolí bodu nula hodnoty funkce

$$g(x_1, x_2) = \frac{2x_1x_2}{x_1^2 + x_2^2}$$

a ukažte, že limita funkce g v bodě $(0,0)$ neexistuje.

5.1.4. Pomocí polárních souřadnic $x_1 = r\cos\lambda$, $x_2 = r\sin\lambda$ sledujte pro r z pravého okolí nuly hodnoty funkce

$$h(x_1, x_2) = \frac{4x_1^2x_2^2}{x_1^2 + x_2^2}$$

a ukažte, že limita funkce h v bodě $(0,0)$ se rovná nule.

5.1.5. Jak vypadají plochy, které jsou grafy funkcí

a) $f(x,y) = 2$, b) $f(x,y) = 1 - x$, c) $f(x,y) = 2 - y$, d) $f(x,y) = 1 - x - y$,
e) $f(x,y) = x^2$, f) $f(x,y) = 1 - x^2$, g) $f(x,y) = y^2 - 1$, h) $f(x,y) = 4 - y^2$,
i) $f(x,y) = x^2 + y^2$, j) $f(x,y) = -x^2 - 9y^2$, k) $f(x,y) = x^2 - y^2$, l) $f(x,y) = y^2 - x^2$?

5.1.6. Pro funkci f s definičním oborem $D(f) = E^2$ definujeme funkci

$$p(t) = f(x_0 + at, y_0 + bt),$$

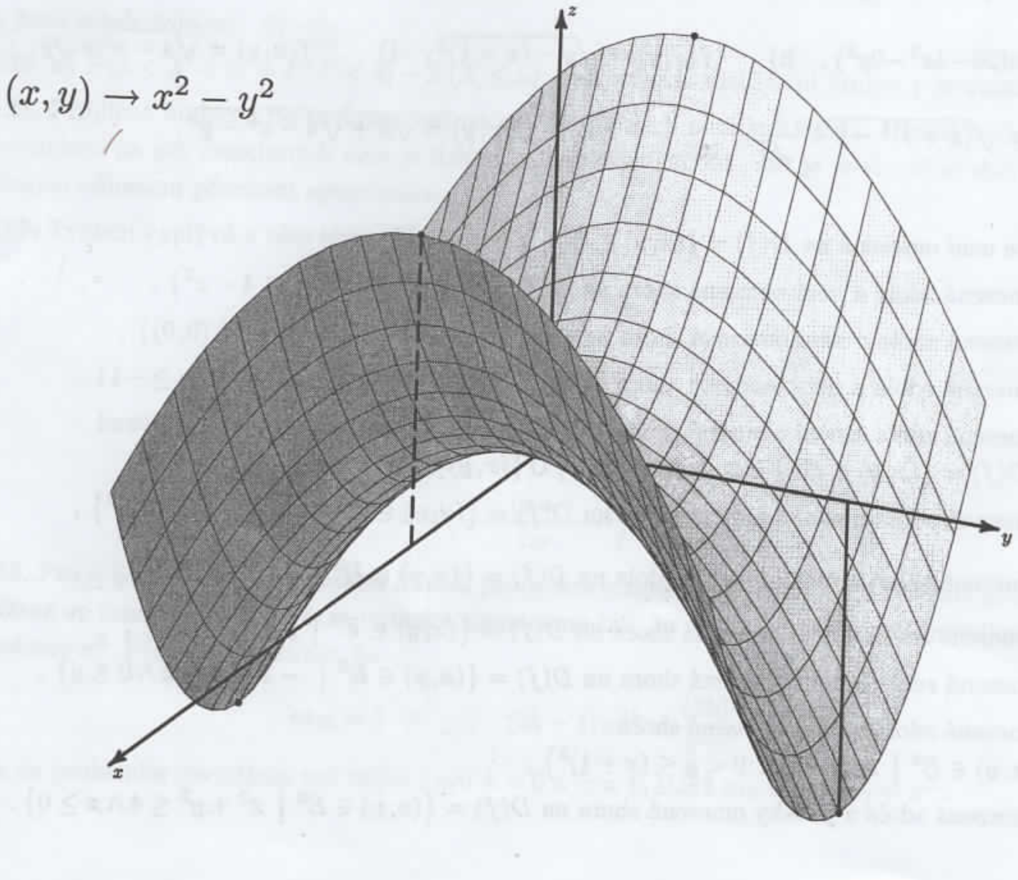
kde (x_0, y_0) je libovolný bod roviny a (a,b) je libovolný vektor délky jedna, tj. $a^2 + b^2 = 1$. Co představuje funkce p?

5.1.7. Ukažte, že plochy představované grafy následujících funkcí jsou rotačně symetrické vzhledem k ose z; najděte řezy ploch rovinami, které obsahují osu z; jak vypadají množiny

$$\{(x,y) \in E^2 \mid f(x,y) = c\}$$

pro různé hodnoty c, když

a) $f(x,y) = x^2 + y^2 - 4$, b) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2} - 2$, c) $f(x,y) = \ln(5 - x^2 - y^2)$?



Řešení. 5.1.3. Pro $t \neq 0$ platí $g(t,t) = 1$ a $g(t,-t) = -1$, proto limita v bodě $(0,0)$ neexistuje. **5.1.4.** Pro $r > 0$ platí $h(r\cos\lambda, r\sin\lambda) = r^2 \sin^2 2\lambda$. Proto $|h(r\cos\lambda, r\sin\lambda)| \le r^2$. Odtud vyplývá, že limita funkce h v bodě $(0,0)$ je rovna nule. **5.1.5. k)** Plocha je na obrázku. **5.1.6.** Graf funkce p je řez plochy $z = f(x,y)$ rovinou, která prochází bodem $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$ a jejíž normála je $(b,-a,0)$. Tato rovina je rovnoběžná s osou z.

5.2. Parciální derivace jednoduchých funkcí a jejich užití

5.2.1. Rozhodněte, zda daná funkce je na svém definičním oboru omezena zdola (resp. shora); spočítejte všechny první a druhé parciální derivace a určete otevřenou množinu $\mathcal{O}$, na které jsou derivace spočítány; potom dosaďte do diferenciálního výrazu:

a) $f(x,y) = -1 + x - 2y - \sqrt{xy}\ ,\ f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2\,,$

b) $f(x,y) = \ln(x^2+y^2)\ ,\ f_{xx} + f_{yy}\,,$

c) $f(x,y) = \sqrt{x}\sin\dfrac{y}{x}\ ,\ xf_x + yf_y\,.$

5.2.2. Rozhodněte, zda daná funkce je na E^2 omezena zdola (resp. shora); spočítejte všechny první a druhé parciální derivace a potom najděte lokální extrémy:

a) $f(x,y) = x^3 - y^2 - 2xy - x\,,$ b) $f(x,y) = x^2 - 2xy^2 + 6y^2 + 2x\,,$

c) $f(x,y) = xy(6-x-y)\,,$ d) $f(x,y) = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2\,,$

e) $f(x,y) = x^3 - 2y^3 - 3x + 6y - 3\,,$ f) $f(x,y) = xy\,e^{x-\frac{y^2}{2}}\,.$

5.2.3. Spočítejte všechny první a druhé parciální derivace dané funkce a určete otevřenou množinu $\mathcal{O}$, na které jsou derivace spočítány; potom najděte všechny lokální extrémy dané funkce na množině $\mathcal{O}$ a pokuste se ukázat, že jsou vlastně globálními (absolutními) extrémy:

a) $f(x,y) = 2x^2 + 8x + y^2 - 2y\,,$ b) $f(x,y) = 3x^2 - 2x\sqrt{y} + y - 8x + 8\,,$

c) $f(x,y) = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y\,,$ d) $f(x,y) = 2x\sqrt{y} - 2x^2 + 2x - y\,.$

5.2.4. Ujasněte si tvar křivky $z = x^4 - 2x^2 \equiv (x^2-1)^2 - 1$. Potom si představte plochu $z = x^4 - 2x^2 + y^2$ a popište z názoru všechny její stacionární body. Závěry ověřte výpočtem.

5.2.5. Diferenciál funkce f proměnných x, y v bodě $P = (x_0,y_0)$, v němž má funkce f spojité obě parciální derivace prvního řádu, je dán výrazem

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\,\mathrm{d}y\,.$$

Jestliže chceme také zachytit bod P a přírůstky h_x, h_y proměnných x, y, píšeme

$$\mathrm{d}f(P)(h_x,h_y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\,h_x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\,h_y\,.$$

Diferenciál vyjadřuje lineární (v přírůstcích h_x, h_y proměnných x, y) přiblížení toho, jak se změní hodnota funkce, když z bodu (x_0,y_0) postoupíme do „blízkého“ bodu (x_0+h_x, y_0+h_y). Přesně řečeno, označíme-li

$$R(x_0,y_0)(h_x,h_y) = f(x_0+h_x, y_0+h_y) - f(x_0,y_0) - \Big(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\,h_x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\,h_y\Big)\,,$$

platí

$$\lim_{(h_x,h_y)\to(0,0)} \frac{|R(x_0,y_0)(h_x,h_y)|}{\sqrt{h_x^2+h_y^2}} = 0\,.$$

Najděte diferenciál funkce f v daném bodě pro

a) $f(x,y) = 2x + 3y$ a obecný bod, b) $f(x,y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ a obecný bod,

c) $f(x,y) = xy$, $(x_0, y_0) = (-1, 2)$, d) $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2 - 2y^2}$, $(x_0, y_0) = (2, -1)$.

5.2.6. Najděte normálový vektor $\vec{n}_P$, který svírá s kladným směrem osy z ostrý úhel, a obecnou rovnici tečné roviny v bodě $P = (x_0, y_0, z_0)$ plochy $z = f(x,y)$ pro

a) $f(x,y) = xy^2$, $(x_0, y_0) = (-2, 1)$, b) $f(x,y) = x^2 + y^2$, $(x_0, y_0) = (0, 0)$,

c) $f(x,y) = xe^{x^2 y}$, $(x_0, y_0) = (-1, 0)$, d) $f(x,y) = xy + 2x - y$, $(x_0, y_0) = (1, -2)$.

5.2.7. Pro funkci f, která má n nezávisle proměnných a která má v bodě $(x_1, \ldots, x_n)$ všechny parciální derivace prvního řádu, je gradient ∇f v bodě $P = (x_1, \ldots, x_n)$ definován výrazem

$$\nabla f(x_1, \ldots, x_n) = \Big(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, \ldots, x_n) \Big) .$$

Spočítejte gradient pro

a) $f(x,y) = x^3y^2 - y + 1$, $P = (1, 1)$, b) $f(x,y) = e^{\frac{xy+2}{y^2}}$, $P = (2, -1)$,

c) $f(x,y) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$ a obecný bod P, d) $f(x,y) = \cos\big((\pi - x)(y+1)\big)$, $P = (\frac{1}{2}\pi, 0)$.

5.2.8. Najděte derivaci funkce $f(x,y) = 5x^2y - 4x - 2y$ v bodě $P = (1,1)$ ve směru $\vec{s}$, který jde z bodu P do bodu $Q = (4,5)$.

5.2.9. Najděte derivaci funkce $f(x,y) = x^2y$ v obecném bodě $P = (x,y)$ kružnice se středem v počátku $O = (0,0)$, ve směru $\vec{s}$, který je ke kružnici tečný a je v souhlase s kladným směrem oběhu kružnice.

5.2.10. Najděte derivaci funkce $f(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$

a) v obecném bodě $P = (x_1, x_2, x_3)$ ve směru $\vec{s}$, který jde z bodu P do počátku $O = (0,0,0)$, $P \neq O$,

b) v obecném bodě $P = (x_1, x_2, x_3)$ ve směru $\vec{s}$, tečném ke sféře, která má střed v počátku $O = (0,0,0)$ a prochází bodem P.

5.2.11. Najděte minimum a maximum funkce f na kompaktní množině M, když

a) $f(x,y) = 2x^2 + y^2 - 4x - 4y$, $M = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 2 \,,\ 0 \le y \le 3\}$,

b) $f(x,y) = 3x^2 - 6xy + 9y^2 - 6x - 6y$, $M = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 3 \,,\ 0 \le y \le 4\}$,

c) $f(x,y) = x^2(y^2 + 1) - 2xy - 2x$, $M = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 2 \,,\ 0 \le y \le 2\}$.

5.2.12. Najděte minimum a maximum funkce f na kompaktní množině M, když

a) $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy + x + y - 1$ a M je vymezena $x + y + 3 = 0$, $x = 0$, $y = 0$,

b) $f(x,y) = (2x + 1)y$ a M je vymezena $y = x^2 - 4$, $y = 0$,

c) $f(x,y) = 2xy + 3x - 12y$ a M je vymezena $x = y^2$, $x = 4$.

Řešení.

5.2.1. a) $\mathcal{O} = \{(x,y) \in E^2 \mid 0 < x \wedge 0 < y\} \cup \{(x,y) \in E^2 \mid x < 0 \wedge y < 0\}$, funkce není omezená zdola, ani shora, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 1 - \dfrac{y}{2\sqrt{xy}}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2 - \dfrac{x}{2\sqrt{xy}}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \dfrac{y^2}{4(xy)^{\frac{3}{2}}}$,

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \dfrac{-1}{4\sqrt{xy}}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \dfrac{x^2}{4(xy)^{\frac{3}{2}}}$, $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 0$ na $\mathcal{O}$,

b) $\mathcal{O} = D(f) = \{(x,y) \in E^2 \mid (x,y) \neq (0,0)\}$, funkce není omezená zdola, ani shora,
$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2x}{x^2+y^2}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2y}{x^2+y^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{-4xy}{(x^2+y^2)^2}$,
$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$, $f_{xx} + f_{yy} = 0$ na $\mathcal{O}$,

c) $\mathcal{O} = D(f) = \{(x,y) \in E^2 \mid 0 < x\}$, funkce není omezená zdola, ani shora,
$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}}\sin\frac{y}{x} - \frac{y}{x^{\frac{3}{2}}}\cos\frac{y}{x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}\cos\frac{y}{x}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{y}{x^{\frac{5}{2}}}\cos\frac{y}{x} - \frac{x^2+4y^2}{4x^{\frac{7}{2}}}\sin\frac{y}{x}$,
$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{y}{x^{\frac{5}{2}}}\sin\frac{y}{x} - \frac{1}{2x^{\frac{3}{2}}}\cos\frac{y}{x}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{-1}{x^{\frac{3}{2}}}\sin\frac{y}{x}$, $xf_x + yf_y = \frac{1}{2}f$ na $\mathcal{O}$.

5.2.2. a) $\mathcal{O} = D(f) = E^2$, funkce není omezená zdola, ani shora, $f_x(x,y) = 3x^2 - 2y - 1$,
$f_y(x,y) = -2(x+y)$, $f_{xx}(x,y) = 6x$, $f_{xy}(x,y) = -2$, $f_{yy}(x,y) = -2$, stacionární body jsou
$A = (-1,1)$ – lokální maximum a $B = (\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$ – sedlo,

b) $\mathcal{O} = D(f) = E^2$, funkce není omezená zdola, ani shora, $f_x(x,y) = 2(x+1-y^2)$,
$f_y(x,y) = -4y(x-3)$, $f_{xx}(x,y) = 2$, $f_{xy}(x,y) = -4y$, $f_{yy}(x,y) = -4x+12$, stacionární body jsou
$A = (-1,0)$ – lokální minimum, $B = (3,2)$ – sedlo a $C = (3,-2)$ – sedlo,

c) $\mathcal{O} = D(f) = E^2$, funkce není omezená zdola, ani shora, $f_x(x,y) = y(6-2x-y)$,
$f_y(x,y) = x(6-x-2y)$, $f_{xx}(x,y) = -2y$, $f_{xy}(x,y) = 2(3-x-y)$, $f_{yy}(x,y) = -2x$, stacionární body jsou $A = (2,2)$ – lokální maximum a $B = (0,0)$ – sedlo, $C = (6,0)$ – sedlo, $D = (0,6)$ – sedlo,

d) $\mathcal{O} = D(f) = E^2$, funkce není omezená zdola, ani shora, $f_x(x,y) = 6x^2 - y^2 + 10x$,
$f_y(x,y) = -2y(x-1)$, $f_{xx}(x,y) = 2(6x+5)$, $f_{xy}(x,y) = -2y$, $f_{yy}(x,y) = -2(x-1)$, stacionární body jsou $A = (0,0)$ – lokální minimum, $B = (1,4)$ – sedlo, $C = (1,-4)$ – sedlo; $D = (-\frac{5}{3},0)$ – sedlo,

e) $\mathcal{O} = D(f) = E^2$, funkce není omezená zdola, ani shora, $f_x(x,y) = 3(x^2-1)$, $f_y(x,y) = -6(y^2-1)$,
$f_{xx}(x,y) = 6x$, $f_{xy}(x,y) = 0$, $f_{yy}(x,y) = -12y$, stacionární body jsou $A = (1,-1)$ – lokální minimum,
$B = (-1,1)$ – lokální maximum, $C = (1,1)$ – sedlo a $D = (-1,-1)$ – sedlo,

f) $\mathcal{O} = D(f) = E^2$, funkce není omezená zdola, ani shora, $f_x(x,y) = (x+1)y\,\mathrm{e}^{x-\frac{y^2}{2}}$,
$f_y(x,y) = -x(y^2-1)\,\mathrm{e}^{x-\frac{y^2}{2}}$, $f_{xx}(x,y) = (x+2)y\,\mathrm{e}^{x-\frac{y^2}{2}}$, $f_{xy}(x,y) = -(x+1)(y^2-1)\,\mathrm{e}^{x-\frac{y^2}{2}}$,
$f_{yy}(x,y) = xy(y^2-3)\,\mathrm{e}^{x-\frac{y^2}{2}}$, stacionární body jsou $A = (-1,1)$ – lokální minimum,
$B = (-1,-1)$ – lokální maximum a $C = (0,0)$ – sedlo.

5.2.3. a) $\mathcal{O} = D(f) = E^2$, funkce není omezená shora, $f_x(x,y) = 4(x+2)$, $f_y(x,y) = 2(y-1)$,
$f_{xx}(x,y) = 4$, $f_{xy}(x,y) = 0$, $f_{yy}(x,y) = 2$, stacionárním bodem je $A = (-2,1)$ – globální (absolutní) minimum,

b) $\mathcal{O} = \{(x,y) \in E^2 \mid 0 < y\}$, funkce není omezená shora, $f_x(x,y) = 2(3x - \sqrt{y} - 4)$,
$f_y(x,y) = \frac{\sqrt{y}-x}{\sqrt{y}}$, $f_{xx}(x,y) = 6$, $f_{xy}(x,y) = \frac{-1}{\sqrt{y}}$, $f_{yy}(x,y) = \frac{x}{2y^{\frac{3}{2}}}$, stacionárním bodem je
$A = (2,4)$ – globální (absolutní) minimum,

c) $\mathcal{O} = \{(x,y) \in E^2 \mid 0 < x\}$, funkce není omezená zdola, $f_x(x,y) = \frac{y-2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$, $f_y(x,y) = \sqrt{x} - 2y + 6$,
$f_{xx}(x,y) = \frac{-y}{4x^{\frac{3}{2}}}$, $f_{xy}(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $f_{yy}(x,y) = -2$, stacionárním bodem je $A = (4,4)$ – globální (absolutní) maximum,

d) $\mathcal{O} = \{(x,y) \in E^2 \mid 0 < y\}$, funkce není omezená zdola, $f_x(x,y) = 2(\sqrt{y} - 2x + 1)$,
$f_y(x,y) = \frac{x}{\sqrt{y}} - 1$, $f_{xx}(x,y) = -4$, $f_{xy}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{y}}$, $f_{yy}(x,y) = \frac{-x}{2y^{\frac{3}{2}}}$, stacionárním bodem je
$A = (1,1)$ – globální (absolutní) maximum.

5.2.4. Dvě globální minima v bodech $A = (-1, 0)$ a $B = (1, 0)$, sedlo v bodě $C = (0, 0)$.

5.2.5. a) $\mathrm{d}f = 2\mathrm{d}x + 3\mathrm{d}y$, **b)** $\mathrm{d}f = x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y$, **c)** $\mathrm{d}f = 2\mathrm{d}x - \mathrm{d}y$, **d)** $\mathrm{d}f = -\mathrm{d}x - \mathrm{d}y$.

5.2.6. a) $P = (-2, 1, -2)$, $\vec{n}_P = (-1, 4, 1)$, $x - 4y - z + 4 = 0$, **b)** $P = (0, 0, 0)$, $\vec{n}_P = (0, 0, 1)$, $z = 0$, **c)** $P = (-1, 0, -1)$, $\vec{n}_P = (-1, 1, 1)$, $x - y - z = 0$, **d)** $P = (1, -2, 2)$, $\vec{n}_P = (0, 0, 1)$, $z = 0$.

5.2.7. a) $\nabla f(P) = (3, 1)$, **b)** $\nabla f(P) = (-1, 2)$, **c)** $\nabla f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3)$, **d)** $\nabla f(P) = (1, -\frac{1}{2}\pi)$.

5.2.8. $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\vec{s}}(P) = 6$. **5.2.9.** $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\vec{s}}(x, y) = \dfrac{x(x^2 - 2y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

5.2.10. a) $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\vec{s}}(x_1, x_2, x_3) = -\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$, **b)** $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\vec{s}}(x_1, x_2, x_3) = 0$.

5.2.11. a) $\min\limits_{(x,y)\in M} f(x, y) = f(1, 2) = -6$, $\max\limits_{(x,y)\in M} f(x, y) = f(0, 0) = f(2, 0) = 0$,

b) $\min\limits_{(x,y)\in M} f(x, y) = f(2, 1) = -9$, $\max\limits_{(x,y)\in M} f(x, y) = f(0, 4) = 120$,

c) $\min\limits_{(x,y)\in M} f(x, y) = f(1, 1) = -2$, $\max\limits_{(x,y)\in M} f(x, y) = f(2, 2) = 8$.

5.2.12. a) $\min\limits_{(x,y)\in M} f(x, y) = f(-1, -1) = -2$, $\max\limits_{(x,y)\in M} f(x, y) = f(-3, 0) = f(0, -3) = 5$,

b) $\min\limits_{(x,y)\in M} f(x, y) = f(1, -3) = -9$, $\max\limits_{(x,y)\in M} f(x, y) = f(-\frac{4}{3}, -\frac{20}{9}) = \frac{100}{27}$,

c) $\min\limits_{(x,y)\in M} f(x, y) = f(1, 1) = -7$, $\max\limits_{(x,y)\in M} f(x, y) = f(4, -2) = 20$.

5.3. Parciální derivace složených funkcí

5.3.1. Spočítejte všechny první a druhé parciální derivace dané funkce a určete otevřenou množinu $\mathcal{O}$, na které jsou derivace spočítány; zjistěte, zda na množině $\mathcal{O}$ jsou funkce omezeny zdola (resp. shora):

a) $f(x, y) = \ln(5 - x^2 - y^2)$, b) $g(x, y) = \mathrm{e}^{\frac{x}{y^2}}$, c) $f(x, y) = \ln(x^2 - 2x - y)$,

d) $f(x, y) = \mathrm{e}^{\frac{y^2+1}{x}}$, e) $f(x, y) = xy^3\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}$, f) $f(x, y) = \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^y}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^y}$,

g) $f(x, y) = \ln\dfrac{(x-1)^2 y}{x}$, h) $f(x, y) = \ln\Big(\dfrac{x^2}{y} + 1\Big)$, i) $f(x, y) = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$,

j) $f(x, y) = \operatorname{arctg}\dfrac{x - y}{1 + xy}$, k) $f(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^3 + y}}$, l) $f(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{x + y^2}}$,

m) $f(x, y) = \sqrt{x \ln y}$, n) $f(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \mathrm{e}^{2xy}}}$, o) $f(x, y) = \mathrm{e}^{\sqrt{y - x^2}}$,

p) $f(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 2xy + 3y^2}}$, q) $f(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2 + y^2}}$.

5.3.2. Funkce g jedné proměnné má derivaci ve všech bodech intervalu $(-\infty, \infty)$, A je libovolná konstanta. Ukažte, že funkce $u(x, t) = A\mathrm{e}^{-5t} g(3t - 2x)$ vyhovuje rovnici

$$2\,\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + 3\,\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = -10\,u(x, t) \quad \text{ve všech bodech} \quad (x, t) \in E^2.$$

5.3.3. Funkce g jedné proměnné má dvě derivace ve všech bodech intervalu $(-\infty, \infty)$, A, B, α jsou libovolné konstanty. Ukažte, že funkce $u(x,t) = A\,g(x - \alpha t) + B\,g(x + \alpha t)$ vyhovuje rovnici

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0 \quad \text{ve všech bodech} \quad (x,t) \in E^2 .$$

5.3.4. Funkce f dvou proměnných x_1, x_2 má v otevřené množině $G \subset E^2$ derivace druhého řádu a každá z dvojice funkcí y_1, y_2 jedné proměnné t má dvě derivace na otevřeném intervalu I. Přitom pro každý bod $t \in I$ je $(y_1(t), y_2(t)) \in G$. Vyjádřete první a druhou derivaci funkce $h(t) = f(y_1(t), y_2(t))$ podle t; při zápisu výsledků nevypisujte argument t a vnitřní funkce derivací funkce f. Použijte také indexů pro označení derivací, neboť takový zápis je jednodušší.

5.3.5. Funkce g závisí na dvou proměnných $(u,v) \in E^2$ a má parciální derivace druhého řádu ve všech bodech. Na místa proměnných (u,v) dosadíme funkce, které jsou pojmenovány ve shodě s proměnnými, na jejichž místa budou dosazeny. Tyto funkce jsou $u = 3x + 2y$ a $v = x - y$.

a) Napište výrazy, kterými jsou dány první dvě derivace funkce $z(x,y) = g(3x + 2y, x - y)$.

b) Spočítejte hodnoty prvních a druhých derivací funkce z v bodě $P = (2, -1)$, když znáte tyto hodnoty derivací funkce g v bodě $Q = (4, 3)$:

$$g_u(Q) = 3\,,\ g_v(Q) = -2\,,\ g_{uu}(Q) = 1\,,\ g_{uv}(Q) = -2\,,\ g_{vv}(Q) = 3\,.$$

5.3.6. Funkce g má stejné vlastnosti jako v předcházející úloze. Na místa argumentů (u,v) jsou dosazovány funkce $u = 3x - y$ a $v = x^2$.

a) Napište výrazy, kterými jsou dány první dvě derivace funkce $z(x,y) = g(3x - y, x^2)$.

b) Spočítejte hodnoty prvních a druhých derivací funkce z v bodě $P = (3, 5)$, když znáte tyto hodnoty derivací funkce g v bodě $Q = (4, 9)$:

$$g_u(Q) = -1\,,\ g_v(Q) = 1\,,\ g_{uu}(Q) = 1\,,\ g_{uv}(Q) = -1\,,\ g_{vv}(Q) = 3\,.$$

5.3.7. Napište diferenciál funkce $f(x,y) = \varphi(2x^2 y)$ v bodě $(x_0, y_0) = (-1, 2)$, když víte, že $\varphi'(4) = -\frac{1}{2}$.

5.3.8. Spočítejte tyto derivace vyšších řádů

a) $\dfrac{\partial^3}{\partial x \partial y \partial z}\, \mathrm{e}^{xyz}$, b) $\dfrac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n}\, x^m y^n$ pro přirozená m, n,

c) $\dfrac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2}\, \dfrac{x - 2y}{x + y}$, d) $\dfrac{\partial^3}{\partial x \partial y^2}\, \sin(xy^2)$.

5.3.9. Funkce g má dvě derivace na $(-\infty, \infty)$. Spočítejte všechny první a druhé parciální derivace funkce $f(x,y) = g\left(\dfrac{x}{y}\right)$. Dokažte, že platí $x^2 f_{xx} + 2xy\, f_{xy} + y^2 f_{yy} = 0$ ve všech bodech (x,y), $y \neq 0$.

5.3.10. Funkce g proměnných u, v má dvě derivace na E^2. Spočítejte všechny první a druhé parciální derivace funkce dané předpisem $f(x,y) = g(x + y, x^2 + y^2)$.

5.3.11. Funkce f má v bodě (x_0, y_0) derivace všech řádů.

a) Pro dvě reálné hodnoty h_x, h_y definujeme funkci g jedné reálné proměnné t vztahem

$$g(t) = f(x_0 + h_x t, y_0 + h_y t)\,.$$

Spočítejte derivace všech řádů funkce g v bodě $t = 0$.

b) Známe všechny hodnoty všech derivací funkce g v bodě $t = 0$, proto formální Taylorova řada dává toto vyjádření: $g(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(0)}{n!}$. Poněvadž ale $g(1) = f(x_0 + h_x, y_0 + h_y)$, můžeme pro obecný bod (x,y) z „malého“ okolí bodu (x_0, y_0) získat aproximaci hodnoty $f(x,y)$ tak, že vezmeme $h_x = x - x_0$ a $h_y = y - y_0$. Potom je $g(1) = f(x,y)$, a zmíněná řada vlastně odpovídá hodnotě $f(x,y)$. Proveďte pro funkci $P(x,y) = 2x^2 + 3y^2 + xy$ a bod $(x_0, y_0) = (1, -1)$. Přečtěte z odvozeného vyjádření rovnici tečné roviny plochy $z = P(x,y)$ v bodě $(1, -1, 4)$.

Řešení.

5.3.1. a) $\mathcal{O} = D(f) = \{(x,y) \in E^2 \mid x^2 + y^2 < 5\}$, funkce je omezená shora hodnotou $f(0,0) = \ln 5$, zdola není omezená, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{-2x}{5 - x^2 - y^2}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-2y}{5 - x^2 - y^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{-2(5 + x^2 - y^2)}{(5 - x^2 - y^2)^2}$,
$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{-4xy}{(5 - x^2 - y^2)^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{-2(5 - x^2 + y^2)}{(5 - x^2 - y^2)^2}$,

b) $\mathcal{O} = D(g) = \{(x,y) \in E^2 \mid y \neq 0\}$, funkce je omezená zdola nulou, shora není omezená,
$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{y^2} g(x,y)$, $\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \frac{-2x}{y^3} g(x,y)$, $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y) = \frac{1}{y^4} g(x,y)$, $\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{-2(x + y^2)}{y^5} g(x,y)$,
$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y) = \frac{2x(2x + 3y^2)}{y^6} g(x,y)$,

c) $\mathcal{O} = D(f) = \{(x,y) \in E^2 \mid y < (x-1)^2 - 1\}$, funkce není omezená zdola, ani shora,
$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2(x-1)}{x^2 - 2x - y}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-1}{x^2 - 2x - y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{-2(x^2 - 2x + y + 2)}{(x^2 - 2x - y)^2}$,
$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{2(x-1)}{(x^2 - 2x - y)^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{-1}{(x^2 - 2x - y)^2}$,

d) $\mathcal{O} = D(f) = \{(x,y) \in E^2 \mid x \neq 0\}$, funkce je omezená zdola hodnotou nula, shora není omezená,
$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{-(y^2+1)}{x^2} f(x,y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2y}{x} f(x,y)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{(2x + y^2 + 1)(y^2 + 1)}{x^4} f(x,y)$,
$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{-2y(x + y^2 + 1)}{x^3} f(x,y)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{2(x + 2y^2)}{x^2} f(x,y)$,

e) $\mathcal{O} = D(g) = \{(x,y) \in E^2 \mid y \neq 0\}$, funkce není omezená zdola, ani shora,
$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y^2(x+y)xy^3 e^{\frac{x}{y}}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = xy(-x + 3y)xy^3 e^{\frac{x}{y}}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = y(x + 2y)xy^3 e^{\frac{x}{y}}$,
$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = (-x^2 + xy + 3y^2)xy^3 e^{\frac{x}{y}}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{x(x^2 - 4xy + 6y^2)}{y} xy^3 e^{\frac{x}{y}}$,

f) $\mathcal{O} = D(f) = E^2$, funkce je omezená zdola hodnotou -1 a shora hodnotou 1, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2e^{x+y}}{(e^x + e^y)^2}$,
$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-2e^{x+y}}{(e^x + e^y)^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{-2e^{x+y}(e^x - e^y)}{(e^x + e^y)^3}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{2e^{x+y}(e^x - e^y)}{(e^x + e^y)^3}$,
$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{-2e^{x+y}(e^x - e^y)}{(e^x + e^y)^3}$,

g) $\mathcal{O} = D(f) = \{(x,y) \in E^2 \mid x > 0 \wedge x \neq 1 \wedge y > 0\} \cup \{(x,y) \in E^2 \mid x < 0 \wedge y < 0\}$, funkce není omezená zdola, ani shora, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x+1}{x(x-1)}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{-x^2 - 2x + 1}{x^2(x-1)^2}$,
$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{-1}{y^2}$,

h) $\mathcal{O} = D(f) = \{(x,y) \in E^2 \mid y > 0\} \cup \{(x,y) \in E^2 \mid y < -x^2\}$, funkce není omezená zdola, ani shora, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2x}{x^2 + y}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-x^2}{y(x^2 + y)}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{2(-x^2 + y)}{(x^2 + y)^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{-2x}{(x^2 + y)^2}$,
$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{x^2(x^2 + 2y)}{y^2(x^2 + y)^2}$,

i) $\mathcal{O} = D(f) = \{(x,y) \in E^2 \mid y \neq 0\}$, funkce je omezená zdola hodnotou $-\frac{1}{2}\pi$ a shora hodnotou $\frac{1}{2}\pi$,
$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y}{x^2 + y^2}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-x}{x^2 + y^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$,
$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$,

j) $\mathcal{O} = D(f) = \{(x,y) \in E^2 \mid xy \neq -1\}$, funkce je omezená zdola hodnotou $-\frac{1}{2}\pi$ a shora hodnotou $\frac{1}{2}\pi$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{1+x^2}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-1}{1+y^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 0$,
$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{2y}{(1+y^2)^2}$,

k) $\mathcal{O} = D(f) = \{(x,y) \in E^2 \mid y > -x^3\}$, funkce je omezená zdola hodnotou nula, shora omezená není, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{-3x^2}{2(x^3+y)^{\frac{3}{2}}} \equiv -\frac{3}{2}x^2 f^3(x,y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-1}{2(x^3+y)^{\frac{3}{2}}} \equiv -\frac{1}{2}f^3(x,y)$,
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{3x(5x^3-4y))}{4(x^3+y)^{\frac{5}{2}}} \equiv \frac{3}{4}x(5x^3-4y)f^5(x,y)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{9x^2}{4(x^3+y)^{\frac{5}{2}}} \equiv \frac{9}{4}x^2 f^5(x,y)$,
$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{3}{4(x^3+y)^{\frac{5}{2}}} \equiv \frac{3}{4}f^5(x,y)$,

l) $\mathcal{O} = D(f) = \{(x,y) \in E^2 \mid -y^2 < x\}$, funkce je omezená zdola hodnotou nula, shora není omezená, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{-1}{2(x+y^2)^{\frac{3}{2}}} \equiv -\frac{1}{2}f^3(x,y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-y}{(x+y^2)^{\frac{3}{2}}} \equiv -yf^3(x,y)$,
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{3}{4(x+y^2)^{\frac{5}{2}}} \equiv \frac{3}{4}f^5(x,y)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{3y}{2(x+y^2)^{\frac{5}{2}}} \equiv \frac{3}{2}yf^5(x,y)$,
$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{-x+2y^2}{(x+y^2)^{\frac{5}{2}}} \equiv (-x+2y^2)f^5(x,y)$,

m) $\mathcal{O} = \{(x,y) \in E^2 \mid 0 < x \wedge 1 < y\} \cup \{(x,y) \in E^2 \mid x < 0 \wedge 0 < y < 1\}$, funkce je omezená zdola hodnotou nula, shora není omezená, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\ln y}{2\sqrt{x \ln y}} \equiv \frac{1}{2}\ln y \; f^{-1}(x,y)$,
$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x}{2y\sqrt{x\ln y}} \equiv \frac{x}{2y}\; f^{-1}(x,y)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{-\ln^2 y}{4(x\ln y)^{\frac{3}{2}}} \equiv -\frac{1}{4}\ln^2 y \; f^{-3}(x,y)$,
$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{1}{4y\sqrt{x\ln y}} \equiv \frac{1}{4y}\; f^{-1}(x,y)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{-x^2(1+2\ln y)}{4y^2(x\ln y)^{\frac{3}{2}}} \equiv \frac{-x^2(1+2\ln y)}{4y^2}\; f^{-3}(x,y)$,

n) $\mathcal{O} = D(f) = \{(x,y) \in E^2 \mid x > 0 \wedge y < 0\} \cup \{(x,y) \in E^2 \mid x < 0 \wedge y > 0\}$, funkce je omezená zdola hodnotou 0 a shora není omezená, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{ye^{2xy}}{(1-e^{2xy})^{\frac{3}{2}}} \equiv ye^{2xy}f^3(x,y)$,
$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{xe^{2xy}}{(1-e^{2xy})^{\frac{3}{2}}} \equiv xe^{2xy}f^3(x,y)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{y^2(2+e^{2xy})e^{2xy}}{(1-e^{2xy})^{\frac{5}{2}}} \equiv y^2(2+e^{2xy})e^{2xy}f^5(x,y)$,
$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{((2xy+1)+(xy-1)e^{2xy})e^{2xy}}{(1-e^{2xy})^{\frac{5}{2}}} \equiv ((2xy+1)+(xy-1)e^{2xy})e^{2xy}f^5(x,y)$,
$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{x^2(2+e^{2xy})e^{2xy}}{(1-e^{2xy})^{\frac{5}{2}}} \equiv x^2(2+e^{2xy})e^{2xy}f^5(x,y)$,

o) $\mathcal{O} = \{(x,y) \in E^2 \mid x^2 < y\}$, funkce je omezená zdola hodnotou nula, shora není omezená,
$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{-xe^{\sqrt{y-x^2}}}{\sqrt{y-x^2}} \equiv \frac{-x}{\sqrt{y-x^2}}f(x,y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{e^{\sqrt{y-x^2}}}{2\sqrt{y-x^2}} \equiv \frac{1}{2\sqrt{y-x^2}}f(x,y)$,
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{(x^2\sqrt{y-x^2}-y)e^{\sqrt{y-x^2}}}{(y-x^2)^{\frac{3}{2}}} \equiv \frac{(x^2\sqrt{y-x^2}-y)}{(y-x^2)^{\frac{3}{2}}}f(x,y)$,
$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{x(1-\sqrt{y-x^2})e^{\sqrt{y-x^2}}}{2(y-x^2)^{\frac{3}{2}}} \equiv \frac{x(1-\sqrt{y-x^2})}{2(y-x^2)^{\frac{3}{2}}}f(x,y)$,
$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{(\sqrt{y-x^2}-1)e^{\sqrt{y-x^2}}}{4(y-x^2)^{\frac{3}{2}}} \equiv \frac{\sqrt{y-x^2}-1}{4(y-x^2)^{\frac{3}{2}}}f(x,y)$,

p) $\mathcal{O} = D(f) = \{(x,y) \in E^2 \mid (x,y) \neq (0,0)\}$, funkce je omezená zdola hodnotou 0 a shora není omezená, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{-(x+y)}{(x^2+2xy+3y^2)^{\frac{3}{2}}} \equiv -(x+y)f^3(x,y)$,
$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{-(x+3y)}{(x^2+2xy+3y^2)^{\frac{3}{2}}} \equiv -(x+3y)f^3(x,y)$,
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \dfrac{2x(x+2y)}{(x^2+2xy+3y^2)^{\frac{5}{2}}} \equiv 2x(x+2y)f^5(x,y)$,
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \dfrac{2(x^2+5xy+3y^2)}{(x^2+2xy+3y^2)^{\frac{5}{2}}} \equiv 2(x^2+5xy+3y^2)f^5(x,y)$,
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \dfrac{6y(2x+3y)}{(x^2+2xy+3y^2)^{\frac{5}{2}}} \equiv 6y(2x+3y)f^5(x,y)$,

q) $\mathcal{O} = D(f) = \{(x,y) \in E^2 \mid x^2 < y^2+1\}$, funkce je omezená zdola hodnotou nula, shora není omezená, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{x}{(1-x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \equiv xf^3(x,y)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{-y}{(1-x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \equiv -yf^3(x,y)$,
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \dfrac{2x^2+y^2+1}{(1-x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}} \equiv (2x^2+y^2+1)f^5(x,y)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \dfrac{-3xy}{(1-x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}} \equiv -3xyf^5(x,y)$,
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \dfrac{x^2+2y^2-1}{(1-x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}} \equiv (x^2+2y^2-1)f^5(x,y)$.

5.3.4. $\dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\partial f}{\partial x_1} y_1' + \dfrac{\partial f}{\partial x_2} y_2'$, $h' = f_{x_1} y_1' + f_{x_2} y_2'$,

$\dfrac{\mathrm{d}^2 h}{\mathrm{d}t^2} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(y_1')^2 + \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(y_2')^2 + 2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} y_1' y_1' + \dfrac{\partial f}{\partial x_1} y_1'' + \dfrac{\partial f}{\partial x_2} y_2''$,
$h'' = f_{x_1x_1}(y_1')^2 + f_{x_2x_2}(y_2')^2 + 2f_{x_1x_2} y_1' y_1' + f_{x_1} y_1'' + f_{x_2} y_2''$.

5.3.5. a) $z_x = 3g_u + g_v$, $z_y = 2g_u - g_v$, $z_{xx} = 9g_{uu} + 6g_{uv} + g_{vv}$, $z_{xy} = 6g_{uu} - g_{uv} - g_{vv}$, $z_{yy} = 4g_{uu} - 4g_{uv} + g_{vv}$.
b) $z_x(P) = 7$, $z_y(P) = 8$, $z_{xx}(P) = 0$, $z_{xy}(P) = 5$, $z_{yy}(P) = 15$.

5.3.6. a) $z_x = 3g_u + 2xg_v$, $z_y = -g_u$, $z_{xx} = 9g_{uu} + 12xg_{uv} + 4x^2g_{vv} + 2g_v$, $z_{xy} = -3g_{uu} - 2xg_{uv}$, $z_{yy} = g_{uu}$. **b)** $z_x(P) = 3$, $z_y(P) = 1$, $z_{xx}(P) = 83$, $z_{xy}(P) = 3$, $z_{yy}(P) = 1$.
5.3.7. $\mathrm{d}f(-1,2) = 4\,\mathrm{d}x - \mathrm{d}y$. **5.3.8. a)** $(1 + 3xyz + x^2y^2z^2)\mathrm{e}^{xyz}$, **b)** $m!\,n!$, **c)** $\dfrac{36(x-y)}{(x+y)^5}$,
d) $2(1 - 2x^2y^4)\cos(xy^2) - 10xy^2\sin(xy^2)$.

5.3.9. $f_x = \dfrac{g'}{y}$, $f_y = \dfrac{-xg'}{y^2}$, $f_{xx} = \dfrac{g''}{y^2}$, $f_{xy} = \dfrac{-(xg''+yg')}{y^3}$, $f_{yy} = \dfrac{x(xg''+2yg')}{y^4}$.

5.3.10. $f_x = g_u + 2xg_v$, $f_y = g_u + 2yg_v$, $f_{xx} = g_{uu} + 4xg_{uv} + 4x^2g_{vv} + 2g_v$, $f_{xy} = g_{uu} + 2(x+y)g_{uv} + 4xyg_{vv}$, $f_{yy} = g_{uu} + 4yg_{uv} + 4y^2g_{vv} + 2g_v$.

5.3.11. a) Pro derivace platí
$$g^{(n)}(0) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{\partial^n f(x_0,y_0)}{\partial x^k \partial y^{n-k}}\, h_x^k\, h_y^{n-k}.$$
b) Pro hodnotu $f(x,y)$ máme
$$f(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{\partial^n f(x_0,y_0)}{\partial x^k \partial y^{n-k}} (x-x_0)^k (y-y_0)^{n-k} \right).$$
Pro každý polynom jde o přesné vyjádření; proto platí vztah
$$P(x,y) = 4 + 3(x-1) - 5(y+1) + 2(x-1)^2 + (x-1)(y+1) + 3(y+1)^2$$
pro všechny body (x,y). Rovnice tečné roviny je $z = 4 + 3(x-1) - 5(y+1)$.

5.4. Regresní přímka

5.4.1. Je dáno n dvojic $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ reálných čísel. Těmito dvojicemi jsou určeny dva vektory $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ a $\vec{y} = (y_1, \dots, y_n)$. Budeme předpokládat, že ani jeden z vektorů $\vec{x}$ a $\vec{y}$ nemá všechny složky stejné. Hledáme takové konstanty a, b, že hodnota funkce

$$F(a,b) = \sum_{k=1}^{n} \big(y_k - ax_k - b\big)^2$$

je minimální. Přímka $y = ax + b$, v níž a, b jsou čísla, pro která funkce F nabývá minima, se nazývá regresní přímka. Rovnice pro stacionární body funkce F na E^2 jsou

$$\sum_{k=1}^{n} (y_k - ax_k - b)\, x_k = 0\,, \quad \sum_{k=1}^{n} (y_k - ax_k - b) = 0\,. \tag{1}$$

Označíme $\overline{x}$ (resp. $\overline{y}$) aritmetické průměry n-tic $x_1, \dots, x_n$ (resp. $y_1, \dots, y_n$); pro ně platí

$$n\overline{x} = \sum_{k=1}^{n} x_k\,, \; n\overline{y} = \sum_{k=1}^{n} y_k\,.$$

Druhý vztah v (1) je ekvivalentní se vztahem $\sum_{k=1}^{n} y_k - a\sum_{k=1}^{n} x_k - nb = 0$, který užitím aritmetických průměrů přejde do tvaru

$$b = \overline{y} - a\overline{x}\,. \tag{2}$$

Jestliže druhý vztah v (1) násobíme $\overline{x}$, dostáváme

$$\sum_{k=1}^{n} (y_k - ax_k - b)\, \overline{x} = 0\,.$$

Když poslední vztah odečteme od prvního vztahu v (1), získáme

$$\sum_{k=1}^{n} (y_k - ax_k - b)\,(x_k - \overline{x}) = 0\,.$$

Jestliže sem ze vztahu (2) dosadíme za b, dostaneme ihned

$$\sum_{k=1}^{n} \big((y_k - \overline{y}) - a(x_k - \overline{x})\big)\,(x_k - \overline{x}) = 0\,,$$

odkud pro hodnotu a dostaneme konečně relaci

$$a\sum_{k=1}^{n} (x_k - \overline{x})^2 = \sum_{k=1}^{n} (y_k - \overline{y})\,(x_k - \overline{x})\,. \tag{3}$$

Zavedeme ještě dva vektory

$$\vec{X} = (x_1 - \overline{x}, \dots, x_n - \overline{x})\,, \;\; \vec{Y} = (y_1 - \overline{y}, \dots, y_n - \overline{y})\,,$$

s jejichž pomocí lze vztah pro a zapsat ve tvaru

$$a\,|\vec{X}|^2 = \vec{X} \cdot \vec{Y}\,, \tag{4}$$

kde $|\vec{X}|$ označuje délku vektoru $\vec{X}$ v E^n a $\vec{X} \cdot \vec{Y}$ skalární součin vektorů $\vec{X}$, $\vec{Y}$ v E^n. Abychom odtud mohli vypočítat a, je třeba zajistit, aby $|\vec{X}| \neq 0$. To je ekvivalentní s tím, že $\vec{X} \neq \vec{0}$, a tento předpoklad je splněn vzhledem k tomu, že předpokládáme, že v posloupnosti $x_1, \dots, x_n$ nejsou všechna čísla stejná. Ze stejného důvodu je také $\vec{Y} \neq \vec{0}$, a proto můžeme definovat číslo

$$r_{xy} = \frac{\vec{X} \cdot \vec{Y}}{|\vec{X}|\,|\vec{Y}|} \equiv \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (x_k - \overline{x})\,(y_k - \overline{y})}{\sqrt{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (x_k - \overline{x})^2}\sqrt{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (y_k - \overline{y})^2}}\,,$$

které nazveme korelačním koeficientem zadané posloupnosti dvojic $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$. Poněvadž pro skalární součin dvou nenulových vektorů $\vec{X}$, $\vec{Y}$ platí $\vec{X} \cdot \vec{Y} = |\vec{X}||\vec{Y}| \cos\varphi$, kde φ je úhel, který v E^n svírají vektory $\vec{X}$ a $\vec{Y}$, vidíme, že $r_{xy} = \cos\varphi$. Proto $|r_{xy}| \leq 1$. Koeficient a se najde ze vztahu (4), který lze přepsat pomocí korelačního koeficientu do podoby

$$a = \frac{|\vec{Y}|}{|\vec{X}|} r_{xy} . \tag{5}$$

Koeficient b se potom určí ze vztahu (2). Spočítejte r_{xy}, a, b a rovnici regresní přímky pro dvojice bodů
a) $(7,6), (3,2), (6,8), (4,0)$, b) $(3,4), (4,1), (6,-5), (7,-8)$, c) $(3,5), (1,2), (7,1), (9,4)$.

5.4.2. Ukažte, že pro a platí

$$a = \frac{\vec{X} \cdot \vec{Y}}{|\vec{X}|^2} \equiv \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k y_k - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{k=1}^{n} x_k^2 - n\bar{x}^2} .$$

5.4.3. Sledujte postup části 5.4.1 a pro dvojice $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ odvoďte vztahy pro ty veličiny $\tilde{a}$ a $\tilde{b}$, pro které nabývá funkce

$$\tilde{F}(\tilde{a}, \tilde{b}) = \sum_{k=1}^{n} \left(x_k - \tilde{a} y_k - \tilde{b}\right)^2$$

svého minima. Vzdálenost bodu (x_k, y_k) od přímky $x = \tilde{a}y + \tilde{b}$, je tedy měřena „ve směru" osy x – na rozdíl od funkce F, v níž vystupuje vzdálenost bodu (x_k, y_k) od přímky $y = ax + b$ měřená ve směru osy y. Potvrďte, že obě přímky procházejí bodem $(\bar{x}, \bar{y})$. Potvrďte, že pro $r_{xy} = \pm 1$ jsou přímky totožné.

5.4.4. Při určení regresní přímky jsme vzali stacionární bod (dvojici (a, b) splňující vztahy (1)) a nestarali jsme se, zda se jedná opravdu o bod, v němž funkce F nabývá svého minima. Za předpokladu, že mezi čísly $x_1, \ldots, x_n$ jsou alespoň dvě různá, lze ukázat, že

$$\lim_{r \to \infty} \min\{F(a, b) \,|\, r^2 \leq a^2 + b^2\} = \infty . \tag{*}$$

Důkaz tohoto tvrzení je poněkud komplikovaný, a proto jej vynecháme.

a) S jeho pomocí však vysvětlete, proč hodnoty a, b, které splňují (1), reprezentují bod, v němž funkce F nabývá svého ostrého globálního minima.

b) Dovedete si představit hladkou funkci dvou proměnných na E^2, která má pouze jediný stacionární bod, který je bodem lokálního minima, přičemž funkce není omezena zdola?

5.4.5. Poznámka. Vektor $\vec{X}$ může být také definován vztahem $\vec{X} = \vec{x} - \bar{x}\,\vec{1}$, v němž $\vec{1}$ je vektor, jehož všechny složky se rovnají 1.

5.4.6. Funkce u (resp. v) je lineární v proměnné x (resp. y), tj. $u = k_1 x + q_1$ (resp. $v = k_2 y + q_2$). Ke dvojicím $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ přiřadíme pomocí zmíněných funkcí hodnoty $u_j = k_1 x_j + q_1$ (resp. $v_j = k_2 y_j + q_2$). Odvoďte, jak souvisí korelační koeficient dvojic $(u_1, v_1), \ldots, (u_n, v_n)$ s korelačním koeficientem dvojic $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$.

5.4.7. Napište systém rovnic analogický k (1) pro koeficienty kvadratické regresní křivky $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$. Minimalizuje se funkce

$$G(\alpha, \beta, \gamma) = \sum_{k=1}^{n} (y_k - \alpha x_k^2 - \beta x_k - \gamma)^2 .$$

Jak vypadají soustavy rovnic pro koeficienty polynomiální regresní křivky stupně tři a vyššího?

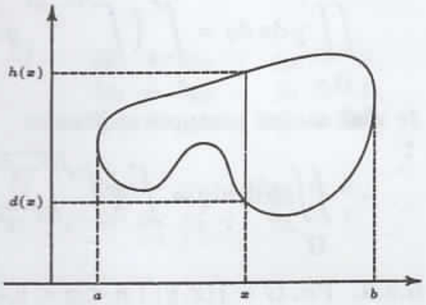
Řešení. 5.4.1. a) $r_{xy} = 0.8$, $a = 1.6$, $b = -4$, $y = \frac{8}{5}x - 4$, **b)** $r_{xy} = -1$, $a = -3$, $b = 13$, $y = -3x + 13$, **c)** $r_{xy} = 0$, $a = 0$, $b = 3$, $y = 3$. **5.4.3.** Pro hodnoty $\tilde{a}$, $\tilde{b}$ máme vztahy $\tilde{a}|\vec{Y}|^2 = \vec{X} \cdot \vec{Y}$, $\tilde{b} = \bar{x} - \tilde{a}\bar{y}$. **5.4.6.** Pro střední hodnoty platí $\bar{u} = k_1\bar{x} + q_1$ a $\bar{v} = k_2\bar{y} + q_2$.

Proto, když píšeme $\vec{u} = (u_1, \ldots, u_n)$, $\vec{v} = (v_1, \ldots, v_n)$, je $\vec{U} = \vec{u} - \bar{u}\vec{1} = k_1(\vec{x} - \bar{x}\vec{1}) = k_1\vec{X}$ a $\vec{V} = \vec{v} - \bar{v}\vec{1} = k_2(\vec{y} - \bar{y}\vec{1}) = k_2\vec{Y}$. Proto $r_{xy} = r_{uv}\,\mathrm{sign}(k_1)\,\mathrm{sign}(k_2)$.

5.4.7. Koeficienty α, β, γ musí vyhovovat soustavě lineárních rovnic

$$\sum_{k=1}^{n}(y_k - \alpha x_k^2 - \beta x_k - \gamma)x_k^2 = 0\,, \quad \sum_{k=1}^{n}(y_k - \alpha x_k^2 - \beta x_k - \gamma)x_k = 0\,, \quad \sum_{k=1}^{n}(y_k - \alpha x_k^2 - \beta x_k - \gamma) = 0\,.$$

5.5. Dvojný integrál



5.5.1. PŘÍKLAD. Na „rozumné" omezené souvislé otevřené množině Ω (ohraničené konečným počtem úseček a jednoduchých oblouků) máme integrovat funkci f, která je spojitá na uzávěru množiny Ω. Ukážeme, co se rozumí hodnotou dvojného integrálu, pro který se používá označení

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

Množinu Ω promítneme na osu x; dostaneme interval (a,b), jak je znázorněno na obrázku. Pro každé číslo $x \in (a,b)$ označíme Ω_x množinu těch y, pro které je $(x,y) \in \Omega$. (To je kolmý průmět na osu y průniku množiny Ω a přímky rovnoběžné s osou y, která je vedena bodem x.) Na obrázku je množina Ω_x tvořena intervalem $(d(x), h(x))$. To je nejjednodušší případ, neboť tato množina může být složitější, než je interval. (Kdyby šlo o rovnoběžky s osou x, obrázek nám poskytuje příklad, v němž společná část takové rovnoběžky a množiny Ω může být tvořena dvěma intervaly.) Obrázek však předkládá velmi jednoduchý případ (a jinými se zabývat nebudeme), v němž pro každé $x \in (a,b)$ je množina Ω_x intervalem. Každému takovému x přiřadíme hodnotu

$$\int\limits_{\Omega_x} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,.$$

Tím je definována funkce proměnné x na intervalu (a,b). Její integrací vzhledem k x dostaneme hodnotu dvojného integrálu. Platí tedy

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \Big(\int\limits_{\Omega_x} f(x,y)\,\mathrm{d}y \Big)\mathrm{d}x\,.$$

Při opačném pořadí proměnných je

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_c^d \Big(\int\limits_{\Omega_y} f(x,y)\,\mathrm{d}x \Big)\mathrm{d}y\,,$$

kde c a d jsou krajní body intervalu na ose y, který je kolmým průmětem množiny Ω na osu y. Hodnota integrálu je výsledkem limitního procesu, který popíšeme, abychom získali představu, čemu hodnota integrálu odpovídá. Vezmeme dvě kladná (malá) čísla Δ_x a Δ_y. Soustava přímek $x = j\Delta_x$, $j \in Z$, (rovnoběžných s osou y) spolu se soustavou přímek $y = k\Delta_y$, $k \in Z$, (rovnoběžných s osou x) rozdělí rovinu na obdélníky

$$\mathcal{O}_{j,k} = \big\{(x,y) \in E^2 \mid j\Delta_x \le x < (j+1)\Delta_x \ \wedge\ k\Delta_y \le y < (k+1)\Delta_y\big\}$$

s obsahem $\Delta_x\Delta_y$. V každém obdélníku $\mathcal{O}_{j,k}$, který je částí množiny Ω, vybereme libovolný bod $P_{j,k}$ se souřadnicemi $(\xi_{j,k}, \eta_{j,k})$ a vytvoříme číslo

$$I(\Delta_x, \Delta_y) = \sum_{\mathcal{O}_{j,k} \subset \Omega} f(\xi_{j,k}, \eta_{j,k})\ \Delta_x\,\Delta_y\,.$$

Pokud je funkce f kladná na Ω, toto číslo aproximuje objem tělesa

$$\{(x,y,z) \in E^3 \mid (x,y) \in \Omega \wedge 0 < z < f(x,y)\},$$

přičemž se objemu přiblížíme tím lépe, čím jsou čísla Δ_x a Δ_y menší.

Pro běžné oblasti se dá ukázat, že existuje číslo I takové, že

$$\forall \varepsilon\ \exists \delta : (\Delta_x < \delta) \wedge (\Delta_y < \delta) \Rightarrow |I(\Delta_x, \Delta_y) - I| < \varepsilon .$$

A toto číslo I je výše popsaný integrál.

Například pro oblast Ω tvaru půlkruhu poloměru r, tj.

$$\Omega = \{(x,y) \in E^2 \mid x^2 + y^2 < r^2 \wedge y > 0\},$$

a funkci $f(x,y) = y$ postupně dostáváme:

$$\iint\limits_{\Omega} y \,dx\,dy = \int_{-r}^{r} \Big(\int_{0}^{\sqrt{r^2-x^2}} y \,dy \Big) dx = \tfrac{1}{2} \int_{-r}^{r} \Big[y^2 \Big]_{y=0}^{y=\sqrt{r^2-x^2}} dx = \tfrac{1}{2} \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2)\,dx = \tfrac{2}{3} r^3 .$$

Je však možné postupovat i takto:

$$\iint\limits_{\Omega} y \,dx\,dy = \int_{0}^{r} \Big(\int_{-\sqrt{r^2-y^2}}^{\sqrt{r^2-y^2}} y \,dx \Big) dy = 2 \int_{0}^{r} y\sqrt{r^2-y^2}\,dy = -\tfrac{2}{3} \Big[(r^2-y^2)^{\frac{3}{2}} \Big]_0^r = \tfrac{2}{3} r^3 .$$

5.5.2. Pro $G = \{(x,y) \mid a < x < b, c < y < d\}$ zapisujeme

$$\begin{aligned} I = \iint\limits_{G} f(x,y)\,dx\,dy &= \int_a^b \Big(\int_c^d f(x,y)\,dy \Big) dx = \int_c^d \Big(\int_a^b f(x,y)\,dx \Big) dy = \\ &= \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dx\,dy = \\ &= \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)\,dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)\,dx . \end{aligned}$$

Pokud lze funkci f zapsat ve tvaru $f(x,y) = f_1(x) f_2(y)$, pro integrál platí

$$I = \int_a^b f_1(x) dx \int_c^d f_2(y) dy .$$

5.5.3. Najděte hodnoty integrálů a nakreslete oblasti, přes které se integruje:

$$I_1 = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} xy^2 \,dy = \int_0^1 \int_{x^2}^{x} xy^2 \,dy\,dx , \quad I_2 = \int_0^1 dx \int_{x^4}^{x} xy \,dy = \int_0^1 \int_{x^4}^{x} xy \,dy\,dx .$$

5.5.4. Spočítejte $\iint\limits_{G} (x-y)^2 \,dx\,dy$, kde G je obdélník $\{(x,y) \mid 0 < x < a, 0 < y < b\}$.

5.5.5. Spočítejte objem tělesa omezeného plochami

a) $x = 0,\ y = 0,\ 2x + y = 2,\ z = 0,\ z = x,$

b) $x = 0,\ y = 0,\ x + y = 1,\ z = 0,\ z = x^2 + y^2,$

c) $y^2 = x,\ x = 1,\ z = 0,\ z = x,$

d) $y = (x+1)^3,\ y = 0,\ x = 1,\ z = 0,\ z = x,$

e) $x = 0,\ x + y^2 = 4,\ z = 0,\ z = 1 + y^2,$

f) $y = x,\ y = x^2 - 2x,\ z = 0,\ 2z = x,$

g) $x = 0,\ y = 0,\ z = 0,\ 3x + 12y + 4z = 12,$

h) $x = 4,\ y = 0,\ y = \sqrt{x},\ z = 0,\ z = y,$

i) $x = 4,\ y = 0,\ y = \sqrt{x},\ z = 0,\ z = x,$

j) $x = 3,\ y = 0,\ 3y = x,\ z = 0,\ z = xy.$

Řešení. **5.5.3.** $I_1 = \frac{1}{40}$, $I_2 = \frac{3}{40}$. **5.5.4.** $\frac{1}{6}ab(2a^2 - 3ab + 2b^2)$. **5.5.5.** **a)** $\frac{1}{3}$, **b)** $\frac{1}{6}$, **c)** $\frac{4}{5}$, **d)** $\frac{12}{5}$, **e)** $\frac{96}{5}$, **f)** $\frac{27}{8}$, **g)** 2, **h)** 4, **i)** $\frac{64}{5}$, **j)** $\frac{9}{8}$.

LINEÁRNÍ ALGEBRA

6.1. Gaussova eliminace, vektory a matice

6.1.1. Gaussovou eliminací spočítejte řešení soustav lineárních rovnic, řešení zapište ve vektorovém tvaru a udělejte zkoušku:

a) $$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 - x_3 &= 1, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 &= 0, \\ 4x_1 - x_2 - 2x_3 &= 6, \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} 2x - y + z &= 4, \\ x + y - z &= -1, \\ 2x + 3y - z &= 2, \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} 3y_1 + 2y_2 + y_3 &= 5, \\ 2y_1 + 3y_2 + y_3 &= 1, \\ 2y_1 + y_2 + 3y_3 &= 11, \end{aligned}$$

d) $$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 3, \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 &= 2, \\ 3x_1 - 15x_2 + 15x_3 &= 3, \end{aligned}$$

e) $$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 - 4x_3 &= 2, \\ 5x_1 + 18x_2 - 14x_3 &= 9, \\ 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 &= -1, \end{aligned}$$

f) $$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 2x_3 &= 3, \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 1, \end{aligned}$$

g) $$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 5, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= 4, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 &= -1, \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 - x_4 &= 5, \end{aligned}$$

h) $$\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 - 3x_4 &= 0, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 3x_4 &= 0, \\ x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 3x_4 &= 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 - x_4 &= 0, \end{aligned}$$

i) $$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 1, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 0, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 &= -1, \end{aligned}$$

j) $$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 - 6x_4 + 4x_5 &= -5, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 2x_5 &= 1. \end{aligned}$$

6.1.2. Najděte všechny vektory z E^5 kolmé na vektory

a) $\vec{a}_1 = (1,2,1,2,1),\ \vec{a}_2 = (3,1,4,1,1)$, b) $\vec{a}_1 = (1,-1,1,-1,1),\ \vec{a}_2 = (-3,3,-3,3,-3)$,

c) $\vec{a}_1 = (3,-1,7,0,-1),\ \vec{a}_2 = (3,-2,5,-3,1),\ \vec{a}_3 = (1,-1,1,-2,1)$.

6.1.3. Najděte hodnotu parametru ξ tak, aby poslední z uvedených vektorů byl lineární kombinací předcházejících, když

a) $\vec{u} = (1,2,3),\ \vec{v} = (1,1,2),\ \vec{w} = (\xi,2,1)$, b) $\vec{a} = (5,2,-3),\ \vec{b} = (2,3,-4),\ \vec{c} = (4,-5,\xi)$,

c) $\vec{a} = (1,-1,2,1),\ \vec{b} = (2,1,-1,-1),\ \vec{c} = (4,-1,3,1),\ \vec{d} = (1,-4,\xi,5)$.

6.1.4. Vyšetříme, zda vektory
$$\vec{a} = (1,2,2,0),\ \vec{b} = (1,2,1,-3),\ \vec{c} = (2,3,4,-3),\ \vec{d} = (1,3,-1,-6)$$
jsou lineárně závislé. Tak tomu bude v případě, že existují koeficienty t_1, t_2, t_3, t_4 takové, že
$$t_1\vec{a} + t_2\vec{b} + t_3\vec{c} + t_4\vec{d} = \vec{0} \qquad (*)$$
a přitom se mezi nimi najde aspoň jeden nenulový. Rozepíšeme-li vztah $(*)$ po složkách, dostaneme homogenní soustavu lineárních rovnic pro koeficienty t_1, t_2, t_3, t_4.

a) Řešením této soustavy rovnic ověřte, že takové netriviální řešení je $t_1 = 0,\ t_2 = -3,\ t_3 = 1,\ t_4 = 1$. To ukazuje, že $3\vec{b} - \vec{c} - \vec{d} = \vec{0}$, a proto vektory jsou lineárně závislé.

b) Ukažte, že pokud se rozhodneme vyjádřit vektor $\vec{a}$ jako lineární kombinaci vektorů $\vec{b}$, $\vec{c}$ a $\vec{d}$, tj. hledat čísla u, v a w tak, aby platilo
$$u\vec{b} + v\vec{c} + w\vec{d} = \vec{a},$$
nebude mít soustava nehomogenních lineárních rovnic pro koeficienty u, v, w řešení. Tento výpočet problém lineární závislosti vektorů nevyřeší. Postup, který v každém případě dává odpověď, je ten, který vychází ze vztahu $(*)$ a který vede k homogenní soustavě lineárních rovnic pro koeficienty t_1, t_2, t_3, t_4 lineární kombinace zadaných vektorů.

6.1.5. Rozhodněte, zda uvedené vektory tvoří skupinu vektorů lineárně závislých; pokud ano, vyjádřete jeden z vektorů jako lineární kombinaci ostatních (a ověřte, že odvozený vztah zadané vektory opravdu splňují), když

a) $\vec{a} = (1,2,-3,1)$, $\vec{b} = (-2,1,-1,2)$, $\vec{c} = (4,2,-3,5)$, $\vec{d} = (-4,3,-4,-1)$,

b) $\vec{a} = (2,-2,2,1)$, $\vec{b} = (1,-1,1,1)$, $\vec{c} = (1,2,0,2)$, $\vec{d} = (2,1,1,2)$,

c) $\vec{a} = (3,5,-2,4)$, $\vec{b} = (5,2,1,3)$, $\vec{c} = (1,1,3,-2)$, $\vec{d} = (-1,2,-2,1)$,

d) $\vec{a} = (2,1,-1,2)$, $\vec{b} = (1,-1,1,-1)$, $\vec{c} = (3,-1,1,1)$, $\vec{d} = (2,-1,1,-2)$.

6.1.6. Ukažte, že vektory $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ v každé z těchto skupin jsou lineárně závislé, ať vektory $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$, $\vec{u}_4$ bereme jakkoliv, třeba z prostoru R^n pro libovolné přirozené n:

a) $\vec{a} = 2\vec{u}_1 - 3\vec{u}_2 + 2\vec{u}_3 + 5\vec{u}_4$, $\vec{b} = \vec{u}_1 + \vec{u}_3$, $\vec{c} = \vec{u}_2 + \vec{u}_4$, $\vec{d} = \vec{u}_4$,

b) $\vec{a} = 2\vec{u}_1 + 3\vec{u}_2 + 4\vec{u}_3 + 5\vec{u}_4$, $\vec{b} = 3\vec{u}_1 + 2\vec{u}_2 + \vec{u}_3$, $\vec{c} = \vec{u}_2 + \vec{u}_4$, $\vec{d} = \vec{u}_1 + \vec{u}_3$.

6.1.7. Najděte hodnost matice

a) $\begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & 1 & b_1 & b_2 \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & -3 \\ 2 & -3 & -2 & -2 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

6.1.8. Čtvercovou matici Y nazýváme antisymetrickou, když platí $Y = -Y^T$.

a) Ukažte, že pro libovolnou čtvercovou matici A je matice $X = A + A^T$ matice symetrická a matice $Y = A - A^T$ je matice antisymetrická.

b) Ukažte, že každá čtvercová matice A je součtem matice symetrické a antisymetrické.

c) Ukažte, že diagonální elementy antisymetrické matice jsou rovny nule.

d) Rozložte tyto dvě matice na součet matice symetrické a antisymetrické:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 9 & -1 & 2 \\ 3 & 8 & -5 \\ 6 & 13 & 7 \end{pmatrix}.$$

6.1.9. Označíme F zobrazení, které vektoru $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ přiřazuje antisymetrickou matici typu $(3,3)$ předpisem

$$F(\vec{a}) = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Čemu je roven součin $F(\vec{a})\,\vec{b}$ matice $F(\vec{a})$ a vektoru $\vec{b} \in E^3$, když vektor $\vec{b}$ chápeme jako vektor sloupcový, tj. považujeme ho za matici typu $(3,1)$?

6.1.10. Procvičte si násobení matic tím, že ověříte správnost vztahů

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 & -2 & 5 \\ 7 & -3 & -3 & -2 \\ -2 & -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 3 \\ 4 & -10 & -30 \\ 1 & -3 & 6 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -4 & 8 & 11 \\ 5 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -4 \\ 2 & -2 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -30 & 43 \\ -1 & 25 & 14 & -22 \\ 5 & -15 & -3 & 13 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 & -6 \\ 12 & -7 & -4 & -8 \\ -15 & 10 & 7 & 10 \\ 9 & 2 & 2 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = (-3) \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 & -6 \\ 12 & -7 & -4 & -8 \\ -15 & 10 & 7 & 10 \\ 9 & 2 & 2 & -9 \end{pmatrix} = (-3) \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}^T.$$

6.1.11. Čtvercová matice B má v prvním řádku a na diagonále jedničky, ostatní elementy jsou rovny nule. Popište výsledek BA násobení matice B a matice A slovy. Matice A je libovolná matice, pro kterou je násobení definováno. Jaký je výsledek násobení CA, když C má na diagonále jedničky a jediný další nenulový prvek je na místě (j,k), $k \neq j$? Jak vypadá matice D, pro niž DA je matice, kterou dostaneme z A vzájemnou výměnou řádků i a j? Jakým maticovým násobením manipulujeme se sloupci matice A?

6.1.12. Jsou dána čísla $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 1$ a šest vektorů zapsaných jako matice typu $(3,1)$:

$$V_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ W_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix},\ V_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ W_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ V_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix},\ W_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Spočítejte matice P_1, P_2 a P_3 definované takto: $P_1 = V_1 W_1^T$, $P_2 = V_2 W_2^T$, $P_3 = V_3 W_3^T$.

b) Spočítejte matice $P_1 + P_2 + P_3$, P_1^2, P_2^2, P_3^2 a $P_j P_k$ pro $j,k = 1,2,3$, $j \neq k$.

c) Spočítejte matici A, která je dána předpisem $A = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3$.

d) Ověřte, že $AV_j = \lambda_j V_j$ a $W_j^T A = \lambda_j W_j^T$ pro každé $j = 1,2,3$.

e) Spočítejte $V_j^T W_k$ a $W_j^T V_k$ pro $j,k = 1,2,3$.

6.1.13. Jestliže vektory $\vec{x} \in E^n$ zapisujeme jako sloupcové vektory, tj. matice typu $(n,1)$, lze skalární součin vektorů $\vec{x}$ a $\vec{y}$ zapsat pomocí násobení matic $\vec{x}\cdot\vec{y} = \vec{x}^T\,\vec{y}$. Pro matici M a vektory $\vec{f}_1$, $\vec{f}_2$ spočítejte matici Q, když

$$Q = \vec{f}_1^T\, M\, \vec{f}_1 + \vec{f}_2^T\, M\, \vec{f}_2,\ \text{kde}\ \vec{f}_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix},\ \vec{f}_2 = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix},\ M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

a vektory $\vec{f}_1$, $\vec{f}_2$ jsou dva kolmé vektory s délkou 1, tj. $\vec{f}_j^T\,\vec{f}_j = (1)$ pro $j = 1,2$ a $\vec{f}_1^T\,\vec{f}_2 = (0)$.

6.1.14. Spočítejte k-té mocniny těchto matic:

a) $A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

6.2. Determinanty, inverzní matice

6.2.1. Spočítejte determinanty

a) $\begin{vmatrix} 2004 & 2006 \\ 2005 & 2007 \end{vmatrix}$, b) $\begin{vmatrix} 2005 & 2004 \\ 2010 & 2009 \end{vmatrix}$, c) $\begin{vmatrix} a & b \\ -b & a \end{vmatrix}$, d) $\begin{vmatrix} x & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & x \end{vmatrix}$,

e) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 5 & -4 & 1 \\ 7 & 2 & 3 \end{vmatrix}$, f) $\begin{vmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 4 \\ -2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$, g) $\begin{vmatrix} 5 & 4 & 2 \\ -6 & 0 & -5 \\ 6 & -3 & 4 \end{vmatrix}$, h) $\begin{vmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 5 & 6 & 3 \\ -7 & -2 & 10 \end{vmatrix}$,

i) $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 6 & 3 & -9 \\ -4 & -2 & 6 \end{vmatrix}$, j) $\begin{vmatrix} b & a & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ a & b & 4 \end{vmatrix}$, k) $\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x^2 & y^2 \\ 1 & x^3 & y^3 \end{vmatrix}$, l) $\begin{vmatrix} a & b & 2 \\ 2a & 2 & 3 \\ b & a & 5 \end{vmatrix}$,

m) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -2 & -\frac{3}{5} & 3 \\ 3 & 5 & 6 \end{vmatrix}$, n) $\begin{vmatrix} 3 & \frac{1}{2} & 5 \\ 5 & \frac{3}{4} & 4 \\ 5 & \frac{5}{8} & 3 \end{vmatrix}$, o) $\begin{vmatrix} \frac{3}{2} & 2 & 2 \\ \frac{7}{4} & 3 & 3 \\ \frac{3}{8} & 5 & 6 \end{vmatrix}$, p) $\begin{vmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ 2 & \frac{2}{3} & 3 \\ \frac{5}{6} & \frac{1}{6} & \frac{3}{2} \end{vmatrix}$,

q) $\begin{vmatrix} a & a & a \\ a & b & b \\ a & b & c \end{vmatrix}$, r) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$, s) $\begin{vmatrix} 1 & a & b \\ a & 1 & c \\ b & c & 1 \end{vmatrix}$, t) $\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{vmatrix}$.

6.2.2. Spočítejte determinanty

a) $\begin{vmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta \\ 0 & 0 & \gamma & 0 \end{vmatrix}$, b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & 7 \\ -5 & 5 & 5 & 16 \\ -3 & 5 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$, c) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 0 & 1 \\ 7 & 2 & 4 & -5 \end{vmatrix}$, d) $\begin{vmatrix} 9 & 8 & 7 & 2 \\ 6 & 3 & 6 & 5 \\ 4 & 7 & 4 & 9 \\ 6 & 5 & 6 & 7 \end{vmatrix}$,

e) $\begin{vmatrix} 1 & a & b & 1 \\ a & 1 & c & 1 \\ b & c & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$, f) $\begin{vmatrix} c & a & d & b \\ a & c & d & b \\ a & c & b & d \\ c & a & b & d \end{vmatrix}$, g) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a & b \\ 1 & a & 0 & c \\ 1 & b & c & 0 \end{vmatrix}$, h) $\begin{vmatrix} a & b & 0 & 1 \\ b & a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & b & a \\ 1 & 0 & a & b \end{vmatrix}$.

6.2.3. Hodnotu determinantu nepočítejte; vhodnými úpravami převeďte jeden determinant na druhý:

$$\begin{vmatrix} x_2x_3 & x_1 & x_1^2 \\ x_1x_3 & x_2 & x_2^2 \\ x_1x_2 & x_3 & x_3^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3^2 & x_3^3 \end{vmatrix}.$$

6.2.4. Spočítejte determinanty

a) $\begin{vmatrix} x-y-z & 2x & 2x \\ 2y & y-z-x & 2y \\ 2z & 2z & z-x-y \end{vmatrix}$, b) $\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+c & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+d \end{vmatrix}$.

6.2.5. Ukažte, že pro determinant, který je složený ze tří vektorů $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, platí

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \vec{x} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}).$$

6.2.6. Pro dané matice spočítejte matice inverzní:

a) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} -3 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & -6 \\ 6 & 5 & -9 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 5 & -4 & 1 \\ 7 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

6.2.7. Určete takové hodnoty parametrů, aby matice byla regulární, a potom spočítejte inverzní matici:

a) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a-b \end{pmatrix}$, b) $B = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ -1 & a & 1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$, c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}$.

6.2.8. Matice A, B jsou dány vztahy

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & u \\ 0 & -1 & v \\ -1 & 1 & w \end{pmatrix}$$

s parametry u, v, w. Lze tyto parametry volit tak, aby matice B byla inverzní k matici A?

6.2.9. Tyto soustavy řešte Gaussovou eliminací, Cramerovým pravidlem a také pomocí inverzní matice k matici soustavy:

a) $\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 - x_3 &= -1, \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 &= 0, \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 &= 1, \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 1, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= -1, \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 4, \end{aligned}$ c) $\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 &= 5, \\ -5x_1 + 7x_2 - 8x_3 &= 2, \\ 5x_1 - 6x_2 + 7x_3 &= -3. \end{aligned}$

6.2.10. Najděte matici X, která splňuje rovnici

a) $AX + 2B = 2X + C$, když $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$,

b) $XA + 2C = 2X + B$, když $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

6.2.11. Matice G má navzájem kolmé sloupce, matice H řádky. Využijte toho a bez počítání napište inverzní matice (násobte matici a matici k ní transponovanou v takovém pořadí, že výsledek je matice diagonální):

a) $G = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -6 & 1 & 4 \\ 6 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, b) $H = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 4 \\ 3 & 6 & -6 \end{pmatrix}$.

6.2.12. Matice A je dána jako součin matic $A = V\,D\,V^{-1}$, v němž matice V a D jsou dány.

a) Zjednodušte k-tou mocninu matice A, tj. matici A^k, k přirozené číslo.

b) Najděte vyjádření mocniny A^k v případě, že D je diagonální matice s elementy $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ na diagonále, kterou označujeme $\operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.

6.3. Vlastní vektory

6.3.1. POZNÁMKA. Pokud vektor $\vec{v}$ vydáváme za pravý vlastní vektor matice A řádu n, který přísluší vlastnímu číslu λ, vždy se přesvědčíme, že platí $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$. Součinem $A\vec{v}$ rozumíme součin matice A a sloupcového vektoru $\vec{v}$, který ztotožňujeme s maticí typu $(n, 1)$. Samozřejmě, je-li vektor $\vec{v}$ vlastním vektorem matice A, je také jeho každý nenulový násobek vlastním vektorem matice A, speciálně vektor opačný $-\vec{v}$.

6.3.2. Najděte vlastní čísla a pravé vlastní vektory matic (poslední úloha ukazuje, že matice s reálnými prvky nemusí mít vlastní čísla reálná):

a) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} 7 & 6 \\ -9 & -8 \end{pmatrix}$, d) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

6.3.3. Vlastní čísla symetrických matic s reálnými prvky jsou čísla reálná. Dokažte to pro matici

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix},$$

v níž parametry a, b, c jsou reálná čísla.

6.3.4. Najděte vlastní čísla (jedno z nich je nulové) a příslušné pravé vlastní vektory matic:

a) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 3 & -3 & 7 \\ -2 & 2 & -5 \\ -2 & 2 & -5 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} -2 & -3 & 3 \\ -6 & -8 & 8 \\ -6 & -9 & 9 \end{pmatrix}$, d) $\begin{pmatrix} 2 & 7 & -9 \\ 1 & -4 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

6.3.5. Najděte hodnotu parametru t tak, že nula je vlastním číslem dané matice; potom spočítejte i ostatní vlastní čísla a ke každému určete příslušný pravý vlastní vektor:

a) $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -5 & t & 1 \\ -7 & -5 & 3 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} -3 & -2 & -5 \\ 1 & 0 & 1 \\ t & 2 & 4 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 2 & t & -2 \\ 21 & 36 & -6 \end{pmatrix}$, d) $\begin{pmatrix} 4 & 2 & -10 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & t \end{pmatrix}$.

6.3.6. Všechna vlastní čísla matic v tomto cvičení jsou nenulová. Dojdete-li při jejich hledání k polynomu třetího stupně, budete muset jedno vlastní číslo uhodnout. To půjde lehko, neboť všechna jsou celá čísla blízká nule. Najděte vlastní čísla a příslušné pravé vlastní vektory matic:

a) $\begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} -5 & 4 & 2 \\ -3 & 2 & 2 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$, d) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 3 & -3 & -1 \end{pmatrix}$.

6.3.7. Pro matici A řádu n je $\det(\lambda I - A)$ polynom stupně n. Proto musí mít každá matice tolik vlastních čísel, kolik je její řád. Některá vlastní čísla mohou být vícenásobná. Jaké jsou vlastní vektory a příslušná vlastní čísla

a) matice jednotkové řádu n, b) matice nulové řádu n?

6.3.8. Dosud jsme se kromě matice jednotkové a nulové setkávali pouze s maticemi, jejichž vlastní čísla byla navzájem různá. Platí toto důležité tvrzení:

> Jestliže čtvercová matice má n navzájem různých vlastních čísel $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, pak příslušné vlastní vektory $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ jsou lineárně nezávislé.

V případě, kdy se několik vlastních čísel shoduje, může být situace komplikovaná a nemůžeme ji rozebírat. Jaká jsou vlastní čísla a kolik příslušných vlastních vektorů najdeme pro matice

a) $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$?

6.3.9. Jaký význam mají vlastní čísla a příslušné vlastní vektory, uvidíme v tomto posledním cvičení. Je dána matice

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 6 \\ -2 & -3 & -2 \\ -8 & -2 & -6 \end{pmatrix}.$$

Spočítejte vlastní čísla λ_j a příslušné pravé vlastní vektory $\vec{v}_j$ pro $j = 1, 2, 3$. Sestavte matici V tak, že její j-tý sloupec bude tvořit sloupcový pravý vlastní vektor $\vec{v}_j$. Poněvadž vlastní čísla jsou různá, matice V je regulární, a proto můžete spočítat matici V^{-1}. Konečně sestavíme diagonální matici $\operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, v níž na místě (j, j) je vlastní číslo λ_j. Spočítejte matici $B = V \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)\, V^{-1}$. Poněvadž se při správném výpočtu ukáže, že tato matice B se rovná matici A, dostáváme pro matici A vyjádření ve tvaru

$$A = V \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)\, V^{-1}.$$

To je podle cvičení 6.2.12 výhodný tvar pro počítání mocnin matice A. To by ovšem nebyla velká výhra, protože vyjádřit matici v tomto tvaru je pracné; tento tvar je důležitý proto, že ukazuje najednou charakter všech mocnin A^k matice A pro libovolné $k = 1, 2, 3, \dots$.

Řešení.

6.1.1. **a)** $(x_1, x_2, x_3) = (1, 2, -2)$, **b)** $(x, y, z) = (1, 1, 3)$, **c)** $(y_1, y_2, y_3) = (2, -2, 3)$, **d)** řešení může být zapsáno například ve tvaru $(x_1, x_2, x_3) = (1, 0, 0) + (0, 1, 1)\,t$, kde t je parametr, **e)** např. $(x_1, x_2, x_3) = (1, 1, 1) + (2, 1, 2)\,t$, **f)** např. $(x_1, x_2, x_3) = (2, 1, 0) + (1, 0, -1)\,t$, **g)** $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, -1, 2, -1)$, **h)** např. $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-2, 1, 1, 1)\,t$, **i)** např. $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (1, 0, -1, 0, 0) + (1, 1, 1, -4, 0)\,s + (1, 1, 1, 0, -4)\,t$, s, t parametry, **j)** např. $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (-1, 1, 0, 0, 0) + (3, 0, -1, 0, 0)\,r + (0, 2, 0, -1, 0)\,s + (2, 0, 0, 0, -1)\,t$, r, s, t parametry.

6.1.2. **a)** najdeme tři lineárně nezávislé vektory, jejichž lineární kombinací se dá každý kolmý vektor vyjádřit, např. $(1, 2, 0, 0, -5)$, $(0, 1, 0, -1, 0)$, $(7, -1, -5, 0, 0)$; proto libovolný kolmý vektor $\vec{x}$ splňuje $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = t_1\,(1, 2, 0, 0, -5) + t_2\,(0, 1, 0, -1, 0) + t_3\,(7, -1, -5, 0, 0)$, t_j jsou parametry, **b)** najdeme čtyři lineárně nezávislé vektory, jejichž lineární kombinací se dá každý kolmý vektor vyjádřit, např. $(1, 1, 0, 0, 0)$, $(1, 0, -1, 0, 0)$, $(1, 0, 0, 1, 0)$, $(1, 0, 0, 0, -1)$, **c)** najdeme tři lineárně nezávislé vektory, jejichž lineární kombinací se dá každý kolmý vektor vyjádřit, např. $(1, 2, 0, 0, 1)$, $(1, 3, 0, -1, 0)$, $(3, 2, -1, 0, 0)$; (zadané tři vektory splňují $\vec{a}_1 = 2\vec{a}_2 - 3\vec{a}_3$, a jsou proto lineárně závislé).

6.1.3. **a)** Pro $\xi = -1$ platí $\vec{w} = 3\vec{u} - 4\vec{v}$, **b)** pro $\xi = 6$ platí $\vec{c} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$, **c)** taková hodnota ξ neexistuje. **6.1.5.** **a)** Ano, $2\vec{a} + \vec{b} - \vec{c} - \vec{d} = \vec{0}$, **b)** ano, $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c} - \vec{d} = \vec{0}$, **c)** ne, **d)** ano, $\vec{a} + 3\vec{b} - \vec{c} - \vec{d} = \vec{0}$.

6.1.6. a) $\vec{a} = 2\vec{b} - 3\vec{c} + 8\vec{d}$, b) $\vec{a} + \vec{b} = 5(\vec{c} + \vec{d})$. **6.1.7.** a) Pro $d \neq 0$ je hodnost 4, pro $d = 0$ je 3, b) hodnost je 3, c) hodnost je 3. **6.1.8.** a) $X^T = (A + A^T)^T = A^T + (A^T)^T = A^T + A = A + A^T = X$, $Y^T = (A - A^T)^T = A^T - (A^T)^T = A^T - A = -(A - A^T) = -Y$. b) Matice $X = A + A^T$ je symetrická a matice $Y = A - A^T$ je antisymetrická. Přitom $A = \frac{1}{2}(X + Y)$.

d) $$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \ A_2 = \begin{pmatrix} 9 & 1 & 4 \\ 1 & 8 & 4 \\ 4 & 4 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 2 & 0 & -9 \\ 2 & 9 & 0 \end{pmatrix}.$$

6.1.9. $F(\vec{a})\,\vec{b} = \vec{a} \times \vec{b}$, kde vektorový součin $\vec{a} \times \vec{b}$ chápeme jako sloupcový vektor, tj. matici typu $(3, 1)$. **6.1.11.** První řádek matice BA je součtem všech řádků matice A, pro $j > 1$ je j-tý řádek matice BA roven j-tému řádku matice A. V případě matice CA je její j-tý řádek součtem řádku j-tého a k-tého matice A, ostatní řádky matice CA se shodují s příslušnými řádky matice A.

6.1.12. a) $$P_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \ P_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \ P_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

b) $P_1 + P_2 + P_3 = I$, $P_1^2 = P_1$, $P_2^2 = P_2$, $P_3^2 = P_3$, pro $j \neq k$ jsou matice $P_j P_k$ nulové.

c) $$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 7 \\ -2 & 5 & -8 \\ -2 & 3 & -6 \end{pmatrix}.$$ e) Pro každé j je $V_j^T W_j = W_j^T V_j = (1)$. To je matice typu $(1, 1)$, tedy skalár. Pro $j \neq k$ je $V_j^T W_k = W_j^T V_k = (0)$. **6.1.13.** Vzhledem k předpokladům na vektory $\vec{f_1}$ a $\vec{f_2}$ platí, že složky β_1, β_2 vektoru $\vec{f_2}$ se dají vyjádřit pomocí složek α_1, α_2 vektoru $\vec{f_1}$ takto: $(\beta_1, \beta_2) = \kappa(\alpha_2, -\alpha_1)$, kde $\kappa = \pm 1$, proto $Q = (a + d)$. **6.1.14.** a) $$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \alpha^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$ A^k je nulová matice pro $k > 3$, b) $$B^k = \begin{pmatrix} 1 & \binom{k}{1} & \binom{k}{2} & \binom{k}{3} \\ 0 & 1 & \binom{k}{1} & \binom{k}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \binom{k}{1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

6.2.1. a) -2, b) 5, c) $a^2 + b^2$, d) $x^2 + 1$, e) -64, f) -30, g) -63, h) -13, i) 0, j) $3a^2 - 3b^2 - 8a + 10b$, k) $xy(x - 1)(y - 1)(y - x)$, l) $a^2 + 3b^2 - 10ab + 10a - 4b$, m) $\frac{13}{5}$, n) $-\frac{11}{8}$, o) 1, p) $-\frac{7}{36}$, q) $a(a - b)(b - c)$, r) $-abc(a - b)(a - c)(b - c)$, s) $2abc - a^2 - b^2 - c^2 + 1$, t) 0. **6.2.2.** a) $-\alpha\beta\gamma\delta$, b) 60, c) 146, d) 16, e) $2(abc - ab - ac - bc + a + b + c - 1)$, f) 0, g) $a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac - 2bc$, h) $(1 - (a + b)^2)(1 + (a - b)^2) = -(a^4 + b^4 - 2a^2b^2 + 4ab - 1)$. **6.2.3.** Násobte j-tý řádek x_j a převrácenou hodnotu x_j napište před determinant pro každé $j = 1, 2, 3$. Potom se zaměřte na první sloupec. **6.2.4.** a) $(x + y + z)^3$, b) $abcd + abc + abd + acd + bcd$.

6.2.6. a) $$\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -6 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$ b) $$\frac{1}{7}\begin{pmatrix} -21 & -47 & 22 \\ 0 & -3 & 2 \\ -14 & -33 & 15 \end{pmatrix},$$ c) $$\frac{1}{32}\begin{pmatrix} 7 & -2 & 3 \\ 4 & -8 & 4 \\ -19 & 10 & 1 \end{pmatrix},$$

d) $$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$ **6.2.7.** a) Pro $a^2 + b^2 - ab \neq 0$, tj. pro $(a, b) \neq (0, 0)$, je

$$A^{-1} = \frac{1}{a^2 + b^2 - ab}\begin{pmatrix} a - b & -b \\ b & a \end{pmatrix},$$ b) pro $a \neq 0$ je $$B^{-1} = \frac{1}{a^3}\begin{pmatrix} a^2 - 1 & -a & 1 \\ a & a^2 & -a \\ -1 & -a & a^2 + 1 \end{pmatrix},$$

c) pro $a \neq -2$ je $C^{-1} = \dfrac{1}{a+2}\begin{pmatrix} a & -a & 2 \\ 1 & a+1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. **6.2.8.** Pro hodnoty $u = 1, v = -1, w = 1$ jsou matice inverzní. Při řešení je nejlepší vyjít ze vztahu $BA = I$.

6.2.9. a) $(x_1, x_2, x_3) = (-1, 1, 1)$, **b)** $(x_1, x_2, x_3) = (3, -1, -2)$, **c)** $(x_1, x_2, x_3) = (-3, 5, 6)$.

6.2.10. a) $X = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$, **b)** $X = \begin{pmatrix} -7 & 9 \\ 7 & -10 \end{pmatrix}$.

6.2.11. a) Pro součin $G^T G$ platí $G^T G = \begin{pmatrix} 81 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 36 \end{pmatrix}$. Proto první řádek transponované matice dělíme 81, druhý 9 a třetí 36. Inverzní matice má tedy tvar $G^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{27} & -\frac{2}{27} & \frac{2}{27} \\ -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{18} \end{pmatrix}$.

b) Pro součin HH^T platí $HH^T = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 36 & 0 \\ 0 & 0 & 81 \end{pmatrix}$. Proto první sloupec transponované matice dělíme 9, druhý 36 a třetí 81. Inverzní matice má tedy tvar $H^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{27} \\ \frac{2}{9} & \frac{1}{18} & \frac{2}{27} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{2}{27} \end{pmatrix}$.

6.2.12. a) $A^k = V D^k V^{-1}$. **b)** $A^k = V \operatorname{diag}(\lambda_1^k, \ldots, \lambda_n^k) V^{-1}$.

6.3.2. a) $\lambda_1 = 1, \vec{v}_1 = (3, 1), \lambda_2 = -1, \vec{v}_2 = (1, 1)$, **b)** $\lambda_1 = 1, \vec{v}_1 = (1, 1), \lambda_2 = -3, \vec{v}_2 = (1, 3)$,
c) $\lambda_1 = 1, \vec{v}_1 = (1, -1), \lambda_2 = -2, \vec{v}_2 = (2, -3)$, **d)** $\lambda_1 = \mathrm{i}, \vec{v}_1 = (1, -\mathrm{i}), \lambda_2 = -\mathrm{i}, \vec{v}_2 = (1, \mathrm{i})$.

6.3.4. a) $\lambda_1 = 0, \vec{v}_1 = (1, 1, 1), \lambda_2 = 1, \vec{v}_2 = (0, 1, 1), \lambda_3 = -1, \vec{v}_3 = (1, 1, 0)$,
b) $\lambda_1 = 0, \vec{v}_1 = (1, 1, 0), \lambda_2 = 1, \vec{v}_2 = (2, -1, -1), \lambda_3 = -1, \vec{v}_3 = (1, -1, -1)$,
c) $\lambda_1 = 0, \vec{v}_1 = (0, 1, 1), \lambda_2 = 1, \vec{v}_2 = (1, 2, 3), \lambda_3 = -2, \vec{v}_3 = (1, 3, 3)$,
d) $\lambda_1 = 0, \vec{v}_1 = (1, 1, 1), \lambda_2 = 1, \vec{v}_2 = (2, 1, 1), \lambda_3 = -3, \vec{v}_3 = (1, -2, -1)$.

6.3.5. a) $t = -3, \lambda_1 = 0, \vec{v}_1 = (1, -2, -1), \lambda_2 = 1, \vec{v}_2 = (1, -1, 1), \lambda_3 = -2, \vec{v}_3 = (0, 1, 1)$,
b) $t = 2, \lambda_1 = 0, \vec{v}_1 = (1, 1, -1), \lambda_2 = 2, \vec{v}_2 = (1, 0, -1), \lambda_3 = -1, \vec{v}_3 = (1, -1, 0)$,
c) $t = 7, \lambda_1 = 0, \vec{v}_1 = (2, -2, -5), \lambda_2 = 3, \vec{v}_2 = (3, -2, -1), \lambda_3 = -1, \vec{v}_3 = (1, -1, -3)$,
d) $t = -3, \lambda_1 = 0, \vec{v}_1 = (2, 1, 1), \lambda_2 = 2, \vec{v}_2 = (1, -1, 0), \lambda_3 = -1, \vec{v}_3 = (2, 0, 1)$.

6.3.6. a) $\lambda_1 = -1, \vec{v}_1 = (2, 0, 1), \lambda_2 = 1, \vec{v}_2 = (2, 1, 2), \lambda_3 = 2, \vec{v}_3 = (1, 1, 1)$,
b) $\lambda_1 = -2, \vec{v}_1 = (2, 1, 1), \lambda_2 = -1, \vec{v}_2 = (1, 1, 0), \lambda_3 = 1, \vec{v}_3 = (1, 1, 1)$,
c) $\lambda_1 = -1, \vec{v}_1 = (1, 0, 1), \lambda_2 = 1, \vec{v}_2 = (1, 1, 1), \lambda_3 = 2, \vec{v}_3 = (0, 2, 1)$,
d) $\lambda_1 = -2, \vec{v}_1 = (1, 1, 0), \lambda_2 = -1, \vec{v}_2 = (1, 1, 1), \lambda_3 = 2, \vec{v}_3 = (1, 0, 1)$.

6.3.7. a) $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 1$, každý nenulový vektor je vlastním vektorem, **b)** $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$, každý nenulový vektor je vlastním vektorem.

6.3.8. a) $\lambda_1 = 5$ s vlastním vektorem $\vec{v}_1 = (1, 0, 0)$; pro zbývající dvojnásobné vlastní číslo $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$ se najde pouze jeden vlastní vektor $\vec{v}_2 = \vec{v}_3 = (0, 1, 0)$, **b)** pro trojnásobné vlastní číslo $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$ je k dispozici pouze jeden vlastní vektor $\vec{v}_1 = \vec{v}_2 = \vec{v}_3 = (1, 0, 0)$.

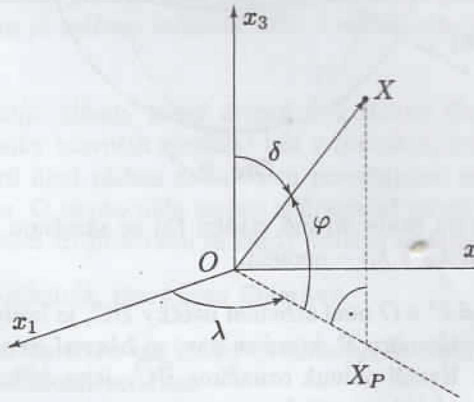
6.3.9. Vlastní čísla jsou $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = -2$. Matice V, $\operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ a V^{-1} mají tvar

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \ \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \ V^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

GEOGRAFICKÉ APLIKACE

7.1. Sférické souřadnice a vzdálenost bodů na kulové ploše

7.1.1. V E^3 je dána kartézská (pravotočivá) souřadná soustava s počátkem O a osami x_1, x_2, x_3. Bod X je obecný bod z E^3 se souřadnicemi (x_1, x_2, x_3). Kolmý průmět bodu X do roviny obsahující osy x_1 a x_2 označíme X_P, souřadnice tohoto bodu jsou $(x_1, x_2, 0)$. Úhly φ a λ chápeme jako orientované; kladná orientace je vyznačena na obrázku 1.



Obr. 1.

Úhly φ a λ budeme brát takové, že

$$\varphi \in \langle -\tfrac{1}{2}\pi, \tfrac{1}{2}\pi \rangle, \quad \lambda \in (-\pi, \pi\rangle\,. \tag{1}$$

Označíme R vzdálenost bodu X od počátku O souřadné soustavy, tj. $R = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$. Trojici čísel (R, φ, λ) nazýváme sférickými souřadnicemi bodu X. Kartézské souřadnice (x_1, x_2, x_3) lze vyjádřit pomocí sférických souřadnic (R, φ, λ) těmito vztahy:

$$\begin{aligned} x_1 &= R\cos\varphi\,\cos\lambda\,,\\ x_2 &= R\cos\varphi\,\sin\lambda\,,\\ x_3 &= R\sin\varphi\,. \end{aligned} \tag{2}$$

Pro které body X jsou trojice souřadnic (R, φ, λ) splňující (1) určeny jednoznačně?

7.1.2. Sféru s poloměrem R a se středem O označíme σ_R. O bodech $P_S = (0, 0, R)$ a $P_J = (0, 0, -R)$ na sféře σ_R mluvíme jako o pólech. Na sféře σ_R vezmeme dále dva libovolné body B a C různé od pólů. Ty jsou určeny dvojicemi souřadnic (φ_B, λ_B) a (φ_C, λ_C). Pro souřadnice vektorů $\overrightarrow{OB}$ a $\overrightarrow{OC}$ platí

$$\begin{aligned} x_1^B &= R\cos\varphi_B\,\cos\lambda_B\,, & x_1^C &= R\cos\varphi_C\,\cos\lambda_C\,,\\ x_2^B &= R\cos\varphi_B\,\sin\lambda_B\,, & x_2^C &= R\cos\varphi_C\,\sin\lambda_C\,,\\ x_3^B &= R\sin\varphi_B\,, & x_3^C &= R\sin\varphi_C\,. \end{aligned} \tag{3}$$

Situace je ilustrována na obrázku 2. Vyznačte příslušné úhly φ_B, λ_B, φ_C, λ_C.

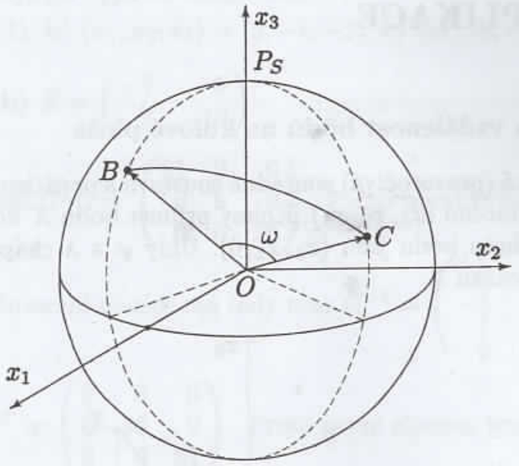
7.1.3. Zajímáme se o velikost úhlu ω, který svírají vektory $\overrightarrow{OB}$ a $\overrightarrow{OC}$. Úhel leží v intervalu $\langle 0, \pi\rangle$ a jeho kosinus splňuje vztah

$$\cos\omega = \frac{\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}}{|\overrightarrow{OB}||\overrightarrow{OC}|} \tag{4}$$

Dosadíme za vektory jejich vyjádření ze (3) a po snadné úpravě získáme

$$\cos\omega = \sin\varphi_B \sin\varphi_C + \cos\varphi_B \cos\varphi_C \cos(\lambda_B - \lambda_C)\,. \tag{5}$$

Proveďte detailně úpravy vedoucí k (5).



Obr. 2.

7.1.4. Povšimněte si, že výraz na pravé straně vztahu (5) se záměnou bodů B a C – tedy vzájemnou výměnou úhlu φ_B s úhlem φ_C a λ_B s λ_C – nemění.

7.1.5. Poznámka. Jakmile $B \neq C$ a O není středem úsečky BC, je body BCO určena rovina τ. Průnik roviny τ a sféry σ_R je kružnice poloměru R, která se nazývá **hlavní kružnicí**. Body B a C rozdělí tuto hlavní kružnici na dva oblouky. Kratší oblouk označíme $\widehat{BC}$. Jeho délka je rovna $R\omega$, pokud úhel ω je vyjádřen v radiánech (v obloukové úhlové míře).

7.1.6. V jakém intervalu se pohybují veličiny $\varphi_B + \varphi_C$, $\varphi_B - \varphi_C$ a $|\varphi_B - \varphi_C|$, pokud se body B a C pohybují po sféře σ_R včetně pólů?

7.1.7. Jaký interval vyplňují hodnoty $\lambda_B - \lambda_C$ a $|\lambda_B - \lambda_C|$, když body B a C probíhají sféru σ_R?

7.1.8. Vezmeme bod B s $\lambda_B = -\frac{1}{2}\pi$ a $\varphi_B = 0$ a bod C s $\lambda_C = \pi$ a $\varphi_C = 0$. Kolik je $\lambda_B - \lambda_C$ a kolik je $|\lambda_B - \lambda_C|$? Kolik je $\cos\omega$? Čemu se rovná ω? Srovnejte s výsledkem následující úlohy.

7.1.9. Vezmeme bod B s $\varphi_B = 0$ a bod C s $\varphi_C = 0$. Kolik je $\cos\omega$? Vyjádřete ω pomocí λ_B a λ_C.

7.1.10. Najděte ω výpočtem ze vztahu (5) v těchto případech (a potom objasněte geometricky):

a) $\lambda_B = \lambda_C\,,$ b) $|\lambda_B - \lambda_C| = \pi\,.$

7.1.11. Dokažte, že pokud body B a C mají stejnou zeměpisnou šířku φ, splňuje úhel ω vztah

$$\sin\frac{\omega}{2} = \cos\varphi \sin\frac{|\lambda_B - \lambda_C|}{2}\,.$$

Řešení. **7.1.1.** Pro každý bod $X = (x_1, x_2, x_3)$, pro který platí $x_1^2 + x_2^2 > 0$. **7.1.6.** $\langle -\pi, \pi\rangle$, $\langle -\pi, \pi\rangle$ a $\langle 0, \pi\rangle$. **7.1.7.** $(-2\pi, 2\pi)$ a $\langle 0, 2\pi)$. **7.1.8.** $\lambda_B - \lambda_C = -\frac{3}{2}\pi$, $|\lambda_B - \lambda_C| = \frac{3}{2}\pi$, $\cos\omega = 0$, $\omega = \frac{1}{2}\pi$. **7.1.9.** Poněvadž $\cos\omega = \cos(\lambda_B - \lambda_C) = \cos|\lambda_B - \lambda_C| = \cos(2\pi - |\lambda_B - \lambda_C|)$, dostáváme odsud vztahy pro ω, které závisí na velikosti $|\lambda_B - \lambda_C|$. Pro $|\lambda_B - \lambda_C| \leq \pi$ je $\omega = |\lambda_B - \lambda_C|$, pro $|\lambda_B - \lambda_C| > \pi$ je $\omega = 2\pi - |\lambda_B - \lambda_C|$. **7.1.10. a)** $\omega = |\varphi_B - \varphi_C|$, neboť potom $\cos\omega = \cos(\varphi_B - \varphi_C) = \cos|\varphi_B - \varphi_C|$ a přitom $0 \leq |\varphi_B - \varphi_C| \leq \pi$, **b)** $\omega = \pi - |\varphi_B + \varphi_C|$, neboť nyní $\cos\omega = -\cos(\varphi_B + \varphi_C) = -\cos|\varphi_B + \varphi_C| = \cos(\pi - |\varphi_B + \varphi_C|)$ a přitom $0 \leq \pi - |\varphi_B + \varphi_C| \leq \pi$.

7.1.11. Použije se vztahu $\cos\omega = 1 - 2\sin^2\frac{\omega}{2}$ a vztahu $\cos(\lambda_B - \lambda_C) = 1 - 2\sin^2\frac{\lambda_B-\lambda_C}{2}$ pro úpravu příslušných výrazů v relaci $\cos\omega = \sin^2\varphi + \cos^2\varphi\cos(\lambda_B - \lambda_C)$, kterou dostaneme, když v (5) budeme místo φ_B a φ_C psát φ. Jednoduchou úpravou dostaneme výraz, jehož odmocněním získáme hledaný vztah.

7.2. Eulerův sférický trojúhelník, kosinová věta pro stranu a pro úhel

7.2.1. POZNÁMKA. Trojúhelník na kulové ploše (sféře) nazýváme **sférickým**, jestliže jeho strany jsou tvořeny oblouky hlavních kružnic. Pokud délky těchto oblouků jsou menší než πR, kde R je poloměr sféry, mluvíme o **Eulerově sférickém trojúhelníku**.

Aby úvahy nebyly závislé na poloměru sféry, která je z hlediska obecných úvah pouze parametrem, za délku strany v Eulerově sférickém trojúhelníku se označuje příslušný úhel průvodičů koncových bodů oblouku tvořícího stranu. Je to totéž, jako bychom pracovali na sféře s poloměrem jedna. Důsledkem toho, že strana sférického trojúhelníku je měřena velikostí úhlu v radiánech, je, že strany Eulerova sférického trojúhelníku jsou menší než π.

7.2.2. POZNÁMKA. Co rozumíme úhlem, který svírají dvě strany Eulerova sférického trojúhelníku? Každé dvě strany (jakožto oblouky hlavních kružnic) leží v rovinách, jejichž průniky se sférou vytvářejí příslušné hlavní kružnice. Právě úhel těchto dvou rovin považujeme za úhel svíraný dvěma stranami Eulerova sférického trojúhelníku. O tomto úhlu se pro zdůraznění mluví jako o vnitřním úhlu sférického trojúhelníku. V Eulerově sférickém trojúhelníku je každý vnitřní úhel menší než π.

7.2.3. Jak vypadá sférický trojúhelník, který není Eulerův?

7.2.4. Pro popis polohy bodu na sféře lze místo dvojice (φ, λ) použít dvojice (δ, λ), kde úhel δ je tzv. doplňkový úhel, který je definován vztahem

$$\delta = \tfrac{1}{2}\pi - \varphi\,. \tag{6}$$

Poněvadž $\varphi \in \langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\rangle$, úhel δ splňuje $\delta \in \langle 0, \pi\rangle$. Na obrázku 2 vyznačte úhly δ_B a δ_C a s pomocí (2) odvoďte, že souřadnice (x_1, x_2, x_3) a (R, δ, λ) bodu sféry jsou svázány vztahy

$$\begin{aligned} x_1 &= R\sin\delta\,\cos\lambda\,,\\ x_2 &= R\sin\delta\,\sin\lambda\,,\\ x_3 &= R\cos\delta\,. \end{aligned} \tag{7}$$

7.2.5. POZNÁMKA. Pro úvahy o obecném Eulerově sférickém trojúhelníku ABC je výhodné trojúhelník speciálně usadit na sféru. V terminologii geografické přesuneme bod A do severního pólu a bod B se souřadnicemi (δ_B, λ_B) na oblouk, který tvoří greenwichský poledník. Potom souřadnice λ_B bude splňovat $\lambda_B = 0$. Můžeme dokonce předpokládat, že $\lambda_C > 0$ prostě proto, že bychom v případě $\lambda_C < 0$ označení bodů B a C vzájemně vyměnili. Je zřejmé, že při popsaném umístění bodů A, B, C platí pro kartézské souřadnice vektorů $\overrightarrow{OB}$ a $\overrightarrow{OC}$ tyto relace

$$\begin{aligned} x_1^B &= R\sin\delta_B\,, & x_1^C &= R\sin\delta_C\,\cos\lambda_C\,,\\ x_2^B &= 0\,, & x_2^C &= R\sin\delta_C\,\sin\lambda_C\,,\\ x_3^B &= R\cos\delta_B\,, & x_3^C &= R\cos\delta_C\,. \end{aligned} \tag{8}$$

Úhel ω, který svírají vektory $\overrightarrow{OB}$ a $\overrightarrow{OC}$ (a který je v terminologii sférické trigonometrie považován za stranu a Eulerova sférického trojúhelníku), splňuje (vzorec (4))

$$\cos\omega = \frac{\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}}{|\overrightarrow{OB}||\overrightarrow{OC}|}\,.$$

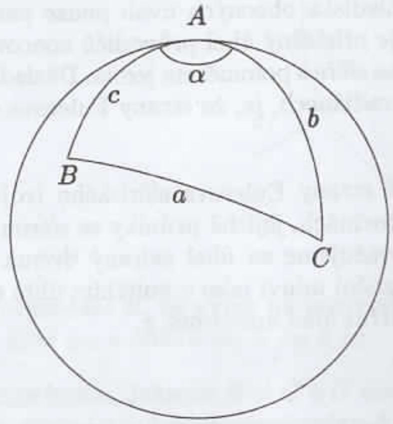
Ukažte, že po výměně ω za a a po dosazení z (8) dostaneme vztah

$$\cos a = \cos\delta_B\cos\delta_C + \sin\delta_B\sin\delta_C\cos\lambda_C\,. \tag{9}$$

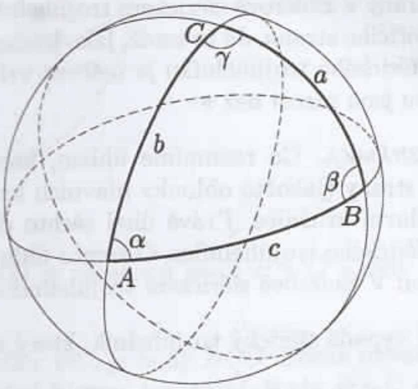
7.2.6. Na obrázku 3 a obrázku 2 doplněném o označení úhlů, vidíme, že oblouku $\widehat{AB}$, který představuje stranu c, přísluší úhel δ_B a oblouku $\widehat{AC}$, který je stranou b, přísluší úhel δ_C. Úhel α u vrcholu A je za našich předpokladů na umístění bodu B roven úhlu λ_C. Je to úhel svíraný rovinami, na kterých leží strany b a c. Nyní můžeme zapsat vztah (9) pomocí veličin a, b, c a α popisujících Eulerův sférický trojúhelník ABC. Odvoďte, že platí

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha\,. \tag{10}$$

Tento vztah se nazývá **kosinová věta pro stranu** a Eulerova sférického trojúhelníku. Vztah (10) jsme odvodili pro případ, kdy sférický trojúhelník je umístěn jako na obrázku 3, kde bod A byl posazen do severního pólu. Samotný vztah (10) však už nenese žádné stopy po souřadném systému, který jsme použili k jeho odvození. Platí tedy i v obecné situaci, kdy bod A už nemusí být situován do severního pólu, ale je – stejně jako celý sférický trojúhelník – umístěn na sféře libovolně.



Obr. 3.



Obr. 4.

Obecným umístěním míníme případ, který může vypadat jako na obrázku 4. Tam jsou body a úhly trojúhelníku ABC označeny tak, jak jsme zvyklí z rovinné geometrie.

7.2.7. Cyklickou záměnou ve formuli (10) napište tvar kosinové věty sférické trigonometrie pro strany b a c.

7.2.8. Polární zobrazení Eulerova sférického trojúhelníku. Eulerův sférický trojúhelník je dán svými vrcholy. Budeme nyní definovat zobrazení, které danému trojúhelníku ABC přiřadí jiný trojúhelník $\tilde{A}\tilde{B}\tilde{C}$, o kterém se mluví jako o polárním trojúhelníku.

Strana c trojúhelníku ABC – kratší z oblouků hlavní kružnice s koncovými body A, B – leží v rovině τ_c, která prochází středem sféry. Rovina τ_c rozdělí prostor na dva poloprostory. Označíme T_c^- ten z poloprostorů, který neobsahuje bod C. Polopřímka vycházející kolmo k rovině τ_c ze středu sféry do poloprostoru T_c^- protne sféru v bodě, který označíme $\tilde{C}$. Podobně, když vyjdeme ze strany b (resp. a), definujeme body $\tilde{B}$ (resp. $\tilde{A}$). Tím je trojúhelníku ABC přiřazen trojúhelník $\tilde{A}\tilde{B}\tilde{C}$. Jeho strany jsou označovány $\tilde{a}$, $\tilde{b}$, $\tilde{c}$ a úhly $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$, $\tilde{\gamma}$.

7.2.9. Eulerův sférický trojúhelník ABC umístíme „osvědčeným" způsobem tak, že bod A bude v severním pólu. Rozmyslete si, že vrcholy $\tilde{B}$, $\tilde{C}$ trojúhelníku $\tilde{A}\tilde{B}\tilde{C}$ leží na rovníku a bod $\tilde{A}$ leží na „jižní" polosféře. Ukažte, že pro stranu $\tilde{a}$ trojúhelníku $\tilde{A}\tilde{B}\tilde{C}$ platí $\tilde{a} = \pi - \alpha$. Závěr této úvahy platí obecně: strany polárního trojúhelníku $\tilde{A}\tilde{B}\tilde{C}$ splňují

$$\tilde{a} = \pi - \alpha\,, \quad \tilde{b} = \pi - \beta\,, \quad \tilde{c} = \pi - \gamma\,. \tag{11}$$

7.2.10. Stejně jako jsme vytvořili polární trojúhleník ke sférickému trojúhelníku ABC, můžeme pokračovat a přiřadit polární trojúhelník ke trojúhelníku $\tilde{A}\tilde{B}\tilde{C}$. Ten je určen vrcholy $\tilde{\tilde{A}}$, $\tilde{\tilde{B}}$ a $\tilde{\tilde{C}}$. Jeho strany označme $\tilde{\tilde{a}}$, $\tilde{\tilde{b}}$, $\tilde{\tilde{c}}$ a úhly $\tilde{\tilde{\alpha}}$, $\tilde{\tilde{\beta}}$, $\tilde{\tilde{\gamma}}$. Podle (11), pouze s jednou vlnkou navíc, dostáváme

$$\tilde{\tilde{a}} = \pi - \tilde{\alpha}\,, \quad \tilde{\tilde{b}} = \pi - \tilde{\beta}\,, \quad \tilde{\tilde{c}} = \pi - \tilde{\gamma}\,. \tag{12}$$

7.2.11. Uvažujme opět o situaci, kdy bod A je v severním pólu. Viděli jsme v 7.2.9, že body $\tilde{B}$ a $\tilde{C}$ trojúhelníku $\tilde{A}\tilde{B}\tilde{C}$ (tedy strana $\tilde{a}$ tohoto trojúhelníku) leží na rovníku. A poněvadž bod $\tilde{A}$ leží na „jižní" polosféře, lehko nahlédneme, že bod $\tilde{\tilde{A}}$ musí být totožný s bodem A. Tento závěr platí pro všechny strany trojúhelníku $\tilde{A}\tilde{B}\tilde{C}$, nejen pro stranu $\tilde{a}$. Proto je sférický trojúhelník $\tilde{\tilde{A}}\tilde{\tilde{B}}\tilde{\tilde{C}}$, který je polárním trojúhelníkem k $\tilde{A}\tilde{B}\tilde{C}$, vlastně původním trojúhelníkem ABC. Tím vztahy (12) mezi elementy trojúhelníku a trojúhelníku k němu polárního získávají tuto podobu:

$$a = \pi - \tilde{\alpha}\,, \quad b = \pi - \tilde{\beta}\,, \quad c = \pi - \tilde{\gamma}\,. \tag{13}$$

Nyní napíšeme kosinovou větu pro polární trojúhelník $\tilde{A}\tilde{B}\tilde{C}$

$$\cos\tilde{a} = \cos\tilde{b}\cos\tilde{c} + \sin\tilde{b}\sin\tilde{c}\cos\tilde{\alpha}$$

a použijeme vztahů (11) a prvního vztahu ve (13) k náhradě vlnkovaných veličin. Ukažte, že se tím předcházející formule změní na

$$\cos\alpha = -\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos a\,. \tag{14}$$

Tento vztah se nazývá **kosinová věta pro úhel** α. Napište další dva vztahy, které se dostanou ze (14) cyklickou záměnou.

7.2.12. Najděte velikosti všech stran a úhlů těchto Eulerových sférických trojúhelníků:

a) $b = 120°$, $c = 60°$, $\alpha = 30°$, b) $a = 20°$, $b = 30°$, $c = 40°$,

c) $a = 50°$, $\beta = 100°$, $\gamma = 110°$, d) $\alpha = 70°$, $\beta = 50°$, $\gamma = 80°$.

Řešení.

7.2.7. Kosinová věta pro strany b a c má tvar:

$$\cos b = \cos a\cos c + \sin a\sin c\cos\beta\,,$$

$$\cos c = \cos a\cos b + \sin a\sin b\cos\gamma\,.$$

7.2.11. Při odvozování vztahu (14) použijeme identit $\cos(\pi - x) = -\cos x$ a $\sin(\pi - x) = \sin x$. Kosinová věta pro zbývající dva úhly β a γ má tvar:

$$\cos\beta = -\cos\alpha\cos\gamma + \sin\alpha\sin\gamma\cos b\,,$$

$$\cos\gamma = -\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\cos c\,.$$

7.2.12. a) $\beta \doteq 151°48'48''$, $\gamma \doteq 28°11'12''$, $a \doteq 66°27'7''$,

b) $\alpha \doteq 30°43'31''$, $\beta \doteq 48°19'27''$, $\gamma \doteq 106°12'54''$,

c) $\alpha \doteq 57°37'31''$, $b \doteq 116°42'56''$, $c \doteq 121°32'3''$,

d) $a \doteq 53°2'8''$, $b \doteq 40°38'39''$, $c \doteq 56°51'48''$.

7.3. Mercatorovo zobrazení, loxodroma

7.3.1. Začneme jednoduchým zobrazením sféry σ_R do roviny. Jestliže si nevšímáme pólů, je každému bodu na sféře jednoznačně přiřazena dvojice $\varphi \in (-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ a $\lambda \in (-\pi, \pi)$. Vezmeme libovolnou funkci Φ spojitou a rostoucí na intervalu $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$. S její pomocí přiřadíme každému bodu (φ, λ) sféry bod v rovině se souřadnicemi (y, λ) tím, že položíme $y = \Phi(\varphi)$. Osy y, λ umístíme tak, že tvoří levotočivou souřadnou soustavu – na rozdíl od obvyklého systému os x, y, které v tomto pořadí tvoří soustavu pravotočivou. Obraz rovníku (bodů s $\varphi = 0$) je v našem zobrazení rovnoběžný s osou λ. Jaké vlastnosti musí mít funkce Φ, aby obraz rovníku padl na osu λ a aby se dvojice bodů na sféře symetricky umístěných vzhledem k rovníku zobrazila do takových bodů v rovině, které jsou symetricky umístěny vzhledem k ose λ?

7.3.2. Teď odpovíme na otázku, jaké vlastnosti musí mít funkce Φ, aby popsané zobrazení bylo konformní. Z bodu P, který odpovídá (φ, λ), vyrazíme na sféře pod azimutem α do bodu P', jehož souřadnice (φ', λ') jsou „blízké" souřadnicím (φ, λ). To zachytíme zápisem

$$\varphi' = \varphi + \Delta\varphi, \quad \lambda' = \lambda + \Delta\lambda,$$

kde přírůstky souřadnic $\Delta\varphi$ a $\Delta\lambda$ jsou „velmi malé" a jsou svázány vztahem

$$\operatorname{tg}\alpha \doteq \frac{R\cos\varphi\,\Delta\lambda}{R\,\Delta\varphi} = \cos\varphi\,\frac{\Delta\lambda}{\Delta\varphi}, \tag{15}$$

v němž α označuje azimut. Veličina $\operatorname{tg}\alpha$ je uvedeným vztahem aproximována tím přesněji, čím je bod P' blíže bodu P. Později využijeme také vzdálenosti $|PP'|$ těchto blízkých bodů, pro kterou lehko odvodíme vyjádření

$$|PP'|^2 \doteq R^2(\Delta\varphi)^2 + R^2\cos^2\varphi\,(\Delta\lambda)^2 = R^2\Big(1 + \cos^2\varphi\,\Big(\frac{\Delta\lambda}{\Delta\varphi}\Big)^2\Big)\,(\Delta\varphi)^2.$$

Když s pomocí (15) poslední výraz zjednodušíme, dostaneme

$$|PP'|^2 \doteq R^2(1 + \operatorname{tg}^2\alpha)\,(\Delta\varphi)^2 = \frac{R^2}{\cos^2\alpha}\,(\Delta\varphi)^2. \tag{16}$$

Při zobrazení do roviny je obrazem bodu $P = (\varphi, \lambda)$ bod se souřadnicemi (y, λ) a obrazem blízkého bodu $P' = (\varphi', \lambda')$ je bod se souřadnicemi (y', λ'). Označíme-li

$$\Delta y = y' - y,$$

můžeme pro azimut α' směru určeného v rovině body (y, λ) a (y', λ') psát

$$\operatorname{tg}\alpha' = \frac{\Delta\lambda}{\Delta y}. \tag{17}$$

Mají-li se při zobrazení zachovávat úhly, musí platit $\alpha = \alpha'$. To znamená $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\alpha'$. Srovnáním vztahů (15) a (17) dostaneme

$$\cos\varphi\,\frac{\Delta\lambda}{\Delta\varphi} \doteq \frac{\Delta\lambda}{\Delta y}.$$

Krátíme $\Delta\lambda$ a upravíme na tvar

$$\frac{\Delta y}{\Delta\varphi} \doteq \frac{1}{\cos\varphi},$$

který – jak jsme se zmínili – platí tím přesněji, čím je $\Delta\varphi$ blíže k nule. Proto necháme $\Delta\varphi$ konvergovat k nule, čímž poslední přibližný vztah přejde na přesnou relaci

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\varphi} = \frac{1}{\cos\varphi}.$$

Z úlohy 4.2.6 víme, že

$$y(\varphi) = \ln\operatorname{tg}\big(\tfrac{1}{2}\varphi + \tfrac{1}{4}\pi\big) + c.$$

Pokud chceme, aby se rovník $\varphi = 0$ zobrazil na osu $y = 0$, volíme $c = 0$. Dostaneme funkci

$$q(\varphi) = \ln \operatorname{tg}\left(\tfrac{1}{2}\varphi + \tfrac{1}{4}\pi\right),$$

která se nazývá isometrická šířka. Zobrazení sféry do roviny dané vztahem

$$(\varphi, \lambda) \to (y, \lambda) \equiv (q(\varphi), \lambda)$$

nazveme Mercatorovo zobrazení. Toto zobrazení – jak jsme viděli – zachovává úhly. Dokažte, že q je lichá funkce na intervalu $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$, a spočítejte $\lim_{\varphi \to \frac{1}{2}\pi_-} q(\varphi)$, $\lim_{\varphi \to -\frac{1}{2}\pi_+} q(\varphi)$.

7.3.3. Rovnice loxodromy. Loxodroma – křivka, která protíná poledníky stále pod stejným úhlem – se Mercatorovým zobrazením zobrazí na přímku v rovině (y, λ), která svírá s osou y úhel α. Proto rovnice obrazu loxodromy v souřadnicích (y, λ), která prochází bodem (y_0, λ_0), má rovnici

$$\lambda - \lambda_0 = (y - y_0)\, \operatorname{tg}\alpha\,.$$

Dosazením zjistíme, že v geografických souřadnicích (φ, λ) má loxodroma rovnici

$$\lambda - \lambda_0 = \left(\ln \operatorname{tg}\left(\tfrac{1}{2}\varphi + \tfrac{1}{4}\pi\right) - \ln \operatorname{tg}\left(\tfrac{1}{2}\varphi_0 + \tfrac{1}{4}\pi\right)\right) \operatorname{tg}\alpha\,,$$

kde φ_0 a y_0 jsou svázány vztahem $y_0 = q(\varphi_0)$. Jestliže z posledního vztahu vypočítáme proměnnou λ jako funkci $\varphi \in (-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$, zjistíme s pomocí výsledku předcházejícího cvičení, že jakmile se φ dostatečně vzdálí od φ_0, hodnota λ opustí interval $(-\pi, \pi)$, který jsme pro hodnoty λ vyhradili. Vadí to?

7.3.4. Pro $\alpha \in (0, \frac{1}{2}\pi)$ se pro $\varphi \to \frac{1}{2}\pi_-$ pohybujeme po loxodromě k severnímu pólu. Kolikrát je severní pól oběhnut při tomto pohybu po loxodromě?

7.3.5. Napište rovnici loxodromy s azimutem $\alpha \in (0, \frac{1}{2}\pi)$, která protíná rovník v bodě s $\lambda = \lambda_0$.

7.3.6. Délka loxodromy. Odmocněním (16) získáme výraz pro vzdálenost dvou blízkých bodů PP' loxodromy s azimutem α ve tvaru

$$|PP'| = \frac{R}{|\cos\varphi|}\,|\Delta\varphi|\,.$$

Proto vzdálenost bodů $P_1 = (\varphi_1, \lambda_1)$ a $P_2 = (\varphi_2, \lambda_2)$ ležících na loxodromě s azimutem α je rovna

$$\frac{R}{\cos\alpha}\,|\varphi_2 - \varphi_1|\,.$$

7.3.7. Jaká je délka loxodromy s azimutem α mezi rovníkem a pólem?

7.3.8. Na sféře poloměru R spočítejte α a délku loxodromy, která prochází body (φ_1, λ_1) a (φ_2, λ_2), když $\varphi_1 = 8°$, $\lambda_1 = -80°$ a $\varphi_2 = 50°$, $\lambda_2 = 0°$. Nyní se vraťte na začátek a pomocí vztahu (5) ze 7.1.3 spočítejte také délku ortodromy mezi danými body.

Řešení. **7.3.1.** Funkce Φ musí být lichá. Pak se rovník dostane na osu $y = 0$ a body symetricky umístěné na sféře vzhledem k rovníku jsou zobrazeny do bodů symetricky umístěných podle osy λ. **7.3.2.** Lichost vyplývá z toho, že součin $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{4}\pi\right)$ a $\operatorname{tg}\left(-\frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{4}\pi\right)$ je roven jedné. Limity jsou ∞, $-\infty$. **7.3.3.** Bod na sféře je určen jednoznačně, ať λ má jakoukoliv hodnotu. Pouze k bodu na sféře není λ určeno jednoznačně, pokud neurčíme interval, z něhož se λ bere. Proto jsme požadovali $\lambda \in (-\pi, \pi)$. **7.3.4.** Počet oběhů je nekonečný, přesto, jak uvidíme, je délka loxodromy konečná. **7.3.5.** Rovnice je $\lambda - \lambda_0 = (\operatorname{tg}\alpha)\, \ln \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{4}\pi\right)$. **7.3.7.** Délka je rovna $\frac{1}{2}\pi R/\cos\alpha$. **7.3.8.** $\alpha \doteq 58°3'20''$, délka loxodromy je přibližně rovna $1.395452\,R$ a přibližná délka ortodromy je $1.351907\,R$.