Konečné výsledky zapisujte do zadání na volné místo vpravo. *Podpis:* Jan Vávra

(1) Reálná náhodná veličina X má hustotu $f_X(x) = xe^{-x}1_{[x>0]}$ a veličina Y má (podmíněně X) rovnoměrné rozdělení na intervalu $[0, X]$, tj.

$$f_{Y|X}(y|x) = \tfrac{1}{x}, \quad 0 < y < x.$$

Označme $U = X, V = X - Y$. Spočtěte

(a) $f_{U,V}(u, v)$ $= e^{-u} \cdot \mathbb{1}[0<v<u]$

(b) $f_V(v)$ $= e^{-v} \cdot \mathbb{1}_{(0,\infty)}(v) \implies V \sim Exp(1)$

(c) $f_{U|V}(u|v)$. $= e^{v-u} \cdot \mathbb{1}[0<v<u]$

(2) Nechť X, Y jsou nezávislé náhodné veličiny s hustotou $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$. Spočtěte

$$E[(X+Y)^2|X/Y],$$

pokud víte, že pro každé $a \in (0, \infty), n \in \mathbb{N}_0$ platí rovnost $\int_0^\infty u^n e^{-au} \mathrm{d}u = \frac{n!}{a^{n+1}}$.

$$= \frac{6\left(\frac{X}{Y}+1\right)^2}{\left(\left|\frac{X}{Y}\right|+1\right)^2} = \frac{6(X+Y)^2}{(|X|+|Y|)^2}$$

(3) Nechť X, Y jsou nezávislé náhodné veličiny s rovnoměrným rozdělením $R(0, 2)$. Spočtěte

$$E[(1 + X + Y)^{-3}|X \geq 1]. \quad = \frac{7}{240}$$

JAN VÁVRA

① $X \sim f_X(x) = x e^{-x} \cdot \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)$

$Y|X \sim R(0,X)$ tj. $f_{Y|X}(y|x) = \frac{1}{x} \cdot \mathbb{1}_{(0,x)}(y)$ pro $0<y<x$

$U = X$

$V = X - Y$

$$f_Y(y) = \int_y^\infty e^{-x}\,dx = e^{-y} \cdot \mathbb{1}_{(0,\infty)}(y)$$

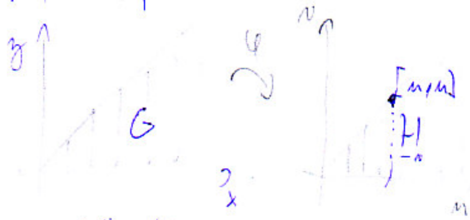
$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} \cdot \mathbb{1}_{[f_X(x)>0]} \Rightarrow f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) \cdot f_{Y|X}(y|x) = x \cdot e^{-x} \cdot \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x) \cdot \frac{1}{x} \cdot \mathbb{1}_{(0,x)}(y)$$

$$= e^{-x} \cdot \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x) \cdot \mathbb{1}_{(0,x)}(y)$$

$$\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \varphi\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ X-Y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \varphi^{-1}(U,V) = \begin{pmatrix} U \\ U-V \end{pmatrix} \Rightarrow J_{\varphi^{-1}}(u,v) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

$X, Y \in (0;\infty)$

a) $f_{U,V}(u,v) = f_{X,Y}(u, u-v) \cdot |-1| \cdot \mathbb{1}_H(u,v)$; kde $H = \varphi[G]$



u je lib. $v\ (0,\infty)$

a ve 2. složce od u mohu odečíst $v \in (0;u)$

$$= e^{-(u)} \cdot \mathbb{1}_{(0,\infty)}(u) \cdot \mathbb{1}_{[0<u-v<u]}$$

$-u < -v < 0$

$u > v > 0$

$$= e^{-u} \cdot \mathbb{1}_{(0,\infty)}(u) \cdot \mathbb{1}_{(0;u)}(v) \checkmark$$

b) $f_V(v) = \int f_{U,V}(u,v)\,du = \mathbb{1}_{(0;\infty)}(v) \cdot \int_v^\infty e^{-u}\,du = \mathbb{1}_{(0;\infty)}(v) \cdot \left[-e^{-u}\right]_v^\infty = \mathbb{1}_{(0;\infty)}(v) \cdot e^{-v}$ ✓

$V \sim Exp(1)$

c) $f_{U|V}(u|v) = \frac{f_{U,V}(u,v)}{f_V(v)} \cdot \mathbb{1}_{[f_V(v)>0]} = \frac{e^{-u} \cdot \mathbb{1}_{(0;\infty)}(u) \cdot \mathbb{1}_{(0;u)}(v)}{e^{-v}} \cdot \mathbb{1}_{(0;\infty)}(v) = e^{v-u} \cdot \mathbb{1}_{(0;\infty)}(u) \cdot \mathbb{1}_{(0;u)}(v)$

tj. $0 < v < u$ ✓

JAN VÁVRA

② $X \perp\!\!\!\perp Y$ a mají hustotu $f(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}$

Help: $\int_0^\infty u^n e^{-au} du = \frac{n!}{a^{n+1}}$; $a \in (0,\infty)$, $n \in \mathbb{N}_0$

$\Rightarrow f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{4} \cdot e^{-|x|-|y|}$ $\qquad E[(X+Y)^2 \mid X/Y]$

transformace: $X+Y = U$, $\frac{X}{Y} = V$ $\Rightarrow \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \varphi(X,Y) = \begin{pmatrix} X+Y \\ \frac{X}{Y} \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \varphi^{-1}(U,V) = \begin{pmatrix} \frac{UV}{V+1} \\ \frac{U}{V+1} \end{pmatrix}$

musíme se vyhnout $Y = 0$

$X = U - Y \quad \Rightarrow \quad X = U - \frac{U}{V+1} = \frac{UV+U-U}{V+1} = \frac{UV}{V+1}$

$U - Y = V \cdot Y \Rightarrow U = (V+1) \cdot Y \Rightarrow Y = \frac{U}{V+1}$ $\qquad V \neq -1$ pak $X = -Y$ ale jinou nezávislost nemusím

$$J_{\varphi^{-1}}(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{v}{v+1} & u \cdot \frac{1}{(v+1)^2} \\ \frac{1}{v+1} & u \cdot \frac{(-1)}{(v+1)^2} \end{vmatrix} = \frac{-uv}{(v+1)^3} - \frac{u}{(v+1)^3} = -\frac{u(v+1)}{(v+1)^3} = -\frac{u}{(v+1)^2}$$

$G_1 = \{ \mathbb{R} \times (0,\infty) \quad \varphi_1, \quad H_1 = \varphi(G_1)$

~~$G_2 = \mathbb{R} \times (-\infty, 0) \quad \varphi_2 \quad H_2 = \varphi(G_2)$~~

tohle platí ? není důležité

? $\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2 \ \exists (x,y) \in G_1 \cup G_2$, že $\varphi(x,y) = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$

$u = x+y \Rightarrow x = \frac{uv}{v+1}$

$v = \frac{x}{y} \qquad y = \frac{u}{v+1}$

pro $v = -1$ mám $x = u - y$, $u = 0$ } $x = -y$

tedy $\varphi(G_1 \cup G_2) = \mathbb{R}^2$

$$f_{U,V}(u,v) = \frac{1}{4} \cdot e^{-\left|\frac{uv}{v+1}\right| - \left|\frac{u}{v+1}\right|} \cdot \frac{|-u|}{(v+1)^2} \cdot \mathbb{1}_{H_1 \cup H_2}(u,v)$$

$H_1 \cup H_2 = \mathbb{R}^2$

$$f_V(u,v) = \frac{1}{4(v+1)^2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{|u|(|v|+1)}{|v+1|}} \cdot |u| \, du \underset{\text{symetrické okolo } 0}{=} \frac{2}{4(v+1)^2} \cdot \int_0^\infty e^{-u \cdot \left(\frac{|v|+1}{|v+1|}\right)} \cdot u^1 \, du \overset{\text{help}}{=}$$

$$= \frac{1}{2(v+1)^2} \cdot \frac{1!}{\left(\frac{|v|+1}{|v+1|}\right)^{1+1}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(1+|v|)^2} \quad \forall v \in \mathbb{R}$$

$$\int u^2 \cdot f_{U,V} \, du \underset{\text{symetrie}}{\overset{\text{oxid}}{=}} \frac{1}{4(v+1)^2} \cdot 2 \cdot \int_0^\infty u^3 \cdot e^{-u \frac{(|v|+1)}{|v+1|}} du = \frac{1}{2(v+1)^2} \cdot \frac{3!}{\left(\frac{|v|+1}{|v+1|}\right)^4} = \frac{3(v+1)^2}{(|v|+1)^4}$$

$$\Rightarrow E[U^2 \mid V=v] = \frac{\frac{3(v+1)^2}{(|v|+1)^4}}{\frac{1}{2}\frac{1}{(1+|v|)^2}} = \frac{6(v+1)^2}{(|v|+1)^2} \Rightarrow E[U^2 \mid V] = \frac{6(V+1)^2}{(|V|+1)^2}$$

$\frac{\int u^2 f_{U,V}(u,v) du}{f_V(v)}$

$$\Rightarrow E[\underbrace{(X+Y)^2}_{U} \mid \underbrace{\tfrac{X}{Y}}_{V}] = \boxed{\frac{6\left(\frac{X}{Y}+1\right)^2}{\left(\left|\frac{X}{Y}\right|+1\right)^2}}$$

③ $X \perp\!\!\!\perp Y$ a $X,Y \sim R(0,2)$

$$\left.\begin{aligned} f_X(x) &= \tfrac{1}{2}\,\mathbb{1}_{(0,2)}(x) \\ f_Y(y) &= \tfrac{1}{2}\,\mathbb{1}_{(0,2)}(y) \end{aligned}\right\} \quad f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{4}\,\mathbb{1}_{(0,2)^2}(x,y)$$

$$E\Big[(1+X+Y)^{-3}\,\Big|\,\underbrace{X \geq 1}_{\text{jev}}\Big] = ?$$

$$\| $$

$$E\Big[\underbrace{E\Big[\frac{1}{(1+X+Y)^3}\,\Big|\,X\Big]}_{\text{veličina}}\,\Big|\,X \geq 1\Big]$$

$$E\Big[\frac{1}{(1+X+Y)^3}\,\Big|\,X=x\Big] \overset{x\in(0,2)}{=} \frac{\int \frac{1}{(1+x+y)^3}\cdot f_{X,Y}(x,y)\,dy}{f_X(x)} = \frac{\int_0^2 \frac{1}{(1+x+y)^3}\cdot\frac{1}{4}\,dy}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\cdot\int_0^2 \frac{1}{((1+x)+y)^3}\,dy =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{1}{((1+x)+y)^2}\cdot\frac{1}{-2}\right]_0^2 = \underbrace{\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(3+x)^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(1+x)^2}\right)}_{\frac{1}{4}\left[\frac{1}{(1+x)^2}-\frac{1}{(3+x)^2}\right]} = \frac{1}{4}\,\frac{-\overset{x^2+2x+1}{(1+x)^2}+\overset{x^2+6x+9}{(3+x)^2}}{(3+x)^2\cdot(1+x)^2} =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{4x+8}{(3+x)^2\cdot(1+x)^2} = \frac{x+2}{(1+x)^2(3+x)^2}$$

$$E\Big[\frac{1}{(1+X+Y)^3}\,\Big|\,X\Big] = \frac{X+2}{(1+X)^2(3+X)^2}$$

$$\Rightarrow E\Big[\frac{X+2}{(1+X)^2(3+X)^2}\,\Big|\,X\geq 1\Big] = \frac{\int_{[X\geq 1]} \frac{X+2}{(1+X)^2(3+X)^2}\cdot\,dP}{P[X\geq 1]} = \frac{\int_1^2 \frac{x+2}{(1+x)^2(3+x)^2}\cdot\frac{1}{2}\,dx}{\frac{1}{2}} =$$

$$= 2\cdot\frac{1}{2}\int_1^2 \frac{1}{4}\left[\frac{1}{(1+x)^2}-\frac{1}{(3+x)^2}\right]dx = \frac{1}{4}\cdot\int_1^2\left[\frac{1}{(1+x)^2}-\frac{1}{(3+x)^2}\right]dx = \frac{1}{4}\cdot\left[\frac{-1}{(1+x)}+\frac{1}{(3+x)}\right]_1^2 =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{-1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{-20+12+30-15}{60}\right) = \frac{1}{4}\cdot\frac{7}{60} = \frac{7}{240}$$

$$P[X\geq 1] = \int_1^{\infty} f_X(x)\,dx = \int_1^2 \left(\frac{1}{2}\right)dx = \frac{1}{2}\cdot(2-1) = \frac{1}{2}$$

Konečné výsledky zapisujte do zadání na volné místo vpravo (nebo vlevo). *Podpis:* FILIP KONOPKA

1. Rozhodněte o následujících funkcích, zda jsou charakteristickými funkcemi nějakých reálných náhodných veličin (po dodefinování limitou v případných bodech odstranitelné nespojitosti) a své tvrzení *stručně a plně zdůvodněte*:

   (a) $f_1(t) = \frac{1}{2}\, e^{it-t^2} + \frac{1}{4}\, \frac{\sin t}{t} + \frac{1}{4}$ ANO

   (b) $f_2(t) = \frac{1}{2}\, \frac{\sin^2 t}{t^2} + \frac{1}{2}\, |\cos(t)|$ NE

   (c) $f_3(t) = \frac{1}{3-\cos^2(t)} + \frac{1}{3}\, e^{-it-2|t|-3t^2} + \frac{1}{6(1+t^2)} \exp\{6(e^{it}-1)\}$ ANO

   (d) $f_4(t) = \frac{\cos(t)}{1+it^2}$ NE

   (e) $f_5(t) = \cos(t^2)e^{it^3}$. NE

2. Nechť $X_n, n \in \mathbb{N}$ jsou nezávislé náhodné veličiny s normálním rozdělením $N(0, n^2)$.

   (a) Rozhodněte o sčítatelnosti skoro jistě následující řady

   $$\sum_{k=1}^{\infty} k^{-5/2} X_k$$

   ANO, sčítatelná s.j.

   (b) Rozhodněte o konvergenci skoro jistě následující posloupnosti a určete její limitu

   $$Y_n = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} X_k^2$$

   $\frac{1}{3}$

3. Nechť $X_n, n \in \mathbb{N}$ jsou nezávislé náhodné veličiny s rovnoměrným rozdělením na intervalu $(-n, n)$. Rozhodněte o konvergenci v distribuci následující posloupnosti

   $$Z_n = \frac{1}{n^{5/2}} \sum_{k=1}^{n} (X_k^2 - EX_k^2).$$

   $Z_n \xrightarrow{D} N\left(0, \frac{4}{225}\right)$

FILIP KONOPKA

1. a) $f(t) = \frac{1}{2} e^{it-t^2} + \frac{1}{4} \frac{\sin t}{t} + \frac{1}{4}$ ANO

neboť jde o konvexní kombinaci char. funkcí,

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1$$

- $e^{it-t^2} \sim N(1,2)$
- $\frac{\sin t}{t} \sim R(-1,1)$
- $1 \sim N(0,0)$

b) $f(t) = \frac{1}{2} \frac{\sin^2 t}{t^2} + \frac{1}{2} |\cos t|$ NE

neboť $f \in C^2(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, ale $f \notin C^2(R)$

c) $f(t) = \frac{1}{2} \frac{2}{3-\cos t} + \frac{1}{3} \underbrace{e^{-it-2|t|-3t^2}}_{(e^{-|t|})^2 \cdot e^{-it-3t^2}} + \frac{1}{6(1+t^2)} \cdot e^{6(e^{it}-1)}$

ANO

$\ulcorner f(0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{3+2+1}{6} = 1 \lrcorner$

neboť:
- $e^{-it-3t^2} \sim N(-1,6)$
- $e^{-|t|} \sim$ Cauchy ; ($\oplus$ součin char. funkcí je char. funkce)
- $\frac{1}{1+t^2} \sim$ DVEXP
- $e^{it} \sim N(1,0)$; $e^{6(s-1)}$ VYTVOŘUJÍCÍ FUNKCE $\sim Pois(6)$

• $\frac{2\,1}{3-\cos^2 t}$ je char. funkce, neboť: +

$$\frac{1}{3-\cos^2 t} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\cos^2 t} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{3}\cos^2 t}$$

a víme, že $\frac{p}{1-qs}$ je vytvořující funkce pro Geom(p); tedy $\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{3}s} \sim \mathrm{Geom}\left(\frac{2}{3}\right)$

Dále: • $\cos t \sim R\{-1;1\}$

Rozdělení: $\frac{1}{2}\left(R\{-1,1\} * R\{-1,1\}\right)^{*\mathrm{Geom}(\frac{2}{3})} + \frac{2}{3}\mathrm{Cauchy}^{*2} * \cancel{2}N(-1,6)$

$+\frac{1}{6}\mathrm{DVEXP} * \left(N(1,0)\right)^{*\mathrm{Pois}(6)}$

d) $f(t) = \frac{\cos t}{1+it^2} = \cos t\cdot\frac{1-it^2}{1-i^2t^4} = \frac{\cos t}{1+t^4}\cdot(1-it^2)$

$\mathrm{Im}\, f = -\frac{t^2}{1+t^4}\cdot\cos(t)$

to je sudá funkce

NE, neboť Im f není lichá

(1e) $f(t) = \cos t^2 \cdot e^{it^3} = \cos(t^2)\cdot(\cos t^3 + i\cdot \sin t^3)$

NE, neboť není stejnoměrně spojitá

stačí najít takové posloupnosti x_k, y_k, že $x_k - y_k \xrightarrow{k\to\infty} 0$,
a zároveň $f(x_k) - f(y_k) \not\xrightarrow{k\to\infty} 0$

FILIP KONOPKA

(3.) $X_n \overset{\perp\!\!\!\perp}{\sim} R(-n,n)$; tedy $X_n \sim n \cdot X_1$,
pričemž $X_1 \sim R(-1,1)$

$$Z_n = \frac{1}{n^{\frac{5}{2}}} \cdot \sum_{k=1}^{n} \left(X_k^2 - EX_k^2 \right)$$

• $$EZ_n = \frac{1}{n^{\frac{5}{2}}} \cdot \sum_{k=1}^{n} \left(EX_k^2 - E(EX_k^2) \right) = 0$$

$$\Gamma \; EX_k^2 = E(k \cdot X_1)^2 = k^2 \cdot \int_{-1}^{1} x^2 \cdot \frac{1}{2} = k^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-1}^{1} = \frac{k^2}{3} \lrcorner$$

Ano, Z_n jsou skutečně centrované a nezávislé

• $$\operatorname{Var} Z_n = \frac{1}{n^5} \cdot \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\operatorname{Var}(X_k^2 - EX_k^2)}_{= \operatorname{Var} X_k^2} = \frac{1}{n^5} \cdot \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Var}(k^2 \cdot X_1^2)$$

$$= \frac{1}{n^5} \cdot \operatorname{Var} X_1^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} k^4 \sim \frac{4}{45} \cdot \frac{1}{n^5} \cdot \frac{n^5}{5}, \; n \to \infty$$

$$\sum_{1}^{n} k^{\alpha} \sim \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}$$

$$\Gamma \; \operatorname{Var} X_1^2 = EX_1^4 - (EX_1^2)^2 = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2} x^4 - \left(\int_{-1}^{1} \frac{1}{2} x^2 \right)^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{x^5}{5} \right]_{-1}^{1} - \left(\frac{1}{3} \right)^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} - \frac{1}{9} = \frac{9-5}{45} = \frac{4}{45} \lrcorner$$

$$\operatorname{Var} Z_n \xrightarrow[n \to \infty]{} \frac{4}{225}$$, hypotéza: $$Z_n \xrightarrow{\mathcal{D}} N\left(0, \frac{4}{225}\right)$$

Ljapunovova podmínka: $(L\gamma)_n(\delta) \xrightarrow[n\to\infty]{?} 0$

pro nějaké $\delta > 0$

$$(L\gamma)_n(\delta) = \sum_{k=1}^{n} E\left|\frac{X_k^2 - EX_k^2}{n^{\frac{5}{2}}}\right|^{2+\delta} =$$

$$= n^{-5-\frac{5}{2}\delta} \cdot \sum_{k=1}^{n} E|\underbrace{X_k^2}_{k^2 \cdot X_1^2} - \underbrace{EX_k^2}_{\frac{k^2}{3}}|^{2+\delta}$$

$$= n^{-5-\frac{5}{2}\delta} \cdot \sum_{k=1}^{n} k^{4+2\delta} \cdot \underbrace{E\left|X_1^2 - \frac{1}{3}\right|^{2+\delta}}_{\in R}$$

$$\asymp n^{-5-\frac{5}{2}\cdot\delta} \cdot \frac{n^{5+2\delta}}{5+2\delta} \asymp n^{-\frac{\delta}{2}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

pro libovolné $\delta > 0$

Využívám toho, že $\sum_{k=1}^{n} k^{\alpha} \approx \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}$, $n\to\infty$

Ano, platí, že $(L\gamma)_n(\delta) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$,

proto skutečně $Y_n \xrightarrow{D} N\left(0, \frac{4}{225}\right)$

2.) NECHŤ $X_n \sim N(0, n^2)$ JSOU NEZÁVISLÉ

a) ROZHODNĚTE O SČÍTATELNOSTI SKORO JISTĚ ŘADY $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-\frac{5}{2}} X_k$

KRITÉRIUM: JE-LI: • $\sum_1^{\infty} EY_n$ SČÍTATELNÁ
• $\sum_1^{\infty} Var Y_n < \infty$ $\Big\}$ => PAK $\sum_1^{\infty} Y_n$ JE SČÍTATELNÁ SKORO JISTĚ

• $\sum_{k=1}^{\infty} E\left(k^{-\frac{5}{2}} X_k\right) = \sum_1^{\infty} k^{-\frac{5}{2}} EX_k = 0$ neboť $EX_n = 0 \ \forall n$

$X_n \sim N(0, n^2)$

$\frac{X_n}{n} \sim N(0,1)$

$\boxed{X_n \sim n \cdot X_1}$, KDE $X_1 \sim N(0,1)$

• $\sum_{k=1}^{\infty} Var\left(k^{-\frac{5}{2}} X_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-5} \cdot Var(k X_1) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-3} \cdot \underbrace{Var X_1}_{1} < \infty$

ANO, JE SČÍTATELNÁ S.J.

b) ROZHODNĚTE O KONVERGENCI POSLOUPNOSTI $Y_n = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} X_k^2$ S.J. A URČETE LIMITU.

SZVČ ŘÍKÁ: PRO X_k NEZÁVISLÉ, NEZÁPORNÉ; $\boxed{Y_k := \frac{1}{b_k} \sum_1^{k} X_k}$, $b_k \nearrow_{k\to\infty} \infty$

$\forall k: b_k > 0$

PLATÍ: • $EY_n \xrightarrow{n\to\infty} y \in \mathbb{R}$
• $\sum_1^{\infty} \frac{Var X_k}{b_k^2} < \infty$ $\Big\}$ => PAK $Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{s.j.} y$

• $EY_n = \frac{1}{n^3} \cdot \sum_{k=1}^{n} EX_k^2 = \underbrace{EX_1^2}_{Var X_1} \cdot \frac{1}{n^3} \cdot \sum_{k=1}^{n} k^2 \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{3}$

$\boxed{\sum_{k=1}^{n} k^{\alpha} \sim \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}}$

$\sum_1^{n} k^2 \sim \frac{n^3}{3}$

• $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{Var X_n}{(n^3)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} < \infty$

=> ano, $Y_n \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{3}$ s.j.

$\angle\, {}^{2}/_{3}$

Konečné výsledky zapisujte do zadání na volné místo vpravo (nebo vlevo). *Podpis:* FILIP KONOPKA

1. Rozhodněte o následujících funkcích, zda jsou charakteristickými funkcemi nějakých reálných náhodných veličin (po dodefinování limitou v případných bodech odstranitelné nespojitosti) a své tvrzení *stručně a plně zdůvodněte*:

   (a) $f_1(t) = \max\{e^{-|t|}, \cos(t)\}$ ~~ANO~~ NE

   (b) $f_2(t) = \frac{1}{2}\exp\{e^{it} - 1\} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\, e^{-it-t^2-|t|}$ ANO

   (c) $f_3(t) = \frac{1}{2}(1 - |t|)^+ + \frac{1}{2}\, e^{it^2}$ NE

   (d) $f_4(t) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\cos(\sqrt{|t|})$ ANO

   (e) $f_5(t) = \frac{\cos(t)}{3-e^{-|t|}} + \frac{1}{2}\frac{\sin t}{t}$. ANO

2. Nechť $X_n, n \in \mathbb{N}$ jsou nezávislé náhodné veličiny s rovnoměrným rozdělením na intervalu $(0, n)$.

   (a) Rozhodněte o sčítatelnosti skoro jistě následující řady

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{X_k^3}{k^5}.$$

ANO, je sčítatelná s.j.

   (b) Rozhodněte o konvergenci skoro jistě následující posloupnosti a určete její limitu

$$Y_n = \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} X_k^2.$$

Ano, $Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{9}$ ✓

3. Nechť $X_n, n \in \mathbb{N}$ jsou nezávislé náhodné veličiny s hustotou $f_n(x) = \frac{1}{2n^2}\, e^{-|x|/n^2}$. Rozhodněte o konvergenci v distribuci následující posloupnosti

$$Z_n = \frac{1}{n^{5/2}}\sum_{k=1}^{n} X_k.$$

FILIP KONOPKA

2. $X_n \overset{\perp\!\!\!\perp}{\sim} R(0,n)$

a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{X_k^3}{k^5}$, označme $Y_k := \frac{X_k^3}{k^5}$

$X_n \sim n \cdot X_1$, přičemž $X_1 \sim R(0,1)$

- $E X_n = n \cdot E X_1 = n \cdot \int_0^1 x \, dx = \frac{1}{2} n$

- $E Y_n = \frac{1}{n^5} \cdot E X_k^3 = \frac{1}{n^5} \cdot \int_0^n x^3 \cdot \frac{1}{n} \, dx =$

$= \frac{1}{n^5} \cdot \frac{1}{n} \cdot \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^n = \frac{1}{4n^2}$

ŘADA $\sum_1^{\infty} \frac{1}{4n^2}$ KONVERGUJE

- $\operatorname{Var} Y_n = \operatorname{Var}\left(\frac{X_n^3}{n^5} \right) = \frac{1}{n^{10}} \cdot \operatorname{Var} X_n^3 =$

$= \frac{1}{n^{10}} \cdot \left(E X_n^6 - (E X_n^3)^2 \right) = \frac{1}{n^{10}} \cdot \left(\int_0^n x^6 \cdot \frac{1}{n} - \left(\int_0^n x^3 \cdot \frac{1}{n} \right)^2 \right)$

$= \frac{1}{n^{10}} \left(\frac{n^6}{7} - \left(\frac{n^3}{4} \right)^2 \right) = \frac{1}{n^{10}} \cdot n^6 \cdot \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{16} \right)$

$= \frac{1}{n^4} \cdot$ konstanta

$\Rightarrow \operatorname{Var} Y_n \asymp \frac{1}{n^4}$, $n \to \infty$

A ŘADA $\sum_1^{\infty} \frac{1}{n^4}$ KONVERGUJE,

PROTO $\sum_1^{\infty} \frac{X_k^3}{k^5}$ JE SČÍTATELNÁ N. V.

použil jsem kritérium:

$$\left.\begin{aligned} &\bullet \sum_1^\infty E Y_n \text{ je sčitatelná} \\ &\bullet \sum_1^\infty \operatorname{Var} Y_n < \infty \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \sum_1^\infty Y_n \text{ je sčitatelná s. j.}$$

(2b) $Y_n = \frac{1}{n^3} \cdot \sum_{k=1}^{n} X_k^2$

SZVČ říká: $Y_n = \frac{1}{b_n} \cdot \sum_{k=1}^{n} Z_k$, KDE $b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, $b_n \geq 0$

$$\text{pokud: } \left.\begin{aligned} &\bullet E Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} y \in \mathbb{R} \\ &\bullet \sum_1^\infty \frac{\operatorname{Var}(Z_n)}{b_n^2} < \infty \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \boxed{Y_n \xrightarrow{s.j.} y \in \mathbb{R}}$$

$\bullet\ E Y_n = \frac{1}{n^3} \cdot \sum_{k=1}^{n} E X_k^2 = \frac{1}{n^3} \cdot \sum_{k=1}^{n} \left(\int_0^k x^2 \cdot \frac{1}{k}\, dx \right) =$

$= \frac{1}{n^3} \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \cdot \frac{k^3}{3} = \frac{1}{3n^3} \cdot \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{3n^3} \cdot \frac{k(k+\frac{1}{2})(n+1)}{3}$

$\xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{9} \in \mathbb{R}$

TEDY $\boxed{E Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{9}}$, ověřím SZVČ:

$\bullet \sum_1^\infty \frac{\operatorname{Var}(X_n^2)}{b_n^2} = \sum_1^\infty \frac{E X_n^4 - (E X_n^2)^2}{n^6} = \dots = \sum_1^\infty \frac{\frac{n^4}{5} - \left(\frac{n^2}{3}\right)^2}{n^6} =$

$= \sum_1^\infty \frac{\frac{n^4}{5} - \frac{n^4}{9}}{n^6} = \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{9}\right) \cdot \sum_1^\infty \frac{1}{n^2} < \infty$

FILIP KONOPKA

$\ulcorner$ • $EX_n^4 = \int_0^n x^4 \cdot \frac{1}{n} = \frac{n^4}{5}$

• $EX_n^2 = \int_0^n x^2 \cdot \frac{1}{n} = \frac{n^2}{3}$ $\lrcorner$

Tedy $\sum_1^\infty \frac{Var(X_n^2)}{b_n^2} < \infty$; tj. posloupnost Y_n splňuje SZVČ;

neboť lim $EY_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{9} \in \mathbb{R}$,

Y_n jsou nezávislé; a $Y_n \geq 0$;

tedy $\boxed{Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{9}}$

Konečné výsledky zapisujte do zadání na volné místo vpravo (nebo vlevo). *Podpis:* JAN VÁVRA

1. Rozhodněte, která z následujících funkcí je charakteristickou funkcí nějaké reálné náhodné veličiny.

   (a) $f_1(t) = \frac{1}{2}\left(\cos^2(t) + \cos(\frac{t^2}{2\pi})\right)$ NE - není stejnoměrně spojitá [illegible] [illegible]

   (b) $f_2(t) = \frac{1}{3}\, e^{-t^2 - it - |t|} + \frac{2}{4-\cos(t)}$ ANO

   (c) $f_3(t) = \frac{1}{1+t^2} \frac{\sin t}{t} \exp\{e^{it} - 1\}$ ANO

   (d) $f_4(t) = \frac{1}{2}\cos(t) + \frac{1}{2}\,|\cos(t)|$ NE není $C^2(\mathbb{R})$ i když $f_4''(0)$ existuje

   (e) $f_5(t) = \left(\cos^3(t) + i\sin^4(t)\right) e^{it}$. NE $\operatorname{Re} f_5(t)$ není sudá

2. Nechť $X_n, n \in \mathbb{N}$ jsou nezávislé náhodné veličiny s hustotou $f_n(x) = \frac{1}{2n}\, e^{-|x|/n}$.

   (a) Rozhodněte o sčítatelnosti skoro jistě následující řady

   $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{X_k}{k^2}.$$

   je sčítatelná s.j.

   (b) Rozhodněte o konvergenci skoro jistě následující posloupnosti a určete její limitu

   $$Y_n = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} X_k^2.$$

   $Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{s.j.} \frac{2}{3}$

3. Nechť $X_n, n \in \mathbb{N}$ jsou nezávislé náhodné veličiny s rovnoměrným rozdělením na intervalu $(-n, n)$. Rozhodněte o konvergenci v distribuci následující posloupnosti

   $$Z_n = \frac{1}{n^{7/2}} \sum_{k=1}^{n} X_k^3.$$

   $Z_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} N(0; \frac{1}{49})$

Konečné výsledky zapisujte do zadání na volné místo vpravo. *Podpis:* JANVÁVRA

(1) Rozhodněte o následujících funkcích, zda jsou nebo nejsou charakteristickými funkcemi nějakých náhodných veličin a své tvrzení stručně a plně zdůvodněte:

(a) $f_1(t) = \frac{1}{3(1+t^2)} + \frac{1}{4-\cos(t)} + \frac{1}{3}\, e^{-|t|-t^2+it+\cos(t)-1}$ ANO

(b) $f_2(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,|\cos(t^2)|\, e^{it}$ NE není stejnoměrně spojitá

(c) $f_3(t) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\cos(\sqrt{|t|})$ NE $|f_3(t)|$ není $(2\pi)^2$ periodická

(d) $f_4(t) = \frac{1}{5-e^{-|t|}} + \frac{\sin t}{2t} + \frac{1}{4}\,\frac{1}{1+t^2}$ ANO

(e) $f_5(t) = \frac{1}{2} + \frac{e^{it}}{2}\,\frac{1+t}{1+t^2}$. NE $|f_5(\frac{1}{2})| > 1$

(2) Buďte $X_n, n \in \mathbb{N}$ nezávislé náhodné veličiny, přičemž pro $n \in \mathbb{N}$ veličina X_n má exponenciální rozdělení se střední hodnotou $\sqrt{n}$.

(a) Rozhodněte, zda je následující řada konvergentní skoro jistě

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{-3} X_k^3.$$

je sčítatelná s.j.

(b) Rozhodněte, zda následující posloupnost konverguje skoro jistě. Pokud ano, spočtěte příslušnou limitu

$$Y_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} X_k^2.$$

$Y_n \xrightarrow{s.j.} 1$

(c) Rozhodněte, zda následující posloupnost konverguje v distribuci. Pokud ano, spočtěte příslušné limitní rozdělení

$$Z_n = \frac{1}{n^{3/2}}\sum_{k=1}^{n}(X_k^2 - EX_k^2).$$

$Z_n \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0, \frac{20}{3})$

(3) Reálné náhodné veličiny X, Y jsou nezávislé a každá z nich má hustotou $f(x) = x^{-2}1_{[x>1]}$. Spočtěte

(a) $E[\frac{1}{\max\{X,Y\}} | \min\{X,Y\}]$,

(b) $E[\frac{1}{\max\{X,Y\}} | \min\{X,Y\} > 2]$.

a) $\frac{3}{2}\,\frac{V^4-1}{V(V^3-1)}$; kde $V = \min\{X,Y\}$

b) $\frac{39}{22}$

③ X, Y nezávislé s hustotou $f(x) = x^{-2}\cdot \mathbb{1}_{[x>1]}$

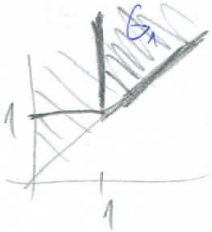
$$f_{X,Y}(x,y) \overset{\perp}{=} x^{-2}\cdot \mathbb{1}_{[x>1]}\cdot y^{-2}\cdot \mathbb{1}_{[y>1]} = \frac{1}{x^2\cdot y^2}\cdot \mathbb{1}_{(1,\infty)^2}(x,y)$$

a) $E\left[\frac{1}{\max\{X,Y\}} \,\middle|\, \min\{X,Y\}\right]$ ... X a Y jsou spojité $P(X=Y)=0$ → nastává buď $X>Y$ nebo $Y>X$

~~nastane-li $Y<X$ => $\min\{X,Y\}=Y$, $\max\{X,Y\}=X$~~

~~$E\left[\frac{1}{X}\middle| Y\right]$, což odpovídá $E\left[\frac{1}{X}\middle| Y=y\right] = \frac{\int \frac{1}{x}\cdot f_{X,Y}(x,y)\,dx}{f_Y(y)}$~~

transformace $U = \min\{X,Y\}$, $V = \max\{X,Y\}$ $\quad \varphi(x,y) = \begin{pmatrix}\min\{x,y\}\\ \max\{x,y\}\end{pmatrix}$ $<$ $\varphi_1 = \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ na $G_1 = \{(x,y) : x<y\}$; $\varphi_2 = \begin{pmatrix}y\\ x\end{pmatrix}$ na $G_2 = \{(x,y) : x>y\}$

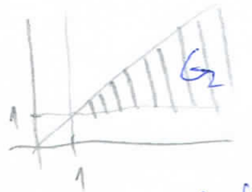
φ_1: 

$\begin{pmatrix}U\\ V\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}$ $\qquad H_1 = G_1$

$\varphi(x,y) = \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ ... identita

$\varphi^{-1}(u,v) = \begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}$ ... $|\varphi^{-1}(u,v)| = \begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix} = 1$

$\Big\}$ $f_1(u,v) = f_{X,Y}(u,v)\cdot \mathbb{1}_{H_1}(u,v)\cdot 1$ $\quad \boxed{H_1 : 1<u<v}$

φ_2: 

$\begin{pmatrix}U\\ V\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}Y\\ X\end{pmatrix}$ .. $\varphi(x,y) = \begin{pmatrix}y\\ x\end{pmatrix}$

$\Rightarrow \varphi^{-1}(u,v) = \begin{pmatrix}v\\ u\end{pmatrix}$ ... $|\varphi^{-1}(u,v)| = \begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix} = -1$

$\Big\}$ $f_2(u,v) = f_{X,Y}(v,u)\cdot \mathbb{1}_{H_1}(u,v)\cdot |-1|$

! $\varphi_2 : G_2 \to H_1$!

$$f_{U,V}(u,v) = \mathbb{1}_{H_1}(u,v)\cdot\left(f_{X,Y}(u,v) + f_{X,Y}(v,u)\right) = \mathbb{1}_{H_1}(u,v)\cdot\left(\frac{1}{u^2\cdot v^2}\cdot \mathbb{1}_{(1,\infty)^2}(u,v) + \frac{1}{v^2\cdot u^2}\cdot \mathbb{1}_{(1,\infty)^2}(v,u)\right)$$

kde je pořadí jedno

$$= \mathbb{1}_{H_1}(u,v)\cdot \frac{2}{u^2\cdot v^2}\cdot \mathbb{1}_{(1,\infty)^2}(u,v) = \frac{2}{u^2\cdot v^2}\cdot \mathbb{1}_{[1<u<v]}$$

~~margin~~ $f_V(v) = \int \mathbb{1}_{H_1}(u,v)\cdot \frac{2}{u^2\cdot v^2}\cdot \mathbb{1}_{(1,\infty)^2}(u,v)\,du = \mathbb{1}_{(1,\infty)}(v)\cdot \int_1^v \frac{2}{u^2\cdot v^2}\cdot du = \frac{2}{v^2}\cdot \mathbb{1}_{(1,\infty)}(v)\cdot\left[-\frac{2}{u^3}\right]_1^v =$

$$= \frac{2}{v^2}\cdot \mathbb{1}_{(1,\infty)}(v)\cdot\left(-\frac{2}{v^3} + \frac{2}{1}\right) = \mathbb{1}_{(1,\infty)}(v)\cdot\frac{-4+4v^3}{v^5} = \mathbb{1}_{(1,\infty)}(v)\cdot\frac{4(v^3-1)}{v^5}$$

$$E\left[\frac{1}{U}\middle| V=v\right] = \frac{\int \frac{1}{u}\cdot f_{U,V}(u,v)\,du}{f_V(v)}\cdot \mathbb{1}_{(1,\infty)}(v) = \mathbb{1}_{(1,\infty)}(v)\cdot\frac{6(v^4-1)}{v^6}\cdot\frac{v^5}{4(v^3-1)} = \mathbb{1}_{(1,\infty)}(v)\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{v^3+v^2+v+1}{v\cdot(v^2+v+1)}$$

$$\int \frac{1}{u}\cdot f_{U,V}(u,v) = \frac{2}{v^2}\cdot\int_1^v \frac{1}{u^3}\,du = \frac{2}{v^2}\cdot\left[\frac{-3}{u^4}\right]_1^v = \frac{2}{v^2}\cdot\left(\frac{-3}{v^4} + \frac{+3}{1}\right) = \frac{6(v^4-1)}{v^6}$$

$$E\left[\frac{1}{U}\middle| V\right] = \frac{3}{2}\cdot\frac{V^4-1}{V\cdot(V^3-1)} \Rightarrow E\left[\frac{1}{\max(X,Y)}\middle| \min(X,Y)\right] = \frac{3}{2}\cdot\frac{(\min\{X,Y\})^4 - 1}{\min\{X,Y\}\cdot\left((\min\{X,Y\})^3-1\right)}$$

b) $E\left[\frac{1}{\max\{X,Y\}} \middle| \min\{X,Y\} > 2\right]$

$$E\left[\frac{1}{U}\middle|V>2\right] = E\left[\,E\left[\frac{1}{U}\middle|V\right]\middle|V>2\right] = E\left[\frac{3}{2}\cdot\frac{V^4-1}{V\cdot(V^3-1)}\middle|\underset{\text{jev}}{\underbrace{V>2}}\right]$$

$$P(V>2) = \int_2^\infty f_V(v)\,dv = \int_2^\infty \frac{4(v^3-1)}{v^5}\,dv = 4\cdot\left[\int_2^\infty \frac{1}{v^2}dv - \int_2^\infty \frac{1}{v^5}dv\right] = 4\cdot\left(\left[\frac{-2}{v^3}\right]_2^\infty - \left[\frac{-5}{v^6}\right]_2^\infty\right) =$$

$$= 4\cdot\left(\frac{2}{8} - \frac{5}{64}\right) = 1 - \frac{5}{16} = \frac{11}{16}$$

Obecně $E\left[G(Z)\middle|Z\in B\right] = \dfrac{\int_B G(z)\,dP_Z(z)}{P(Z\in B)}$

$$\int_2^\infty \frac{3}{2}\cdot\frac{v^4-1}{v(v^3-1)}\cdot 4\cdot\frac{(v^3-1)}{v^5}\,dv = 6\cdot\int_2^\infty \frac{v^4-1}{v^6}\,dv = 6\cdot\left(\int_2^\infty \frac{1}{v^2} - \int_2^\infty \frac{1}{v^6}\right) = 6\cdot\left(\left[\frac{-2}{v^3}\right]_2^\infty - \left[\frac{-6}{v^7}\right]_2^\infty\right) =$$

$$= 6\cdot\left(\frac{2}{8} - \frac{6}{8\cdot 16}\right) = \frac{6}{8}\left(2 - \frac{6}{16}\right) = \frac{3}{4}\cdot\left(2-\frac{3}{8}\right) = \frac{3}{4}\cdot\left(\frac{13}{8}\right) = \frac{39}{32}$$

$$E\left[\frac{1}{U}\middle|V>2\right] = \frac{\frac{39}{32}}{\frac{11}{16}} = \frac{39\cdot 16}{32\cdot 11} = \frac{39}{22}$$

Tedy $E\left[\frac{1}{\max\{X,Y\}}\middle|\min\{X,Y\}>2\right] = \frac{39}{22}$

2. $X_n \overset{iid}{\sim} Exp(\sqrt{n})$, tzn. $X_n \sim \sqrt{n}\cdot X_1$, tedy $f_{X_1}(x) = e^{-x}\cdot \mathbb{1}_{[x>0]}$

a) Rozhodněte, zda řada $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-3} X_k^3$ konverguje skoro jistě.

$Y_k := k^{-3} X_k^3$ tj. řada středních hodnot i řada rozptylů má být konvergentní

$$\bullet \sum_{k=1}^{\infty} E(k^{-3}X_k^3) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-3} E(X_k^3) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-3}\cdot E\left((\sqrt{k}X_1)^3\right) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-3} k^{\frac{3}{2}} EX_1^3$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left(k^{-\frac{3}{2}} EX_1^3\right) = EX_1^3 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} k^{-\frac{3}{2}} < \infty$$

$$EX_1^3 = \int_{\mathbb{R}} x^3 f_X(x)\,dx = \int_0^{\infty} x^3 e^{-x}\,dx < \infty$$

$$\bullet \sum_{k=1}^{\infty} Var(k^{-3}X_k^3) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-6}\cdot \underbrace{Var X_k^3}_{Var((\sqrt{k}X_1)^3)} = \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{k^{-6}\cdot k^3}_{k^{-3}} \cdot Var X_1^3 < \infty$$

b) Rozhodněte, zda následující posloupnost konverguje skoro jistě.
Pokud ano, spočtěte limitu.

$Y_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} X_k^2$ | kde $b_n = n^2 \nearrow_{n\to\infty} \infty$, $Z_k := X_k^2$ $\boxed{SZVČ}$

pokud:
- $EY_n \xrightarrow{n\to\infty} y \in \mathbb{R}$, vyslovíme hypotézu: $Y_n \xrightarrow{s.j.} y$
- je-li $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{Var Z_k}{(b_k)^2} < \infty$, hypotéza platí.

$$\bullet EY_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} E\left((\sqrt{k}X_1)^2\right)$$

$$= EX_1^2 \cdot \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k = EX_1^2 \cdot \frac{1}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2} EX_1^2$$

$$= \frac{1}{2}\left(Var X_1 + (EX_1)^2\right) = \frac{1}{2}\cdot 2 = 1$$

to co je uvnitř původní sumy

$$\bullet \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Var(X_k^2)}{(k^2)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2 Var X_1^2}{k^4} = Var X_1^2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty \Rightarrow \text{Hypotéza platí}$$

c) Rozhodněte, zda následující posloupnost konverguje v distribuci. Pokud ano, spočtěte příslušné limitní rozdělení.

$$Y_n = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \sum_{k=1}^{n} (X_k^2 - EX_k^2)$$

Δ-SCHÉMA:
- $EY_n = 0$ - centrované
- $\mathrm{Var}\, Y_n = \frac{1}{n^3} \mathrm{Var}\left(\sum_{k=1}^{n}(X_k^2 - EX_k^2)\right) \overset{\amalg}{=} \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Var}\, X_k^2$

$$= \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Var}(k X_1^2) = \mathrm{Var}\, X_1^2 \cdot \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2 =$$

$$= \mathrm{Var}\, X_1^2 \cdot \frac{1}{n^3} \cdot \frac{n(n+\frac{1}{2})(n+1)}{3} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{3} \mathrm{Var}\, X_1^2$$

$$\ulcorner \mathrm{Var}\, X_1^2 = EX_1^4 - (EX_1^2)^2 = \underbrace{\int_0^\infty x^4 e^{-x}\, dx}_{4!} - \Big(\underbrace{\int_0^\infty x^2 e^{-x}}_{(2!)^2}\Big)^2 =$$

$$= 24 - 4 = 20 \quad \lrcorner$$

tedy $\boxed{\mathrm{Var}\, Y_n \to \frac{20}{3}}$

Hypotéza: $\boxed{Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}} N\left(0, \frac{20}{3}\right)}$

LJAPUNOVOVA PODMÍNKA: $(L\delta)_n(\delta) = \sum_{k=1}^{n} E\left[\left|\frac{X_k^2 - EX_k^2}{n^{\frac{3}{2}}}\right|^{2+\delta}\right]$

„$\exists \delta > 0$, že $(L\delta)_n(\delta) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$?"

$$= n^{-\frac{3}{2}(2+\delta)} \cdot \sum_{k=1}^{n} E\left[|X_1^2 k - k EX_1^2|^{2+\delta}\right] = n^{-\frac{3}{2}(2+\delta)} \cdot \sum_{k=1}^{n} k^{2+\delta} \cdot \underbrace{E\left[|X_1^2 - EX_1^2|^{2+\delta}\right]}_{<\infty}$$

$$\asymp n^{-\frac{3}{2}(2+\delta)} \cdot n^{2+\delta+1} = n^{-\frac{\delta}{2}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \text{ pro lib. } \delta > 0$$

a) $f_1(t) = \frac{1}{2}\left(\cos^2(t) + \cos\left(\frac{t^2}{2\pi}\right)\right)$ NE, není stejnoměrně spojitá

b) $f_2(t) = \frac{1}{3}e^{-t^2-it-|t|} + \frac{2}{4-\cos t} = \frac{1}{3}e^{-t^2-it}\cdot e^{-|t|} + \frac{2}{3}\cdot\frac{\frac{3}{4}}{1-\frac{1}{4}\cos t}$

ROZDĚLENÍ: $\frac{1}{3}\cdot N(-1,2) * \text{Cauchy} + \frac{2}{3}\cdot\left(R(\{-1,1\})\right)^{*\,\text{Geom}(\frac{3}{4})}$

! Je-li $X \sim N(-1,2)$ $\quad \hat{P}_X(t) = e^{-it-t^2}$
$Y \sim \text{Cauchy}$ $\quad \hat{P}_Y(t) = e^{-|t|}$ $\Big\}\ \xRightarrow{X \perp\!\!\!\perp Y}$ $\boxed{S_0 := X+Y}$
má $\hat{P}_{S_0}(t) = \hat{P}_X(t)\cdot\hat{P}_Y(t)$

! Jsou-li $Z_n \overset{iid}{\sim} R(\{-1,1\})$, tj. $\hat{P}_{Z_n}(t) = \cos t$
$N \sim \text{Geom}(\frac{3}{4})$, tj. $\Psi_N(s) = \frac{\frac{3}{4}}{1-\frac{1}{4}s}$ $\Big\}\ \xRightarrow{Z_n \perp\!\!\!\perp N}$ $\boxed{S := \sum_{n=1}^{N} Z_n}$

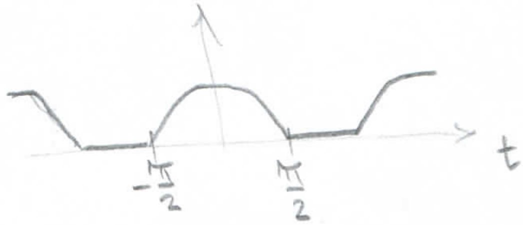
a $\hat{P}_S(t) = \Psi_N\left(\hat{P}_{Z_n}(t)\right) = \frac{\frac{3}{4}}{1-\frac{1}{4}\cos t}$

c) $f_3(t) = \frac{1}{1+t^2}\cdot\frac{\sin t}{t}\cdot e^{e^{it}-1}$

ROZDĚLENÍ: $\text{DVEXP} * R(-1,1) * (N(1,0))^{*\,\text{Pois}(1)}$ $\quad = \text{Pois}(1)$

$X \sim \text{DVEXP}$
$Y \sim R(-1,1)$
$Z \sim (N(1,0))^{*\,\text{Pois}(1)}$ $\Big\}\ \Rightarrow$ X, Y, Z NEZÁVISLÉ, $W := X+Y+Z$
$\hat{P}_W(t) = \hat{P}_X(t)\cdot\hat{P}_Y(t)\cdot\hat{P}_Z(t)$

d) $f_4(t) = \frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{2}|\cos t|$



$f(t) \in C^2(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
$\notin C^2(\mathbb{R})$

e) $f_5(t) = (\cos^3 t + i\sin^4 t)e^{it} = (\cos^3 t + i\sin^4 t)(\cos t + i\sin t)$
$= \cos^4 t + i\sin^4 t\cos t + i\cos^3 t\sin t - \sin^5 t$

$\text{Re} f(t) = \cos^4 t - \sin^5 t$ není sudá !

1\. a) $f_1(t) = \underbrace{\frac{1}{3(1+t^2)}}_{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+t^2}} + \underbrace{\frac{1}{4-\cos t}}_{\frac{1}{3}\cdot\frac{\frac{3}{4}}{1-\frac{4}{3}\cos t}} + \underbrace{\frac{1}{3}e^{-|t|-t^2+it+\cos t-1}}_{\frac{1}{3}\cdot e^{-|t|}\cdot e^{it-t^2}\cdot e^{1\cdot(\cos t-1)}}$

ROZDĚLENÍ: $\frac{1}{3}\cdot \text{DVEXP} + \frac{1}{3}\left(R\{-1,1\}\right)^{*\text{geom}\left(\frac{3}{4}\right)} + \frac{1}{3}\cdot \text{Cauchy} * N(1,2) * \left(R(\{-1,1\})\right)^{*\text{Po}(1)}$

b) $f_2(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left|\cos(t^2)\right| e^{it}$ → NE, není stejnoměrně spojitá

c) $f_3(t) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\cos(\sqrt{|t|})$ → NE $\exists t_0 > 0$, že $\cos(\sqrt{|t_0|}) = 1$ a není periodická

$t_0 = (2\pi)^2 : \cos(\sqrt{(2\pi)^2}) = \cos 2\pi = 1$

d) $f_4(t) = \underbrace{\frac{1}{5-e^{-|t|}}}_{\frac{1}{4}\frac{\frac{4}{5}}{1-\frac{1}{5}e^{-|t|}}} + \underbrace{\frac{\sin t}{2t}}_{\frac{1}{2}\frac{\sin t}{t}} + \frac{1}{4}\frac{1}{1+t^2}$

$\frac{1}{4}\frac{\frac{4}{5}}{1-\frac{1}{5}e^{-|t|}} + \frac{1}{2}\frac{\sin t}{t} + \frac{1}{4}\frac{1}{1+t^2}$

ROZDĚLENÍ: $\frac{1}{4}\cdot\left(\text{Cauchy}\right)^{*\text{geom}\left(\frac{4}{5}\right)} + \frac{1}{2}R(0,1) + \frac{1}{4}\text{DVEXP}$

e) $f_5(t) = \frac{1}{2} + \frac{e^{it}}{2}\cdot\frac{1+t}{1+t^2}$ NE

$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{5}{4}} = \frac{6}{5} > 1$